نماذج إحصائية خطية تطبيقية

انحدار، تحليل تباين وتصاميم تجريبية

الجزء الثاني

(تحليل تباين وتصاميم تجريبية)

تأليف

جون نتر

ويليام وازرمان

ميخائيل كتنر

ترجمة

أ.د. أنيس إسماعيل كنجو — أ.د. عبد الحميد بن عبد الله الزيد

د. إبراهيم بن عبد العزيز الواصل — د. الحسيني عبد البر راضي

النشر العلمي و المطابع

جامعة الملك سعود

نماذج إحصائية خطية تطبيقية

انحدار، تحليل تباين وتصاميم تجريبية

الجزء الثاني (تحليل تباين وتصاميم تجريبية)

تأليـف

جون نتر — جامعة جورجيا

ويليام وازرمان — جامعة سيراكاس

ميخائيل كتنر — جامعة إيموري

ترجمــة

أ. د. أنيس إسـماعيل كنجــو   أ. د. عبد الحميد عبد الله الزيد

د. إبراهيم بن عبد العزيز الواصل   د. الحسـيني عبد البـر راضي

قسم الإحصاء وبحوث العمليات – كلية العلوم – جامعة الملك سعود

النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

ⓒ جامعة الملك سعود، ١٤٢١هـ (٢٠٠٠م)

هذه ترجمة عربية مصرح بها لكتاب:

Applied Linear Statistical Models: Regression, Analysis of Variance and Experimental Designs (Third Edition)
By: John Neter, William Wasserman & Michael Kutner
© 1990, Richard D. Irwin, Inc.

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

نتر، جون

نماذج إحصائية خطية تطبيقية: انحدار، تحليل تباين وتصاميم تجريبية: الجزء الثاني (تحليل تباين وتصاميم تجريبية)/جون نتر، ويليام وازرمان وميخائيل كتنر؛ ترجمة أنيس اسماعيل كنجو [وآخرون]- الرياض

٨٩٨ص: ١٧سم × ٢٥سم

ردمك ٩-١٣٧-٣٧-٩٩٦٠ (مجموعة)

٧-١٣٨-٣٧-٩٩٦٠ (ج٢)

(الجزء الثاني:تحليل تباين وتصاميم تجريبية)

١-الجبر الخطي ٢-المعادلات الخطية ٣-الاحصاء الرياضي

أ-وازرمان، وليام (م. مشارك) ب-كتنر، ميخائيل (م. مشارك) ج-كنجو، أنيس اسماعيل (مترجم)

د-العنوان

ديوي ٥١٢,٥ ٢١/١٠٦٥

رقم الإيداع: ٢١/١٠٦٥

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس العلمي على نشره في اجتماعه الثالث عشر للعام الدراسي ١٤١٦/١٤١٧هـ المعقود بتاريخ ١٤١٦/١١/١٢هـ الموافق ١٩٩٦/٣/٣١م.

جامعة الملك سعود ١٤٢١هـ

مقدمة المترجمين

الحمد لله وحده والصلاة والسلام على من لا نبيّ بعده، سيدنا محمد بن عبد الله الهادي الأمين والمرسل بلسان عربي مبين، وبعد فقد وقع اختيارنا على كتاب نماذج إحصائية خطية تطبيقية لأسباب عدة نوجزها فيما يلي:

١ - يتطرق الكتاب لتشكيلة واسعة من التطبيقات الإحصائية تتناول بصورة شاملة تقريبا تحليل الانحدار وأهم ما يحتاجه الباحث والدارس من تطبيقات تحليل التباين وتصميم التجارب، ويعرج في هذه الرحلة الطويلة في دنيا الطرائقية الإحصائية على بعض من تطبيقات السلاسل الزمنية والإحصاء اللامعلمي.

٢ - يتميز الكتاب بعرض واضح وميسر لأساسيات الطرق الإحصائية، وللمفاهيم الرئيسية التي تشكل خلفيتها النظرية، مما يرفع بشكل ملحوظ من قدرة الدارس على التطبيق السليم، وتجنب الشطط والاستخدام المضلل للإحصاء، ويعينه على فهم النتائج التي يحصل عليها، وتفسيرها تفسيرا صحيحا، وعرضها بدقة وإحكام، وكان ذلك ثمرة تعاون ثلاثة مؤلفين ممن برعوا في مجال الإحصاء التطبيقي بالإضافة إلى خبرة عدد وافر من المراجعين، وحصيلة سنوات طويلة من الخبرة الميدانية الواسعة.

٣ - يتميز الكتاب بتشكيلة فريدة من المسائل الميدانية المأخوذة، من تطبيقات واقعية في مجالات شتى، شملت العلوم الاجتماعية والأحيائية وعلوم الإدارة والاقتصاد والصناعة وغيرها، وهو بما يحتويه من الأمثلة والمسائل والتمارين والمشاريع والبيانات الإحصائية الواقعية، يشكل من حيث الكم والكيف مرجعا لا غنى عنه لقاعدة واسعة من الباحثين والدارسين والمستفيدين.

٤ - وإلى جانب شمولية العرض يتميز الكتاب بحداثة العرض، وإذا خرجت آخر طبعة للكتاب، وهي الطبعة الثالثة، في التسعينات فقد احتوت عددا من التقنيات الحديثة التي ظهرت للمرة الأولى في السبعينات والثمانينات، لاسيما في مجال التشخيص لعلّة أو عل

يعاني منها البيان الإحصائي، والتدابير العلاجية لها، ثم التحقق من صلاحية النموذج الإحصائي المستخدم لتحليل البيان، وآفاق الاستفادة منه في مجالات التقدير أو التنبؤ أو السيطرة. وكان لا بد للكتاب، وقد ارتدى ثوب الحداثة هذا، أن يعتمد بقوة على استخدام الحاسب الآلي، ويتجنب الغوص في صيغ الحسابات اليدوية التقليدية التي تستهلك جزءا غير قليل من الكتب الطرائقية التقليدية.

٥ ـ نجح الكتاب في عرض ثلاثة مواضيع متفرقة هي تحليل الانحدار، وتحليل التباين، وتحليل التجارب المصممة، في إطار موحّد هو إطار النماذج الخطية التطبيقية، مما يسمح إضافة إلى الفوائد النظرية، بالاستفادة من أفضل ما تضمنته الحزم الإحصائية الحديثة، ويمكّن من الاستخدام الأمثل للحاسوب في التحليل الإحصائي.

ونظرا لوفرة المواد التي يقدمها الكتاب، فقد تقرّر، بعد موافقة الناشر، إصدار الترجمة هذه في جزئين، يتضمن الجزء الأول الفصول الثلاثة عشر الأولى وهي تشمل تحليل الانحدار، ويتضمن الجزء الثاني الفصول الستة عشر الباقية وهي في تحليل التباين وتصميم التجارب وتحليلها، وكانت مساهمات المترجمين أحد عشر فصلا للدكتور أنيس كنجو وستة فصول لكل من الدكتور عبد الحميد الزيد والدكتور إبراهيم الواصل والدكتور الحسيني راضي، كما قام الدكتور أنيس كنجو بمهمة المراجعة العلمية واللغوية للكتاب مما أضفى على أسلوب العرض وحدة لا تخفى، وأدى إلى انسجام العبارة عبر الكتاب بأكمله.

وكانت مسألة المصطلح العلمي تحديا نرجو أن نكون قد وُفّقنا في مواجهته، خاصة وأن العديد من المصطلحات يظهر في العربية، في حدود معلوماتنا، للمرّة الأولى، وبالطبع نرحب بأية مقترحات يتفضل بها الزملاء والقراء سواء تناولت مصطلحا أو تعبيرا.

وكما أشارت مقدمة المؤلفين، فقد صُممت الطبعة الثالثة بحيث تغطي مقررات من مستوى المرحلة الجامعية الأولى ومن مستوى الدراسات العليا. فضلا عن استخدامه كمرجع لباحثين في ميادين الإدارة والاقتصاد والعلوم الاجتماعية والصحية والأحيائية. وأملنا كبير في أن يسدّ هذا الكتاب بجزأيه ثغرة في المكتبة الإحصائية العربية، وما أحوجنا إلى سد الثغرات في

المكتبة العلمية العربية بجميع فروعها وأجنحتها وليس في الإحصائية منها ، فقط. فالعربية لغتنا الجميلة هي كما يصفها المرحوم الأستاذ الدكتور "محمد المبارك" : "غنية من حيث الأبنية والصيغ غنى لا تضارعها فيه لغة أخرى من اللغات الراقية التي تفي بحاجات الإنسان في مثل هذا العصر الذي نحن فيه، وتدل مفردات اللغة العربية دلالة قاطعة على أن العرب صنفوا الوجود تصنيفا شاملا دقيقا منطقيا يدعو إلى الدهشة والتعجب ويدل على مستوى فكري قلّما وصلت إليه الأمم في مثل ذلك الطّور البكر من تاريخ حياتها".

إن المتأمل من الأساتذة والمفكرين العرب في مردود التعليم الجامعي في بلادنا العربية ترتد إليه تأملاته بوافر من الحسرة والألم وشعور قد يصل حد الإحباط. وهو فوق هذا وكرجل استوعب واقع العصر واستشعر آفاق التقدم الحضاري ووتيرته ينظر إلى قومه بين الأقوام التي انتظمها ركب الحضارة المعاصر فيفتقدهم، ويجيل الطرف من حوله يستشف ساعة الفجر فيجدها، ضمن واقعنا العلمي السائد، بعيدة المنال. لا بل يجد الهوة الكبيرة بينه وبين نظيره في العالم المتقدم علميا تزداد اتساعا وعمقا كل يوم وكل ساعة.

إن بناء المكتبة العلمية العربية واجب على كل مستطيع، فما الذي يمنعنا عن إغناء العربية لتصبح لغة علم تذخر بالمصطلح من كل صنف، وتتميز مكتباتها بلجب من المراجع العلمية المعدة بلغة الضاد؟ ثم كيف يمكن لنا تلمّس الطريق إلى هذا الهدف إذا بقي التعليم الجامعي بلغة أجنبية؟ هل نكتب ونترجم لتوضع جهودنا على الرفوف، أم ليتخذها جمهور الطلبة سبيلا ميسرا إلى المعرفة؟ إن ثوب العيرة الذي نرتديه لا يؤهلنا لأكثر من أدوار التمثيل، فالملكات المبدعة تنمو في حضن العربية، ولا يمكن لها أن تزدهر إلا في حماها، ولن ننطلق في بناء مستقبلنا الحضاري ونأمل في استعادة موقع حضاري يليق بتراثنا المرموق إلا عندما تتيسر المعرفة لكل عربي بلغته الأم.

ولما كانت الأعمال بالنيات، وكان لكل امرئ ما نوى، وكانت نوايانا، فيما اخترناه وفيما بذلناه من جهود، خدمة لغة القرآن المجيد وتقديم زاد علمي مفيد، لكل قارئ بالعربية، فالله سبحانه وتعالى نسأل أن يتقبل منا هذه الترجمة عملا صالحا، فهو من وراء القصد، وهو الهادي إلى سواء السبيل.

المترجمون

مقدمة المؤلفين

تُستخدم النماذج الإحصائية الخطية الخاصة بالانحدار، تحليل التباين، والتصاميم التجريبية، اليوم استخداما واسعا في إدارة الأعمال، الاقتصاد، والعلوم الاجتماعية، الصحية والأحيائية. وتحتاج التطبيقات الناجحة لهذه النماذج إلى فهم سليم لكل من الخلفية النظرية والمسائل العملية التي نواجهها عند استخدام النماذج في حالات من واقع الحياة. وبينما تشكل الطبعة الثالثة من نماذج إحصائية خطية تطبيقية، في الأساس، كتابا تطبيقيا، إلا أنها تهدف إلى خلط النظري والتطبيقات بصورة فعّالة، متجنبة الشطط سواء في تقديم النظري بصورة منعزلة أو في طرح عناصر من التطبيقات دون الحاجة إلى فهم أسسها النظرية.

وتختلف الطبعة الثالثة عن الطبعة الثانية في عدد من النواحي المهمة.

١- أضفنا فصلا جديدا في تصاميم القياسات المكررة نظرا لأهميتها الكبرى في العلوم السلوكية وعلوم الحياة. وبالنسبة للقارىء، يشكّل الفصل الثامن والعشرون المضاف مدخلا إلى تصاميم القياسات المكررة مع المتابعة في تصاميم القياسات المكررة ذات العامل الواحد، وفي التصاميم ذات العاملين مع قياسات مكررة لأحد العاملين أو لهما معا، وفي تصاميم الوحدة المنقسمة.

وبالإضافة إلى ذلك فإن الفصل الثاني عشر حول بناء نموذج انحدار قد أعيدت صياغته إلى حد كبير واتّسع كثيرا. ونطور، في هذا الفصل، بالتفصيل عملية بناء نموذج بحيث يستوعب العديد من عناصر هذه العملية، التي نوقشت في فصول سابقة. ونتعرض، أيضا، لمعالجة موسّعة جدا للتحقق من نماذج انحدار.

٢- توسعنا كثيرا في مناقشة تشخيصات تحليل الانحدار وتحليل التباين وذلك عبر الكتاب بأكمله. ففي ميدان تحليل الانحدار نتابع الآن، من بين التدابير التشخيصية المدروسة، تدابير PRESS; DFFITS; DFBETAS، كما أضفنا، أيضا، رسومات الانحدار الجزئي، كما ندرس تحويل بوكس- كوكس كتدبير علاجي.

وقد ازددنا ، أيضا، من التأكيد على التشخيصات في تحليل التباين وتصميم التجارب، إذ نقدم عددا أكبر بكثير من الرسومات التشخيصية، كما أضفنا مناقشة رسوم آحتمال طبيعي للتأثيرات الرئيسة المقدَّرة للعوامل.

٣- وقد توسعنا في عدد من المواضيع وأعدنا تنظيمها. ففي ميدان تحليل الانحدار وُحِّدت الآن مناقشة المربعات الدنيا المرجحة ودُرست في سياق الانحدار المتعدد. وقد أعيد تنظيم مناقشة نماذج الانحدار المعيارية، كما دُعم عرض كل من مجاميع المربعات الإضافية والخطية المتعددة من خلال إعادة تنظيم شاملة لها، كما توسعنا في الفصل الثالث عشر وهو فصل الارتباط الذاتي بأن درسنا طريقة هيلدرت – لو (Hildreth - Lu) في تقدير معلمة الارتباط الذاتي، وأضفنا فقرة تتعلق بفترات تنبؤ عند التنبؤ بمشاهدة جديدة. وأضفنا ، أيضا، مناقشة موجزة لطرائقية سطح الاستجابة في الفصل التاسع المتعلق بانحدار كثيرات الحدود.

وفي ميدان تحليل التباين والتصاميم التجريبية، توسّعنا كثيرا في شرح نماذج التحاين، خاصة ماتعلق منها بنماذج التأثيرات العشوائية المختلطة لتصاميم القطاع العشوائي، التصاميم الحاضنة، تصاميم القياسات المكررة، وتصاميم المربع اللاتيني. وعلى وجه الخصوص أكّدنا على التقابل بين نموذج تحاين والبنية الارتباطية للمشاهدات.

وبالإضافة إلى ذلك، فقد عززنا مناقشة مفهوم القوة وتخطيط حجوم العينات من منظور العلاقات الوثيقة بين هذين الموضوعين.

وقد اتسعت ، أيضا، مناقشة التحاين متعدد العوامل وذلك عندما لاتكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية.

٤- وقد عززنا، عبر الكتاب، التكامل بين التصاميم التجريبية ودراسات المشاهدة، مبتدئين بمناقشة الحصول على بيانات لتحليل الانحدار في الفصل الثاني.

٥- وقمنا، عبر الكتاب، بتنقيح شامل في العرض مستندين الى الخبرة الميدانية ضمن الفصل الدراسي، وذلك بغية المزيد من الوضوح فيما نقدمه.

وقد نُشرت الفصول الثلاثة عشر الأولى من الطبعة الثالثة لـ" **نماذج إحصائية خطّية تطبيقية**" في كتاب منفصل تحت عنوان" **نماذج انحدار خطية تطبيقية**"، طبعة ثانية. ويتضمن الكتاب الأخير هذا ثلاثة فصول إضافية هي تحليل الارتباط (الفصل ١٤)، الانحدار غير الخطي (الفصل ١٥) وتقنيات الانحدار عندما يكون المتغير المستقل ثنائيا (الفصل ١٦).

وإحدى الميزات الرئيسة للطبعة الثالثة من نماذج إحصائية خطية تطبيقية هو الأسلوب الموحد لتطبيق نماذج إحصائية خطية في الانحدار، وفي تحليل التباين، وفي التصاميم التجريبية. وبدلا من معالجة هذه الميادين بصورة منعزلة فإننا نسعى إلى تبيان العلاقات الضمنية بينها واستخدام رموز مشتركة في الانحدار، من جهة، وفي تحليل التباين والتصاميم التجريبية من جهة أخرى، يسهّل النظرة الموحدة لها جميعا. وقد نُقلت فكرة النموذج الإحصائي الخطي العام، والتي تبرز بصورة طبيعية في سياق نماذج الانحدار، إلى نماذج تحليل التباين ونماذج التصاميم التجريبية، كي تُظهر علاقتها بنماذج الانحدار. ولهذا الأسلوب الموحد ، أيضا، ميزة البساطة في العرض.

و لم يشتمل هذا الكتاب فقط على المواضيع الأكثر تقليدية في الانحدار وتحليل التباين والتصاميم التجريبية الأساسية، ولكنه تطرق أيضا لمواضيع، كثيرا مااستُخفّت مع أنها مهمة في الممارسةالعملية. وهكذا فقد كرسنا فصلا بكامله (الفصل العاشر) لمتغيرات مؤشرة مستقلة. وينبري فصل آخر (الفصل ١٢) إلى عملية بناء نموذج انحدار، بما في ذلك طرق اختيار بمساعدة الحاسوب لتحديد مجموعات جزئية "جيدة" من المتغيرات المستقلة وتحليلها تحليلا شاملا قبل القيام بالاختيار النهائي لنموذج الانحدار، ومن ثمَّ التحقق من صحة نموذج الانحدار المختار. واستخدام تحليل الراسب وتشخيصات أخرى لفحص مصداقية نموذج انحدار هو إيقاع متواتر عبر هذا الكتاب. وكذلك الأمر بالنسبة لاستخدام تدابير علاجية يمكن أن تكون مفيدة عندما لايكون النموذج مناسبا. ونؤكد، في تحليل نتائج دراسة، على استخدام طرق التقدير أكثر من اختبارات المعنوية، لأن التقدير، في الغالب، أكثر مغزى في الممارسة العملية وبما أنه من النادر أن تُعنى المسائل التطبيقية بتقدير بمفرده فقد أكدنا ، أيضا، على استخدام طرق التقدير المتزامن.

وقد قُدّمت الأفكار النظرية إلى الدرجة التي نحتاجها من أجل فهم رشيد عند القيام بتطبيقات سليمة. وأعطيت البراهين في ظروف نشعر معها أنها تخدم في إيضاح طريقة عمل. وجرى التأكيد على فهم شامل للنماذج، وعلى وجه الخصوص فهم معنى معالم النموذج. ذلك لأن مثل هذا الفهم أمر أساسي لسلامة التطبيقات. ويتضمن الكتاب تشكيلة واسعة من الأمثلة الواقعية وذلك لتوضيح استخدام المبادىء النظرية، ولتبيان التنوع العظيم لتطبيقات النماذج الإحصائية الخطية، ولإظهار كيفية القيام بالتحاليل في المسائل المختلفة.

ونستخدم فقرات تحت عنوان " ملاحظات" أو " تعليقات " في كل فصل لتقديم مناقشة إضافية ومسائل تتصل بالمجرى الرئيس لتطور النقاش، وبهذه الطريقة يبقى تقديم الأفكار الأساسية في الفصل تقديما يتلافى التفاصيل والمنعطفات التي قد تصرف القارىء عن الفكرة الأساسية.

وكثيرا ماتتطلب تطبيقات النماذج الإحصائية الخطية حسابات مستفيضة. وننطلق من موقع أن الحاسوب متوافر في معظم العمل التطبيقي، وفضلا عن ذلك ففي متناول كل مستخدم للحاسوب أنواع مختلفة من الحزم البرامجية الخاصة بتحليل الانحدار وتحليل التباين. وبالتالي فإننا نشرح الخطوات الرياضية الأساسية في توفيق نموذج إحصائي خطي دون الإسهاب في التفاصيل الحسابية. ويسمح لنا هذا الأسلوب بتجنب العديد من الصيغ المعقدة، ونستطيع معه التركيز على المبادىء الأساسية. ونستخدم في هذا الكتاب المدرسي قدرات الحاسوب على إنجاز الحسابات استخداما واسعا، ونوضح تشكيلة من مُخرجات الحاسوب شارحين كيفية استخدامها في التحليل.

وفي نهاية كل فصل (باستثناء الفصل الأول) نقدم مختارات من المسائل. ويمكن للقارىء هنا أن يعزز فهمه للطرائقية ويستخدم المفاهيم التي تعلمها في تحليل البيانات. وقد حرصنا على تقديم مسائل تحليل بيانات تمثل تطبيقات أصيلة. وأفضل طريقة للقيام بالحسابات في معظم المسائل هي استخدام حاسب يدوي أو حاسب آلي (حاسوب).

ونفترض أن قارىء الطبعة الثالثة من نماذج إحصائية خطية تطبيقية قد اجتاز مقررا، يشكّل مدخلا إلى الاستقراء الاحصائي، ويغطي المادة التي أوجزناها في الفصل الأول.

وحساب التفاضل والتكامل غير مطلوب لقراءة نماذج إحصائية خطية تطبيقية ونستخدم أحيانا حساب التفاضل والتكامل لتبيان كيفية الحصول على بعض النتائج المهمة، إلا أن هذه الإثباتات مقصورة على التعليقات أو الملاحظات الإضافية ويمكن حذفها دون أية خسارة في استمرارية دراسة الكتاب. وسيجد القرّاء ذوو المعرفة بحساب التفاضل والتكامل هذه التعليقات والملاحظات في تسلسلها الطبيعي بحيث يحصلون على فوائد المعالجات الرياضية في سياقها المباشر وفي النماذج الخطية بصورة عامة، وفي الانحدار المتعدد على وجه الخصوص، نحتاج الى بعض العناصر الأساسية من جبر المصفوفات ويقدم الفصل السادس هذه العناصر من جبر المصفوفات في سياق الانحدار البسيط تسهيلا لتعلمها.

والطبعة الثالثة من نماذج احصائية خطية تطبيقية مصممة لاستخدامها في مقررات في النماذج الإحصائية الخطية من مستوى المرحلة الجامعية الأولى ومن مستوى الدراسات العليا، وكمقررات ثانية في الاحصاء التطبيقي. ويعتمد مدى استخدام المادة المقدمة في هذا الكتاب المدرسي في مقرر معين على مقدار الوقت المتوفر وعلى اهداف المقرر. وبعض من المقررات الممكنة تشمل:

١- مقرر لفصلين دراسيين، كل منهما نصف سنوي، أو لفصلين دراسيين كل منهما ثلث سنوي، في الانحدار، تحليل التباين والتصاميم التجريبية الأساسية يمكن أن يبنى على الفصول التالية:

الانحدار: ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ (الفقرات من ٥,١ إلى ٥,٣)، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١٠ (الفقرات من ١٠,١ إلى ١٠,٤)، ١١(الفقرات من ١١,١ إلى ١١,٦) ، ١٢.

تحليل التباين : ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ .

تصاميم تجريبية : ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٩ .

٢- يمكن أن يبنى مقرر، لفصل ثلثي (Quarter) أو لفصل نصفي (Term)، في تحليل الانحدار على الفصول التالية ٢، ٣، ٤، ٥ (الفقرات من ٥,١ إلى ٥,٣)، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩، ١٠ (الفقرات من ١٠,١ إلى ١٠,٤)، ١١(مواضيع مختارة)، ١٢، ١٣.

٣- يمكن أن يبنى مقرر، لفصل ثلثي أو لفصل نصفي، في تحليل التباين على الفصول التالية: ١٤،١٥،١٦، ١٧ (مواضيع مختارة)، ١٨، ١٩، ٢٠ ، ٢١ (مواضيع مختارة)،٢٢، ٢٣.

٤- يمكن أن يُبنى مقرر، لفصل ثلثي أو لفصل نصفي، في الانحدار وتحليل التباين على الفصول التالية:

الانحدار: ٢،٣،٤،٥ (الفقرات من ٥,١ إلى ٥,٣)، ٧،٦،٨،١٠ (الفقرات من ١٠,١ إلى ١٠,٤).

تحليل التباين: ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٨، ١٩.

٥- يمكن أن يبنى مقرر، لفصل ثلثي أو لفصل نصفي، في التصاميم التجريبية الأساسية على الفصول التالية: ٢٤، ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٢٩.

وبالقدر الذي يسمح به الوقت يمكن للمدرس أن يغطي مواضيع إضافية من الكتاب. ويمكن استخدام هذا الكتاب ، أيضا، في دراسة شخصية لأشخاص يهتمون بميادين إدارة الأعمال، الاقتصاد، والعلوم الاجتماعية، الصحية والأحيائية، ممن يرغبون في تحصيل كفاءة في تطبيق النماذج الاحصائية الخطية.

ويمكن للمدرسين الحصول على كتيّب الحلول من الناشر، إروين (Irwin). ويتضمن هذا الكتيّب، على قرص (ديسكت)، البيانات لجميع المسائل والتمارين والمشاريع، ومجموعات البيانات في الملحق.

ولايمكن تأليف كتاب كهذا دون مساعدة كبيرة من آخرين. ونحن مدينون للعديد ممن ساهموا في تطوير النظرية والتطبيقات التي نوقشت في هذا الكتاب. ونحب ، أيضا، التنويه بإعجابنا بطلابنا الذين ساعدونا بمختلف الطرق على تحديث طريقة العرض في هذا الكتاب. وممنونون للعديد من مستخدمي نماذج إحصائية خطية تطبيقية ونماذج انحدار خطية تطبيقية الذين زودونا بتعليقاتهم ومقترحاتهم النابعة من تدريسهم لهذين الكتابين. ونحن مدينون ، أيضا، للأساتذة جيمس هولستاين (James E. Holstein) جامعة ميسوري (Missouri)، وديفيد شيري(David L. Sherry) جامعة غرب فلوريدا (West Florida)، لمراجعتهم الطبعة الأولى لنماذج إحصائية خطية تطبيقية، وللأساتذة صموئيل كوتز (Samuel Kotz) جامعة ميريلاند (MaryLand)، رالف روسو(Ralph P. Russo) جامعة أيووا(Iowa))، وبيتر ثال

(Peter F. Thall) جامعة جورج واشنطن (George Washington) لمراجعتهم كتاب نماذج انحدار خطية تطبيقية، وللأساتذة جون شيو(John S. Y. Chiu) جامعة واشنطن، وجيمس كالفين (James A. Calvin) جامعة ايووا، وميخائيل دريسكول (Michael F. Oriscoll)، جامعة ولاية أريزونا (Arizona State) لمراجعتهم الطبعة الثانية من نماذج احصائية خطية تطبيقية. ولقد قدم هؤلاء المراجعون العديد من المقترحات المهمة، التي تستحق جزيل امتناننا.

وقد ساعدنا جورج كوتسونيس(George Cotsonis)، مارجريت كولشاك (Margarette S. Kolczak) وآلفين رامبي(Alvin H. Rampey) بشكل متقن في تدقيق المخطوطة، وفي إعداد الرسوم باستخدام الحاسوب، وبطرق أخرى. أما جين ديزني(June Disney) وساندرا جون هاتفيلد (Sandra June Hatfield) فقد قامتا بجميع الجهد الطباعي تقريبا، وتصدتا بمقدرة لتهيئة مخطوطة صعبة. ونحن ممتنون جدا لهؤلاء الأشخاص جميعا لعونهم ومساعدتهم.

وأخيرا فقد تحملت عائلاتنا بصبر، الضغوط التي سببها التزامنا باستكمال هذه النسخة المنقحة، ونحن مقدّرون لتسامحم.

المؤلفون

المحتويات

الفصل التاسع عشر: تحليل وتخطيط دراسات ثنائية العامل حجوم متساوية العينات

الفصل العشرون: حجوم عينات غير متساوية في دراسات ثنائية العامل

الفصل الحادي والعشرون: نماذج تأثيرات عشوائية ومختلطة للدراسات تتناول عاملين ومواضيع أخرى في تحليل التباين (التحاين)

الفصل الخامس والعشرون: تصاميم القطاع العشوائي - II

الفصل السادس والعشرون: التصاميم الحاضنة والمعاينة الجزئية

الفصل السابع والعشرون: قواعد تطوير نماذج تحاين وجداول للتصاميم المتوازية

الفصل الثامن والعشرون: القياسات المتكررة والتصاميم ذات الصلة

الفصل التاسع والعشرون: المربع اللاتيني والتصاميم ذات الصلة

الملاحق

ثبت المصطلحات

نموذج تباين وحيد العامل واختبارات

نماذج تحليل التباين (التحاين) هي أدوات احصائية تستخدم بكثرة لدراسة العلاقة بين متغير تابع ومتغير واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة. وهي لا تتطلب وضع أية افتراضات حول طبيعة العلاقة الإحصائية كما لا تتطلب أن تكون المتغيرات المستقلة كمية.

وفي هذا الفصل سوف نتطرق أولا إلى العلاقة بين تحليل التباين والإنحدار ومن ثَمَّ سنتابع العناصر الأساسية لنماذج تحليل التباين وحيدة العامل وهي نماذج مناسبة عند دراسة متغير مستقل واحد. فيما تبقى من القسم *III* من الكتاب (وهو القسم الأول من الجزء الثاني) سنستمر في مناقشة نماذج تحليل التباين وحيدة العامل. أما في القسم IV (أو القسم الثاني من الجزء الثاني) فسوف ندرس نماذج تحليل تباين متعددة العوامل حيث يتناول البحث اثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة.

(١٤-١) العلاقة بين الانحدار وتحليل التباين

كما سبق ورأينا فإن نموذج تحليل الإنحدار يشرح العلاقة الإحصائية بين متغير مستقل أو أكثر ومتغير تابع. وفي نماذج الانحدار العادية تكون كل من المتغيرات المستقلة و المتغير التابع متغيرات كمية (في مناقشتنا هذه ندع جانبا موضوع استخدام المتغيرات المؤشرة في نموذج تحليل الانحدار والتي تناولناها بالبحث في الفصل العاشر). إن دالة الانحدار تصف طبيعة العلاقة الإحصائية بين متوسط الاستجابة ومستوى (مستويات) المتغير (المتغيرات) المستقل (المستقلة).

لقد تطرقنا إلى تحليل التباين عندما تناولنا بالبحث موضوع الانحدار. وقد كان استخدامنا له يتعلق باختبارات متنوعة حول معاملات الانحدار، وحول توفيق نموذج انحدار، وما شابه ذلك. وفي الواقع فإن تحليل التباين أعم بكثير من الاستخدام الذي أشرنا إليه في نماذج الانحدار. فنماذج تحليل التباين تهتم بالعلاقة الاحصائية بين متغير تابع ومتغير واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة. وهي مناسبة لبيانات المشاهدة وللبيانات الناتجة عن تجارب مصممة مثلها في ذلك مثل نماذج الانحدار. وكما في نماذج الانحدار المعتادة تماما فإن المتغير التابع لا بد أن يكون متغيرا كميا.

وتختلف نماذج تحليل التباين عن نماذج الانحدار العادية في ناحيتين رئيستين ، هما:

١ـ في نماذج تحليل التباين يمكن أن تكون المتغيرات المستقلة نوعية (مثلاً: الجنس موقع جغرافي، مناوبة العمل في مصنع).

٢ـ عندما تكون المتغيرات المستقلة كمية ، فإننا لا نضع أية افتراضات عن طبيعة العلاقة الإحصائية بين هذه المتغيرات والمتغير التابع. وهكذا فإن ما نواجهه من حاجة لتحديد طبيعة دالة الانحدار في تحليل الانحدارالعادي لا تبرز في نماذج تحليل التباين.

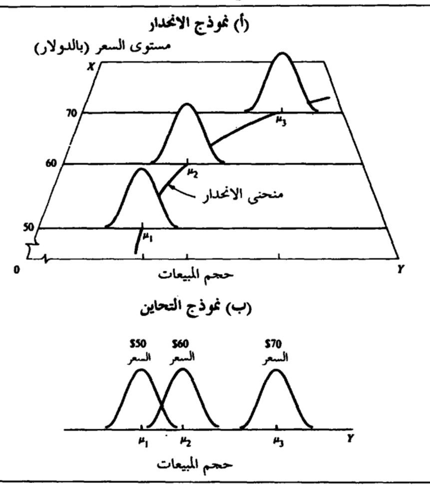
توضيحات

ويوضح الشكل (١٤-١) الاختلافات الجوهرية بين نماذج تحليل التباين ونماذج الانحدار في حالة كون المتغير المستقل متغيرا كميا. ففي الشكل (١٤-١)أ. نبين نموذج تحليل الانحدار لدراسة تحديد سعر تتضمن ثلاثة مستويات مختلفة للأسعار $X = \$50, \$60 , \$70$ ، لاحظ أنه قد تم تدوير المستوى XY من وضعه المعتاد بحيث يصبح المحور Y في مواجهة المراقب. ولكل مستوى من مستويات المتغير المستقل هناك توزيع احتمالي لحجم المبيعات وتقع متوسطات هذه التوزيعات الاحتمالية على منحنى الانحدار الذي يصف العلاقة الإحصائية بين مستوى السعر ومتوسط حجم المبيعات.

ويوضح الشكل (١٤-١)ب نموذج تحليل التباين للدراسة نفسها، ونلاحظ هنا أنه تم اعتبار المستويات الثلاثة للأسعار كمجتمعات مختلفة، كل منها يقود إلى توزيع

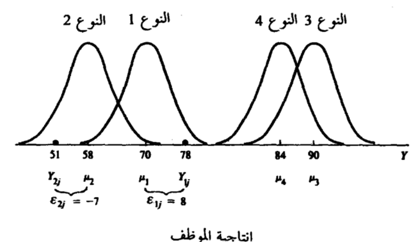
احتمالي لحجم المبيعات. ولا يأخذ نموذج تحليل التباين، في الاعتبار، الفروق الكمية في مستويات الأسعار الثلاثة وكذلك علاقتها الإحصائية بمتوسط حجم المبيعات.

شكل (١٤ - ١) العلاقة بين نماذج تحليل الانحدار والتحاين



ويوضح الشكل (١٤-٢) نموذج تحليل التباين لدراسة تأثير أربعة أنواع من أنظمة الحوافز التشجيعية على إنتاجية المستخدمين. وفي هذه الحالة يقابل كل نوع من أنظمة الحوافز مجتمع مختلف، ويرتبط بكل مجتمع منها توزيع احتمالي لإنتاجية المستخدمين. وبما أن نوع نظام الحافز التشجيعي هو متغير نوعي فإن الشكل (١٤-٢) لا يحتوي على التمثيل المقابل لنموذج انحدار.

شكل (١٤ ـ ٢) تمثيل تحليل التباين لمثال أنظمة الحوافز التشجيعية



الاختيار بين نوعين من النماذج

عندما تكون المتغيرات المستقلة متغيرات نوعية، فليس هناك في الأساس اختيار بين نماذج تحليل الانحدار وتحليل التباين. ولكن الوضع يختلف عندما يكون المتغير المستقل كميا. ففي هذه الحالة ينطوي الاختيار من جهة على تحليل لا يتطلب تحديدا لطبيعة العلاقة الإحصائية (تحليل التباين) ومن جهة أخرى ينطوي على تحليل يتطلب مثل ذلك التحديد (تحليل الانحدار).

وإذا كان هناك شك كبير حول طبيعة العلاقة الإحصائية، فإن الاستراتيج المتبع أحيانا، هو أن نستخدم أولا نموذج تحليل التباين لدراسة تأثيرات المتغيرات المستقلة على المتغير التابع، من غير أية فرضيات مقيدة حول طبيعة العلاقة الاحصائية. وتكون الخطوة التالية عندئذ هي العودة إلى تحليل الانحدار للاستفادة من الميزة الكمية للمتغيرات المستقلة.

ملاحظة

إن كُنْتَ قد درست الفصل العاشر، فستعلم أن تحليل الانحدار الذي يستخدم المتغيرات المؤشرة يمكنه أن يتناول متغيرات مستقلة نوعية كما يمكنه وبالطرق نفسها تناول متغيرات كمية دون وضع افتراضات حول طبيعة العلاقة الاحصائية. ومع استخدام كهذا للمتغيرات المؤشرة في نماذج الانحدار نحصل على النتائج نفسها التي نحصل عليها من نماذج تحليل التباين. وسبب استخدام نماذج تحليل التباين كطرائقية إحصائية متميزة هو أن بنية المتغيرات المؤشرة المستقلة تسمح لحسابات مبسطة يمكن ملاحظتها بشكل واضح في الطرق الإحصائية لتحليل التباين.

(١٤-٢) الدراسات التجريبية ودراسات المشاهدة، العوامل والمعالجات

كما ذكرنا سابقا ، يمكن استخدام نماذج تحليل التباين مثلها مثل نماذج تحليل الإنحدار في كل من البيانات التجريبية وبيانات المشاهدة. وبصورة مماثلة، فإن نماذج تحليل التباين مصممة لتطبيقات يكون موضع الاهتمام فيها تأثيرا واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة على المتغير التابع. ولكن تختلف، في الغالب، المصطلحات المستخدمة في نماذج تحليل التباين، ففي نماذج تحليل التباين مثلا تدعى المتغيرات المستقلة عوامل أو معالجات.

وسنتطرق الآن إلى دور الدراسات التجريبية ودراسات المشاهدة في تحليل التباين وإلى التقابل بين العوامل و المعالجات في تحليل التباين، وبين المتغيرات المستقلة في تحليل الانحدار.

الدراسات التجريبية ودراسات المشاهدة

إن نماذج تحليل التباين مفيدة للبيانات التي تأتي من كل من الدراسات التجريبية ودراسات المشاهدة.

مثال ١. دُرس تأثير أربع مستويات لدرجة حرارة الطبخ على انتفاخ عجة بيض معدّة من خليط، وذلك بتخصيص خمس علب من الخليط عشوائيا لكل مستوى من مستويات درجة حرارة الطبخ. وتعتبر هذه الدراسة تجريبية إذ يتم التحكم في المتغير المستقل الذي يعنينا (درجة حرارة الطبخ) من قبل المجرب. والوحدات التجريبية هنا

هي علب الخليط العشرين. والتصميم التجريبي المستخدم هو التصميم تام العشوائية، حيث تم التخصيص العشوائي للعشرين علبة من الخليط على درجات حرارة الطبخ الأربعة وفق الطريقة التي شرحت في الفصل الثاني.

مثال ٢. في دراسة لآثار مستوى التعليم للباعة ونوع خبرتهم على حجم مبيعاتهم تم اختيار عينة عشوائية من الباعة العاملين حاليا لدى الشركة من ثَمَّ الحصول على معلومات عن أعلى شهادة، نوع الخبرة، وحجم المبيعات لكل من الباعة الذين اختيروا. هذه دراسة مشاهدة إذ تم الحصول على البيانات دون التحكم في المتغيرات المستقلة ذات العلاقة (التعليم ونوع الخبرة).

العامل

العامل هو متغير مستقل يراد دراسته في أي بحث ما. مثلا في بحث لدراسة تأثير السعر على مبيعات بضاعة ثمينة، نريد دراسة السعر كعامل، وبصورة مشابهة نجد في دراسة لمقارنة مدى شعبية أربعة برامج تلفزيون أن العامل هنا هو نوع برنامج التلفزيون. وفي مثال انتفاخ عجة البيض، العامل هو درجة حرارة الطبخ.

مستوى العامل

مستوى عامل هو شكل معين لذلك العامل ففي دراسة الأسعار في الشكل (١٤-١)، اعتمدنا ثلاثة أسعار هي $70 ,$60 ,$50 . وكل من هذه الأسعار هو مستوى للعامل المدروس، ونقول إن لعامل السعر ثلاثة مستويات في هذه الدراسة. وكمثال آخر،في دراسة لمدى تأثير لون ورقة الاستبيان على معدل الاستجابة في مسح بريدي، نجد أن لون الورقة هو العامل تحت الدراسة وكل لون مختلف جرى استخدامه هو مستوى لذلك العامل. وفي مثال انتفاخ عجة البيض، كل درجة حرارة للطبخ هي مستوى عامل.

دراسات وحيدة العامل ومتعددة العوامل

تختلف الدراسات باختلاف عدد العوامل المدروسة فبعضها دراسات وحيدة العامل وذلك عندما ينحصر الاهتمام بعامل واحد، فقط. وعلى سبيل المثال فإن دراسة جاذبية أربعة برامج تلفزيون المذكورة آنفا هي مثال على دراسة وحيدة العامل، وفي

الدراسات متعددة العوامل تتم دراسة عاملين أو أكثر في الوقت نفسه. وكمثال على بحث متعدد العوامل نذكر دراسة لتأثيرات درجة الحرارة ودرجة تركيز مادة مذيبة على الانتاج في عملية كيميائية معينة.

في هذه الحالة تجرى دراسة عاملين - درجة الحرارة والتركيز - في الوقت نفسه وذلك للحصول على معلومات عن تأثيراتها. وبصورة مماثلة ففي مثال حجم المبيعات المذكور سابقا تمت دراسة عاملين في الوقت نفسه هما مستوى التعليم ونوع الخبرة. وسنناقش الدراسات متعددة العوامل في القسم IV أما الآن فسوف نركز على دراسات وحيدة العامل.

عوامل تصنيفية وتجريبية

يمكن تصنيف العامل وفقا لما إذا كان عاملا تجريبيا أو عاملا تصنيفيا. وفي أي دراسة تعتمد على بيان مشاهدات تكون العوامل تحت الدراسة عوامل تصنيفية. ويتعلق عامل التصنيف بخصائص الوحدات التجريبية المدروسة ولا يخضع لتحكم الباحث. وعلى سبيل المثال نجد في مثال حجم المبيعات أن شكل مستوى التعليم ونوع الخبرة هما عاملا تصنيف لأنهما يشيران إلى خصائص الباعة في الدراسة ولم يتم التحكم فيهما تجريبيا ومن جهة أخرى، فإن العامل التجريبي هو عامل يتم تخصيص مستوياته عشوائيا إلى الوحدات التجريبية. وكمثال نذكر عامل درجة حرارة الطبخ في مثال انتفاخ عجة البيض.

لقد أشرنا من قبل إلى أن البيانات التجريبية تقدم أساسات للنتائج أكثر ثباتا مما هو الحال في بيانات المشاهدات. وإذا كانت العوامل التجريبية ستظهر، فقط، في الدراسات التجريبية وتظهر العوامل التصنيفية في دراسات المشاهدة فقد لا تكون هناك حاجة للتمييز بين هذين النوعين من العوامل. ولكن عوامل التصنيف يمكن أن تظهر في الدراسات التجريبية ولذلك فمن المهم أن نعرفها على هذا الأساس إذ سوف لا تكون الاستقراءات المتعلقة بهذه العوامل واضحة وضوح الاستقراءات الخاصة بالعوامل التجريبية.

مثال. أحد صانعي الأجهزة المنزلية يدير ثلاثة مراكز للتدريب في الولايات المتحدة وذلك لتدريب ميكانيكيين على صيانة منتجات الشركة. وفي كل مركز يتم دراسة

برنامجين مختلفين للتدريب، ويتم تخصيص المتدربين عشوائيا لكل من هذين البرنامجين. يمكن اعتبار هذه الدراسة ذات عاملين هما برنامج التدريب ومركز التدريب. فإذا كان أحد هذين البرنامجين أفضل من الآخر في المراكز الثلاثة، فإن الدليل يكون واضحا تماما فيما يتعلق بتأثيرات برنامجي التدريب، لأن المتدربين في كل مركز قد خصصوا عشوائيا إلى البرنامجين.

ومن جهة أخرى، فإن الفروق بين المراكز الثلاثة لا يمكن تفسيرها بالوضوح نفسه لأن مركز التدريب هو عامل تصنيف. ويمكن أن يتفوق أحد المراكز كنتيجة لأي مجموعة من الأسباب، من ذلك مثلا أن المدربين لديه يعملون بشكل أفضل، أو أن لديه إمكانيات أفضل أو بسبب أن المتدربين الذين خصصوا له ينتمون إلى منطقة جغرافية مستوى التعليم فيها أفضل. وقد نحتاج إلى بينة خارجية حول ما إذا كان مستوى التعليم للمتدربين هو نفسه في المراكز الثلاثة، أو كون الإمكانيات المادية متساوية، وما شابه، وذلك قبل الوصول إلى فهم واضح لأسباب الفروق بين مراكز التدريب.

العوامل الكمية والنوعية

في النهاية يلزمنا التفريق بين العوامل الكمية والعوامل النوعية. فالعامل النوعي هو عامل تختلف مستوياته وفقا لصفة نوعية. ومن الأمثلة على هذا نوع الإعلان أو صنف من أصناف مانع للصدأ. وعلى الوجه الآخر، فإن العامل الكمي هو عامل يوصف كل مستوى من مستوياته بقيمة عددية على تدريج أو سلم قياس والأمثلة على هذا قياس حرارة بالدرجة المئوية، أو عمر بالسنوات أو سعر بالدولارات.

المعالجات

في الدراسات وحيدة العامل تقابل المعالجة مستوى العامل. وهكذا يشكل كل إعلان من خمسة أنواع من الإعلانات معالجة. أما في دراسات متعددة العوامل، فإن المعالجة هي تركيبية من مستويات العوامل. وهكذا ففي دراسة لتأثير لون التغليف (أحمر، أزرق) والسعر (\$.25, \$.29) على حجم المبيعات، يعتبر كل تركيبة، مثلا، لون التغليف أحمر والسعر \$.25 يعتبر معالجة. وتحتوي هذه الدراسة بالذات على أربع

معالجات إذ يوجد أربع تركيبات مختلفة من لون التغليف والسعر.

(١٤-٣) تصميم دراسات تحليل التباين

سوف نناقش الآن باختصار بعض الاعتبارات المهمة في تصميم دراسات تحليل التباين وبعض هذه الاعتبارات ملائم، على وجه الخصوص، للدراسات التجريبية، بينما يناسب بعضها الآخر كلا من الدراسات التجريبية ودراسات المشاهدة.

اختيار المعالجات

إن اختيار المعالجات التي تدخل في أي دراسة هو في الأساس مسألة تخص الباحث. ولكن قد يكون من المناسب هنا ايراد بعض التعليقات العامة. ففي أي دراسة علمية ينبغي أن تكون المعالجات قادرة على تقديم شيء من التبصر بالآلية التي تقف خلف الظاهرة المدروسة. وينبغي ألا تحاول الدراسات الأولية تفحص هذه الآليةبتفصيل تام، بل المفضل أن تهدف إلى إيجاد العوامل الأساسية التي تنطوي عليها هذه الدراسة، وتحصل على مؤشرات عن حجم تأثيراتها. ويمكن عندئذ إجراء دراسات لاحقة للحصول على نتائج أكثر تفصيلا.

وحتى لو لم تكن الدراسة ذات اهتمامات علمية وإنما عملية فمن المفضل غالبا إدخال معالجات تزودنا ببعض التفسير للنتائج. إفترض مثلاً أن شركة ما تخطط لشراء نوع جديد من آلات التجهيز من مصنّع جديد، وترغب في مقارنة هذا النوع الجديد مع الآلات الحالية عن طريق إجراء تجربة. ولأن حجم الآلات الجديدة أكبر بكثير من الآلات الحالية، فإن الشركة ترغب في إدخال نوع ثالث من الآلات في التجربة، وهي آلات لها نفس حجم الآلات الحالية ولكنها من المصنّع الجديد. وبهذه الطريقة، فإن الشركة ستحصل على معلومات عما إذا كان يمكن نسبة أية فروقات نلحظها بين الآلات الحالية والآلات الجديدة، إلى المصنّع أو إلى حجم الآلة أو إليهما معا.

تعريف المعالجة . يمكن أن يشكل تعريف المعالجة مسألة صعبة. اعتبر تجربة لدراسة ما إذا كان الفورتران أو الباسكال هي لغة برمجة أفضل للتدريس في مقرر ابتدائي في

الحاسب. بعض المدرسين سيفضلون الفورتران، بينما البعض الآخر سيفضلون الباسكال. فهل ينبغي أن نعرّف المعالجات على أنها لغة البرمجة التي درّسها الموجهون الذين يفضلون تلك اللغة؟ ولو كان الأمر كذلك، فإن الفروقات في النتائج ربما تكون بسبب الفروقات بين مجموعتي الموجهين. هل ينبغي أن لا يتضمن تعريف المعالجة الموجه، فيتم تخصيص الموجهين عشوائيا وبحيث يجبر بعض منهم على تدريس لغة برمجة لا يفضلونها؟ أم هل ينبغي أن تكون رغبة الموجه عاملا آخر بحيث يقوم كل موجه بتدريس كلا اللغتين ؟ إن المشاكل من هذا النوع تحتاج إلى حل متأن بحيث تكون نتائج الدراسة مفيدة.

معالجة حيادية. نحتاج لمعالجة حيادية في بعض التجارب ولكنه ليس في كل التجارب. تتألف المعالجة الحيادية من تطبيق الاجراءات ذاتها على الوحدات التجريبية المستخدمة في المعالجات الأخرى، باستثناء ما يتعلق منها بالتأثيرات تحت الدراسة. فعلى سبيل المثال، في دراسة على أطعمة مضافة يمكن أن تتألف المعالجة من قطعة من نوع من الخضار محتوية على مادة مضافة وتقدم إلى شخص ما في إطار تجربة في معمل. والمعالجة الحيادية هنا يمكن أن تكون قطعة من نوع الخضار نفسه وفي إطار التجربة ذاته فيما عدا أنه لا يضاف للقطعة أية مواد.

وهناك حاجة لاستخدام معالجة حيادية عندما يكون التأثير العام للمعالجات المدروسة غير معروف أو عندما يكون التأثير العام للمعالجات المدروسة معروفا ولكنه غير متسق تحت كل الظروف. ففي مثال الطعام المضاف يفترض أنه من المعلوم أن للإضافة الطعامية A فعّالية عالية في تحسين مذاق الخضار. ويراد معرفة ما إذا كان للإضافات B و C الفعالية نفسها أو ما إذا كانت فعاليتها أفضل، ففي هذه الحالة، يوجد معيار للمقارنة ولا يحتاج إلى معالجة حيادية. وعلى الوجه الآخر، افترض أنه ليس لدينا معلومات عن التأثير العام للمواد المضافة الثلاث وأننا حصلنا على النتائج التالية (درجات التصنيف تتراوح بين 0 و 60):

الإضافة	متوسط درجة التصنيف
A	39
B	37
C	41

افترض أن حجوم العينات كبيرة بحيث يكون متوسط درجات التصنيف دقيقا جدا. فمع غياب معيار للمقارنة، لا يمكن معرفة ما إذا كان كل من المواد المضافة فعالاً أو ما اذا لم يكن أي منها فعالا.

إنه لأمر حاسم أن يتم تطبيق المعالجة الحيادية في ظروف تجريبية مطابقة للمعالجات الأخرى. ففي مثال المواد المضافة للطعام، على سبيل المثال، فإن القيام بمسح للمستهلكين في المنازل بحيث يُطلب من الأشخاص أن يصنفوا المذاق العام للخضار (بدون أي إضافات) تصنيفا كميا يتخذ السلم نفسه المستخدم في التجربة، هذا المسح لا يتمتع بمؤهلات المعالجة الحيادية إذ يمكن لمثل هذا المسح أن يعطي متوسط درجات تصنيف 22، مما يقترح أن المواد الثلاث المضافة تزيد بشكل كبير في مذاق الخضار ولكن هذا الاستنتاج يمكن أن يكون مضللا تماما. فلو أن المعالجة الحيادية أدخلت في التجربة بحيثُ يُعطى للمستهلكين قطع من الخضار بدون إضافات في سياق التجربة القائمة في المعمل، فإن متوسط الدرجات للمعالجة الحيادية يمكن أن يكون 40. وهذه النتيجة ستتضمن أن أيامن المواد المضافة غير فعال في تحسين مذاق الخضار. والسبب وراء ارتفاع متوسط الدرجات في التجربة المعملية يمكن أن يكون بتأثير عوامل شخصية مرتبطة بالإجراءات التجريبية. فربما كان الطعام مقدما في التجربة المعملية أفضل مذاقا منه مقدما في المنزل، أو ربما يكون المستهلكون مجاملين بإعطاء درجات أعلى عندما يشاركون في دراسة تجريبية. وهكذا فإن المعالجة الحيادية المستوعبة ضمن التجربة ، فقط ،يمكن لها أن تخدم كمعيار مناسب للمقارنة.

الوحدة الأساسية للدراسة

قضية مهمة أخرى في كل من الدراسات التجريبية ودراسات المشاهدة هي كيف تُحدد الوحدة الأساسية للدراسة. اعتبر، على سبيل المثال، دراسة تجريبية عن نظامين

من انظمة المكافأة التشجيعية. فهل ينبغي أن تكون وحدة الدراسة مستخدما بمفرده، أم فترة عمل، أم مصنعا؟ وفي الغالب تملي الاعتبارات الفنية اختيار حجم وحدة الدراسة. وعلى سبيل المثال، قد تعوق اعتبارات أخلاقية استخدام أنظمة مكافأة تشجيعية مختلفة في المصنع نفسه.

ويظهر وجه مختلف من أوجه تعريف الوحدة الأساسية للدراسة في مباحث المبيعات وما شابهها من الظواهر. فلنفترض أننا مهتمون بقياس فعالية خمسة أنواع مختلفة من الدعايات التلفازية على المبيعات خلال فترة من الزمن بعد عرضها. فهل ينبغي أن تكون الفترة الزمنية اسبوعا واحدا أو اسبوعين أو شهرا أو فترة زمنية أخرى؟ من الواضح أن أهداف الدراسة هي التي يجب أن تحكم طول الفترة الزمنية والتي تشكل هنا الوحدة الأساسية للدراسة.

اعتبار آخر مهم عند تصميم دراسات تحليل التباين هو كون وحدات الدراسة ممثلة لما يُراد دراسته. اعتبر دراسة عن السلوك الإداري مع شبكات اتصال مختلفة. ونظرا لسهولة الحصول على الطلاب فقد يُغري هذا باحثا جامعيا على استخدام الطلاب كعناصر للدراسة. ولكن لو كانت المعلومات مطلوبة عن السلوك الإداري لرجال أعمال، فإن الطلاب سوف لا يشكلون وحدات تجريبية ممثلة. ولعلنا في غنى عن الحاجة للقول أنه يجب على الباحث أن يبذل قُصارى جهده للحصول على وحدات دراسة ممثلة. والعكس صحيح، فيجب أن نكون حذرين من تعميم نتائج دراسة ما على مجموعات تكون وحدات الدراسة فيها غير ممثلة. وهكذا لو أن دراسة شبكات الإتصال التي ذكرناها آنفا استخدمت الطلاب، فلا ينبغي أن نفترض آليا أن النتائج ستكون مناسبة لرجال أعمال.

(١٤-٤) استخدامات نماذج تحليل التباين

تُستخدم نماذج تحليل التباين في الأساس لتحليل تأثيرات المتغير (المتغيرات) المستقل (المستقلة) قيد الدراسة على المتغير التابع. وعلى وجه التحديد. تستخدم الدراسات وحيدة العامل لمقارنة تأثيرات مستويات مختلفة للعامل وذلك للتعرف على

"أفضل مستوى عامل" وما شابه ذلك. وفي الدراسات متعددة العوامل تستخدم نماذج تحليل التباين لمعرفة ما إذا كانت العوامل المختلفة متفاعلة، ما هي العوامل المهمة، وما هي "أفضل" تركيبات للعوامل، وهكذا سنوضح هذه النقاط بثلاثة أمثلة.

مثال ١

يستخدم مستشفى ما نوعا قياسيا من المداواة لعلاج مشكلة طبية. وقد تم حديثا اقتراح نوعين جديدين للمداواة. ولهذا استُخدم نموذج تحليل التباين لتحديد ما إذا كان أي من النوعين الجديدين للمداواة أفضل من النوع الحالي، وإذا كان الأمر كذلك، فأي منهما هو الأفضل.

مثال ٢

تمت دراسة أربعة أنواع من الآلات وذلك بالنسبة لأقطار الكرات التي تنتجها. والغرض من استخدام نموذج تحليل التباين في هذه الدراسة هو تحديد ما إذا كانت توجد فروق جوهرية بين الآلات. وإذا كان الأمر كذلك فسنحتاج إلى معايرة الآلات.

مثال٣

في دراسة عينة عشوائية من مستخدمي منظمة ما، تم تحليل معدلات المستخدم وفقا للقِدم في الوظيفة، الجنس، الحالة الاجتماعية، ونوع الوظيفة. وتم استخدام نموذج تحليل التباين في هذه الدراسة متعددة العوامل لتحديد ما إذا كانت تأثيرات هذه المتغيرات المستقلة يتفاعل في علاقته الإحصائية بصورة مهمة، وأي من هذه المتغيرات المستقلة يتفوق في علاقته الإحصائية بالمتغير التابع.

(١٤-٥) نموذج تحاين I – مستويات مثبتة للعامل

التمييز بين نموذجي التحاين I و II

سنأخذ بعين الاعتبار نموذجين من نماذج تحليل التباين أحادية العامل وللاختصار سنرمز لهذين بنموذجي **تحاين I و II** . ويُطبق نموذج **التحاين I**، الذي سنتطرق اليه هنا في حالات مثل مقارنة خمسة أنواع مختلفة من الإعلانات أو مقارنة أربعة أنواع من

مانع الصدأ، حيث أن الاستنتاجات تتعلق، فقط ، بمستويات العامل التي تضمنتها الدراسة. بينما يطبق نموذج **التحاين II**، الذي سيُناقش في الفصل السابع عشر، في نوع مختلف من الحالات تُعمم فيها النتائج إلى مجتمع من مستويات العامل وتُعتبر المستويات المدروسة عينة منه. خذ، على سبيل المثال، شركة تملك عدة مئات من محلات بيع التجزئة، في الولايات المتحدة الأمريكية، وقد اختيرت سبعة محلات منها عشوائيا ثمَّ أخذت بعد ذلك عينة من عمال كل من هذه المحلات وتم سؤالهم في مقابلة سرية لتقويم إدارة المحل. تُعتبر المحلات السبعة في هذه الدراسة المستويات السبعة للعامل تحت الدراسة أي محلات بيع التجزئة، وفي هذه الحالة، على أي حال، لا ترغب الإدارة في معرفة نتائج المحلات السبعة، فقط، وإنما تريد تعميم نتائج الدراسة إلى كل المحلات التي تملكها. ومثال آخر لتطبيق نموذج **التحاين II** هو عند الاختيار العشوائي لثلاث آلات من بين خمس وسبعين آلة في مصنع ما. ويتم رصد انتاجها اليومي لمدة عشرة أيام. وتشكل الآلات الثلاث مستويات العامل في هذه الدراسة ولكن الاهتمام هنا لا ينصب ،فقط، على الآلات الثلاث وإنما على آلات المصنع كلها.

وهكذا فإن الفرق الجوهري بين الحالات التي تُطبق فيها نماذج **التحاين I و II** هو أن النموذج I يكون مناسبا عندما يكون اختيار مستويات العامل بسبب الاهتمام الخاص بها (مثلا خمسة أنواع من الإعلان) ولا تعتبر المستويات عينة من مجتمع أكبر من المستويات. بينما يعتبر نموذج **التحاين II** مناسبا عندما تشكل مستويات العامل عينة من مجتمع أكبر (مثلاً ثلاث آلات من خمس وسبعين) والاهتمام ينصب على هذا المجتمع الأكبر.

أفكار أساسية

العناصر الأساسية لنموذج **التحاين I** في الدراسة وحيدة العامل بسيطة تماماً فلكل مستوى من مستويات العامل يوجد توزيع إحتمالي من الإستجابات. وعلى سبيل المثال، في دراسة تأثير أربعة أنواع من الحوافز التشجيعية على إنتاجية المستخدم يوجد توزيع احتمالي من الإنتاجية وذلك لكل نوع من أنواع الحوافز. ويفترض نموذج **التحاين I** ما يلي:

١- تتبع التوزيعات الاحتمالية التوزيع الطبيعي.

٢- لكل توزيع احتمالي التباين (الانحراف المعياري) نفسه.

٣- تعتبر المشاهدات لكل مستوى عامل مشاهدات عشوائية من التوزيع الاحتمالي المقابل وهي مستقلة عن المشاهدات لأي مستوى عامل آخر.

ويوضح الشكل (١٤- ٢) هذه الشروط. لاحظ أن التوزيعات الاحتمالية تتبع التوزيع الطبيعي، وكذلك ثبات تباين هذه التوزيعات. وتختلف هذه التوزيعات الاحتمالية، فقط، في متوسطاتها. ولذلك، فإن الاختلاف في المتوسطات يعكس التأثيرات الجوهرية لمستويات العامل، ولهذا السبب فإن تحليل التباين يركز على متوسط الاستجابة لمستويات العامل المختلفة. وعادة يتم تحليل عينة البيانات من التوزيعات الاحتمالية لمستويات العامل المختلفة علي خطوتين :

١- تحديد ما إذا كانت متوسطات مستويات العامل متساوية أم لا.

٢- وإذا كانت مستويات العامل غير متساوية فحص أوجه الاختلاف وما هي الأمور المترتبة على هذه الاختلافات.

سنتطرق في هذا الفصل إلى الخطوة ١، أي كيفية القيام باختبار لتحديد ما إذا كانت مستويات العامل متساوية أم لا. وسنتطرق في الفصل التالي إلى تحليل تأثيرات مستويات العامل عندما تكون المتوسطات غير متساوية.

نموذج التحاين I ـ نموذج متوسطات الخلايا

نحتاج إلى تطوير بعض الرموز قبل أن نبدأ في سرد نموذج التحاين للدراسات وحيدة العامل. لنرمز ب r لعدد مستويات العامل تحت الدراسة (مثلاً $r = 4$ في مثال أربعة أنواع من الحوافز التشجيعية). وسنرمز لأي من هذه المستويات بالرمز i حيث $(i=1,\ldots, r)$. ونرمز لعدد المشاهدات الخاصة بمستوى العامل بالرمز n_i والعدد الكلي من المشاهدات يُرمز له بالرمز n_T، حيث :

$$n_T = \sum_{i=1}^{r} n_i \qquad (14.1)$$

ويختلف هذا الترميز عما استُخدم سابقا في نماذج الإنحدار حيث يرمز الدليل إلى

مشاهدة أو تكرار.

وسنستخدم في نماذج تحليل التباين الدليل الأخير دائما ليرمز إلى المشاهدة أو المحاولة لأي مستوى عامل معطى أو معالجة. وهنا سنستخدم الرمز الملحق j ليدل على مشاهدة معينة أو محاولة معينة لمستوى عامل بالذات. وبالاضافة إلى ذلك لتكن Y_{ij} رمزا للمشاهدة رقم j للمتغير التابع، أو متغير الاستجابة الخاص بالمستوى i للعامل،فتدل Y_{ij}، على سبيل المثال، على إنتاجية المستخدم رقم j في المصنع رقم i أو حجم المبيعات للمحل j الذي يستخدم النوع i من رفوف العرض. وبما أن n_i يرمز إلى عدد المشاهدات أو المحاولات لمستويات العامل فإن $j = 1, \ldots, n_i$.

ويمكن عرض نموذج التحاين I ، الآن، كما يلي :

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \tag{14.2}$$

حيث:

Y_{ij} قيمة متغير الإستجابة في المحاولة j لمستوى العامل أو المعالجة i.

μ_i هي معالم

ε_{ij} متغيرات مستقلة تتبع $N(0, \sigma^2)$

$i = 1, \ldots r \qquad ; j = 1, \ldots, n_i$

ولأسباب سوف تُفصَّل بعد قليل، فإن هذا النموذج يسمى نموذج متوسطات الخلايا. ويمكن استخدام هذا النموذج لبيانات من دراسات مشاهدة، أو لبيانات من دراسات تجريبية مبنية على تصميم تام التعشية.

مزايا مهمة للنموذج

١- القيمة المُشاهدة لـ Y في المحاولة j لمستوى العامل أو المعالجة i عبارة عن مجموع مركبتين هما : (أ) حدّ ثابت μ_i و (ب) حدّ خطأ عشوائي ε_{ij}.

٢- بما أن $E\{\varepsilon_{ij}\} = 0$ فلدينا:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu_i \tag{14.3}$$

وهكذا، فإن لكل المشاهدات الخاصة بمستوى العامل i التوقع نفسه μ_i.

٣ - بما أن μ_i عدد ثابت فنستنتج من (1.16a) أن:

$$\sigma^2\{Y_{ij}\} = \sigma^2\{\varepsilon_{ij}\} = \sigma^2 \tag{14.4}$$

ولذلك، فإن لكل من المشاهدات التباين نفسه. وذلك بغض النظر عن مستوى العامل.

٤- بما أن كل ε_{ij} يتبع التوزيع الطبيعي، فكذلك كل Y_{ij}. وهذا نـاتج عـن (1.33) لأن Y_{ij} دالة خطية في ε_{ij}.

٥- نفترض أن حدود الخطأ مستقلة. وبالتالي، فليس لحد الخطأ الخاص بأية محاولة تأثير على حد الخطأ لأي محاولة أخرى سواء كانت للمستوى نفسه أو لمستوى آخر من مستويات العامل. وبما أن المتغيرات ε_{ij} مستقلة، فكذلك تكون المشاهدات Y_{ij}.

٦- في ظل هذه المزايا يمكن إعادة عرض نموذج التحاين (14.2) كما يلي:

Y_{ij} مستقلة وتتبع $N(\mu_i, \sigma^2)$ (14.5)

تعليقات

١- يعتبر نموذج التحاين (14.2) نموذجا خطيا، وذلك لأنه يمكن التعبير عنه في صيغة مصفوفية على الشكل (7.18)، أي على الشكل $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$. ونضرب مثالاً على ذلك بدراسة تتضمن $r = 3$ معالجات، حيث أخذنا لكل معالجة مشاهدتين. ولذلك فإن $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ ونعرف $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{X}$ و $\boldsymbol{\beta}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}$ كما يلي:

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{31} \\ Y_{32} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \quad =\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \end{bmatrix} \qquad (14.6)$$

لاحظ بساطة تركيب المصفوفة $\mathbf{X}$ وأن المتجه $\boldsymbol{\beta}$ يحوي المتوسطات μ_i.

وللتحقق من أن هـذه المصفوفات تعطي نموذج التحـاين (14.2)، تَذكّر مـن (7.18a) أن متجه القيم المتوقعة $E\{Y_{ij}\}$ معطى بـ $\mathbf{E}\{\mathbf{Y}\} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$.

وهكذا نحصل على:

$$\mathbf{E}\{\mathbf{Y}\}=\begin{bmatrix}E\{Y_{11}\}\\E\{Y_{12}\}\\E\{Y_{21}\}\\E\{Y_{22}\}\\E\{Y_{31}\}\\E\{Y_{32}\}\end{bmatrix}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\mu_3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_1\\\mu_2\\\mu_2\\\mu_3\\\mu_3\end{bmatrix} \qquad (14.7)$$

وهي تشير بصورة سليمة إلى أن $E\{Y_{ij}\} = \mu_i$. ولهذا فإن نموذج التحاين (14.2) $Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$ في شكل مصفوفي معطى بـ $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}Y_{11}\\Y_{12}\\Y_{21}\\Y_{22}\\Y_{31}\\Y_{32}\end{bmatrix}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_1\\\mu_2\\\mu_2\\\mu_3\\\mu_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{12}\\\varepsilon_{21}\\\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{31}\\\varepsilon_{32}\end{bmatrix} \qquad (14.8)$$

٢ـ ويدعى نموذج التحاين (14.2) نموذج متوسطات الخلايا لأن المتجه $\boldsymbol{\beta}$ يحوي متوسطات "الخلايا " - والخلايا هنا مستويات عامل. وسنناقش في الفقرة (١٤-١٠) نموذج تحاين مكافيء ويسمى نموذج تأثيرات العامل، حيث يحتوي المتجه $\boldsymbol{\beta}$ مركبات من متوسطات مستويات العامل.

مثال

لنفترض أن نموذج التحاين (14.2) صالح للتطبيق في دراسة أنظمة الحوافز التشجيعية المذكورة آنفا وأن قيم المعالم هي كما يلي:

$$\mu_1 = 70 \qquad \mu_2 = 58 \qquad \mu_3 = 90 \qquad \mu_4 = 84 \qquad \sigma = 4$$

ويتضمن الشكل (١٤-٢) تمثيلاً لهذا النموذج. لاحظ أنه وفقا لهذا النموذج تتبع إنتاجية المستخدمين لنظام الحوافز التشجيعية 1 التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_1 = 70$ وانحراف معياري $\sigma = 4$.

إفترض أن الانتاجية المشاهدة للمحاولة j في نظام الحوافز التشجيعية 1 هي

$Y_{1j} = 78$. ففي هذه الحالة تكون قيمة حد الخطأ هي $\varepsilon_{1j} = 8$، وذلك لأن:

$$\varepsilon_{1j} = Y_{1j} - \mu_1 = 78 - 70 = 8$$

ويوضح الشكل (١٤-٢) المشاهدة Y_{1j}. لاحظ أن انحراف Y_{1j} عن المتوسط μ_1 يمثل حد الخطأ ε_{1j} . ويوضح هذا الشكل، أيضا، المشاهدة $Y_{2j} = 51$ وقيمة حد الخطأ فيها هو $\varepsilon_{2j} = -7$

تفسير متوسطات مستويات العامل

بيانات المشاهدة. تدل متوسطات مستويات العامل μ_i في دراسات المشاهدة على متوسطات مجتمعات مستويات العامل المختلفة. وعلى سبيل المثال، في دراسة إنتاجية المستخدمين في كل من فترات العمل الثلاث في مصنع ما، تكون المجتمعات هي إنتاجية المستخدمين لكل فترة عمل. ويكون متوسط المجتمع μ_1 هو متوسط الإنتاجية للمستخدمين في الفترة 1، ويمكن تفسير μ_2 و μ_3 بالطريقة نفسها. ويشير التباين σ^2 إلى تشتت إنتاجية المستخدمين داخل فترة العمل.

البيانات التجريبية. تدل متوسطات مستويات العامل μ_i في الدراسات التجريبية على متوسط الاستجابة الذي كان يمكن الحصول عليه لو أن المعالجة i طُبِّقت علي كل الوحدات في مجتمع الوحدات التجريبية الذي يُراد استقراؤه إحصائيا. وبالمثل ، يشير التباين σ^2 إلى تشتت الاستجابات لو طُبِّقت أي معالجة تجريبية بالذات على مجتمع الوحدات التجريبية بكامله. وعلي سبيل المثال، في تصميم تام التعشية لدراسة تأثير ثلاثة برامج تدريب مختلفة على إنتاجية المستخدم، وشارك فيها تسعون مستخدما تمّ تخصيص ثلثهم عشوائيا لكل من البرامج الثلاثة. ويشير المتوسط μ_1 هنا إلى متوسط الانتاجية لو أن برنامج التدريب 1 أُعطي لكل مستخدم في مجتمع الوحدات التجريبية، ويتم تفسير المتوسطات μ_2 و μ_3 بالطريقة نفسها. ويدل التباين σ^2 على التشتت في الإنتاجية لو أن أيا من برامج التدريب أعطي لكل مستخدم في مجتمع الوحدات التجريبية.

تعليقات

١ـ كما هو الحال في أي نموذج إحصائي ليس من المتوقع أن يتحقق نموذج التحاين I بالضبط في تطبيقات الحياة الواقعية. إلا أنه سيكون، على أي حال، متحققا على وجه التقريب في كثير من الحالات. وكما سنشاهد لاحقا، فإن الطرق الإحصائية المبنية على نموذج التحاين I منيعة بشكل جيد بحيث أنه حتى لو كانت الشروط الحقيقية للحالة موضع الدراسة مختلفة بشكل كبير عن شروط نموذج التحاين I ،فمن الممكن أن يقدّم التحليل الإحصائي تقريبا مناسبا.

٢ـ في بعض الأحيان، تعطى كل المعالجات المدروسة لكل وحدة من وحدات الدراسة. فعلى سبيل المثال، يمكن أن يطلب من شخص ما أن يستخدم معجون الأسنان A لمدة أسبوع ثمّ يعطيه درجة تصنيف وبعد ذلك يطلب منه أن يستخدم معجون الأسنان B وC كل لمدة أسبوع. وفي مثل هذه الحالات، فإن نموذج التحاين I لا يكون مناسبا، وذلك لأن الاستجابات المتعددة للشخص نفسه للمعالجات المختلفة تحت الدراسة ستكون في الغالب مرتبطة. وعلى سبيل المثال، لو أن شخصا ما يفضل بودرة الأسنان على معجون الأسنان، فإن درجة تقويمه لمعاجين الأسنان المختلفة ستكون في الغالب منخفضة. وفي الفصل ٢٨ سنتطرق لنماذج خاصة بهذه الحالة.

(١٤-٦) توفيق نموذج تحاين

المعالم في نموذج التحاين (14.2) غير معروفة عادة، ويجب تقديرها من بيانات العينة. وكما هو الحال في الانحدار، فإننا نستخدم طريقة المربعات الدنيا لتوفيق نموذج تحاين وإيجاد مقدّرات لمعالم النموذج. ولكن، قبل الالتفات إلى هذه المقدرات، سنصف مثالا نستخدمه عبر ما تبقى من هذا الفصل، وسنطور أية رموز إضافية نحتاجها.

مثال

ترغب شركة كنتون للأغذية أن تختبر أربعة أنواع من تصاميم الغلاف وذلك لنوع جديد من حبوب الإفطار. وتم اختيار عشرة محلات لها تقريبا حجم المبيعات نفسه لتكون الوحدات التجريبية. وتم تخصيص أحد التصاميم لكل محل عشوائيا، بحيث أُعطي كل من اثنين من التصاميم لثلاث محلات وأُعطي التصميمان الباقيان كل منهما لمحلين. وفيما عدا تصميم الغلاف، فإن الشروط الأخرى مثل الأسعار ومقدار وموقع الحيز المخصص للعرض، والجهود التشجيعية الخاصة ثُبتت في جمع المحلات في التجربة. وتمّ رصد عدد القطع المباعة في فترة الدراسة ووضعت النتائج في الجدول (١٤-١)أ. ولجعل الحسابات التوضيحية أقل ما يمكن ، أخذنا حجم العينة صغيرا جدا. بينما يجري في التطبيقات الواقعية اختيار حجوم عينات أكبر للحصول على نتائج أقوى وأكثر إحكاما.

وكذلك في التطبيقات من هذا النوع، سيبدو أكثر منطقية في الغالب، تخصيص عدد متساوٍ من المحلات لكل تصميم، إذ كثيرا ما تكون هناك اهتمامات متساوية بكل معالجة من المعالجات وقد استخدمنا حجوم عينات غير متساوية لنوضح الطرق التحليلية في تمام عموميتها.

رموز

يبين جدول (١٤-١)ب العلامات الترميزية لبيانات شركة كنتون للأغذية الموضحة في جدول (١٤-١)أ، وكما أسلفنا من قبل فإن Y_{ij} تمثل مشاهدة في وحدة العينة j لمستوى العامل i، وهنا Y_{ij} تمثل عدد القطع المباعة بواسطة المحل j المخصص إلى تصميم الغلاف i. وعلى سبيل المثال تمثل Y_{11} مبيعات المحل الأول المخصص إلى تصميم الغلاف 1. وفي مثالنا هنا $Y_{11} = 12$ علبة. وبالطريقة نفسها، فإن مبيعات المحل الثاني المخصص إلى تصميم الغلاف 3 هي $Y_{32} = 17$ علبة. ويرمز لمجموع المشاهدات لمستوى i بـ $Y_{i.}$:

$$Y_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \qquad (14.9)$$

جدول (١٤-١) أعداد العلب المباعة في كل محل لكل من التصاميم الأربعة مثال شركة كنتون للأغذية

(أ) بيانات العينة

تصميم غلاف	محل رقم 1	2	3	مجموع	متوسط	عدد المحلات
1	12	18		30	15	2
2	14	12	13	39	13	3
3	19	17	21	57	19	3
4	24	30		54	27	2
جميع التصاميم				180	18	10

(ب) البيانات بالرموز

مستوى عامل i	وحدة عينة (j) 1	2	3	مجموع	متوسط	عدد وحدات العينة
1	Y_{11}	Y_{12}		$Y_{1.}$	$\bar{Y}_{1.}$	n_1
2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	$Y_{2.}$	$\bar{Y}_{2.}$	n_2
3	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	$Y_{3.}$	$\bar{Y}_{3.}$	n_3
4	Y_{41}	Y_{42}		$Y_{4.}$	$\bar{Y}_{4.}$	n_4
جميع مستويات العامل				$Y_{..}$	$\bar{Y}_{..}$	n_T

وهكذا، فإن النقطة $Y_{i.}$ تدل على التجميع فوق الرمز j، وفي مثالنا هنا التجميع فوق كل المحلات المخصصة إلى تصميم الغلاف i. وعلى سبيل المثال وفقا للجدول (١٤-١)أ، فإن كون مجموع المبيعات لجميع المحلات المخصصة إلى تصميم الغلاف 1

هو $Y_1 = 30$ علبة. وبطريقة مشابهة، فإن مجموع المبيعات لجميع المحلات المخصصة إلى تصميم الغلاف 4 هو $Y_4 = 54$ علبة. ويرمز لمتوسط العينة عند مستوى العامل i بالرمز $\overline{Y}_{i.}$:

$$\overline{Y}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}}{n_i} = \frac{Y_{i.}}{n_i} \tag{14.10}$$

وفي مثالنا هنا، فإن متوسط عدد العلب المباعة في المحلات المخصصة لتصميم الغلاف 1 هو $\overline{Y}_1 = \frac{30}{2} = 15$. وهكذا فإن النقطة في الدليل الملحق تشير إلى أن حساب المتوسط كان فوق (المحلات).

ويُرمز للمجموع الكلي للمشاهدات في الدراسة بـ $Y_{..}$:

$$Y_{..} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \tag{14.11}$$

حيث تدل النقطتان على التجميع فوق كل من الدليلين i و j (وفي مثالنا هنا، فوق كل المحلات المخصصة لتصميم ثُمَّ فوق جميع التصاميم).

وأخيرا ، يُرمز للمتوسط الكلي لجميع البيانات بالرمز $\overline{Y}_{..}$:

$$\overline{Y}_{..} = \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij}}{n_r} = \frac{Y_{..}}{n_T} \tag{14.12}$$

حيث تدل النقطتان هنا على أن حساب المتوسط كان فوق كل من i و j. وفي مثالنا هنا، نجد من الجدول ١٤-١ أن $\overline{Y}_{..} = \frac{180}{10} = 18$.

مقدرات المربعات الدنيا

وفقا لمقياس المربعات الدنيا، فإنه يجب جعل مجموع مربعات انحرافات المشاهدات حول قيمها المتوقعة أصغر ما يمكن بالنسبة للمعالم. ولنموذج التحاين (14.2) لدينا من (14.3):

$$E\{Y_{ij}\} = \mu_i$$

وهكذا، فإن الكمية التي يجب جعلها أصغر ما يمكن هي:

$$Q = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \mu_i)^2$$

ويمكن كتابة (14.13) كما يلي:

$$Q = \sum_j (Y_1 - \mu_1)^2 + \sum_j (Y_{2j} - \mu_2)^2 + \ldots + \sum_j (Y_{rj} - \mu_r)^2 \tag{14.13a}$$

لاحظ أن كل معلمة تظهر في واحد، فقط، من مركبات المجاميع في (14.13a). ولذلك يمكن تصغير Q بتصغير كل من هذه المركبات على حدة. ومن المعلوم جيدا أن متوسط العينة يصغّر مجموع مربعات الانحرافات. وهكذا، فإن مقدر المربعات الدنيا لـ μ_i ويُرمز له بالرمز $\hat{\mu}_i$ هو:

$$\hat{\mu}_i = \overline{Y}_{i.} \tag{14.14}$$

وهكذا، فإن القيمة التوفيقية للمشاهدة Y_{ij} وقد رمزنا لها، تماماً كما في نماذج الانحدار، بـ $\hat{Y}_{ij}$ هي هنا ببساطة متوسط العينة لمستوى العامل المقابل :

$$\hat{Y}_{ij} = \overline{Y}_{i.} \tag{14.15}$$

مثال : في مثال شركة كنتون للأغذية، تكون تقديرات المربعات الدنيا لمعالم النموذج، وفقا للجدول (١٤-١) كما يلي:

معلمة	تقدر المربعات الدنيا
μ_1	$\hat{\mu}_1 = \overline{Y}_{1.} = 15$
μ_2	$\hat{\mu}_2 = \overline{Y}_{2.} = 13$
μ_3	$\hat{\mu}_3 = \overline{Y}_{3.} = 19$
μ_4	$\hat{\mu}_4 = \overline{Y}_{4.} = 27$

وهكذا، نقدِّر متوسط مبيعات المحل الواحد في حالة تصميم الغلاف 1 بـ 15 علبة وذلك بالنسبة لمجتمع المحلات المدروسة والقيمتان التوفيقيتان للمشاهدتين الخاصتين بتصميم الغلاف 1 ، هما $\hat{Y}_{11} = \hat{Y}_{12} = \hat{Y}_{1.} = 15$. وبصورة مشابهة، نقدر متوسط مبيعات المحل في حالة تصميم الغلاف 2 بـ 13 علبة للمحل الواحد. والقيم التوفيقية للمشاهدات الثلاث لتصميم الغلاف هذا، هي $\hat{Y}_{2j} = \overline{Y}_{2.} = 3$

تعليقات

١- إن مقدرات المربعات الدنيا في (14.14) هي، أيضا، مقدَّرات الإمكانية العظمى نفسها لنموذج تباين الخطأ الطبيعي (14.2). وتبعا لذلك، فإنها تمتلك كافة الخصائص المرغوبة لمقدرات الإنحدار المذكورة في الفصل الثاني. وعلى سبيل المثال، فهي مقدرات غير منحازة ذات تباين أصغري.

٢- لاستنباط مقدّر المربعات الدنيا لـ μ_i نحتاج إلى تصغير المركبة i لمجموع المربعات في (14.13a) بالنسبة لـ μ_i :

$$Q_i = \sum_j (Y_{ij} - \mu_i) \qquad (14.16)$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ μ_i نحصل على:

$$\frac{dQ_i}{d\mu_i} = \sum_j 2(Y_{ij} - \mu_i)$$

وعند مساواة هذه المشتقة بالصفر واستبدال المعلمة μ_i بمقدّر المربعات الدنيا، $\hat{\mu}_i$ نجد النتيجة في (14.14):

$$-2\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \hat{\mu}_i) = 0$$

$$\sum_j Y_{ij} = n_i \hat{\mu}_i$$

$$\hat{\mu}_i = \overline{Y}_{i.}$$

الرواسب

الرواسب مفيدة للغاية لتفحّص مصداقية نماذج التحاين. ويتم تعريفها، تماما كما فعلنا في نماذج الانحدار، بالفرق بين القيمتين الملحوظة والتوفيقية:

$$e_{ij} = Y_{ij} - \hat{Y}_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y}_{i.} \qquad (14.17)$$

وهكذا، فإن الراسب يمثل هنا انحراف قيمة ملحوظة عن تقدير متوسط مستوى العامل الموافق.

مثال. يوضح جدول (١٤-٢) الرواسب لمثال شركة كنتون للأغذية. فعلى سبيل المثال نجد من جدول (١٤-١) مايلي:

$$e_{11} = Y_{11} - \overline{Y}_{1.} = 12 - 15 = -3$$

$$e_{21} = Y_{21} - \overline{Y}_{2.} = 14\ 13 = +1$$

ولاحظ من جدول (١٤-٢) أن مجموع الرواسب يساوي الصفر وذلك لكل مستوى عامل. وهذا يوضح خاصية مهمة من خواص الرواسب لنموذج التحاين (14.2) وهي أن مجموعها يساوي الصفر لكل مستوى عامل i:

$$\sum_j e_{ij} = 0 \qquad i = 1,\dots, r \qquad (14.18)$$

جدول (١٤-٢) الرواسب في مثال شركة كنتون للأغذية

تصميم غلاف	محل (j)			
i	1	2	3	مجموع
1	-3	+3		0
2	+1	-1	0	0
3	0	-2	+2	0
4	-3	+3		0
				0
جميع التصاميم				0

وسنشرح استخدام الرواسب لفحص مصداقية نموذج تحاين في الفصل السادس عشر.

(١٤-٧) تحليل التباين

وكما يقسم تحليل التباين لنموذج الانحدار مجموع المربعات الكلي إلى مجموع مربعات الانحدار ومجموع مربعات الخطأ فيها، فهناك تقسيم مقابل في حالة نموذج التحاين (14.2).

تجزئة *SSTO*

يقاس التشتت الإجمالي للمشاهدات Y_{ij}، مع عدم استخدام أية معلومات عن مستويات العامل، بدلالة انحراف كل مشاهدة Y_{ij} عن المتوسط الإجمالي $\bar{Y}_{..}$:

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{..} \qquad (14.19)$$

وعند الاستفادة من المعلومات حول مستويات العامل ، فإن الانحرافات التي تعكس ما بقي من الريبة في البيانات هي انحرافات كل مشاهدة Y_{ij} عن المتوسط المقدّر لمستوى العامل المقابل $\bar{Y}_{i.}$:

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{1.} \qquad (14.20)$$

والفرق بين الانحرافات في (14.19) و(14.20) يعكس الفرق بين المتوسط المقدّر لمستوى العامل والمتوسط الاجمالي:

$$(Y_{ij}-\overline{Y}_{..})-(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.})=\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..} \qquad (14.21)$$

لاحظ من (14.21) أنه يمكن تفكيك الانحراف الكلي $Y_{ij}-\overline{Y}_{..}$ إلى مركبتين:

$$\underbrace{Y_{ij}-\overline{Y}_{..}} = \underbrace{\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..}} + \underbrace{Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}} \qquad (14.22)$$

انحراف كلي	انحراف المتوسط المقدر لمستوى عامل عن المتوسط المقدر	الانحراف عن المتوسط المقدر لمستوى عامل

وهكذا، فإنه يمكن النظر إلى الانحراف الكلي على أنه مجموع مركبتين:

١- انحراف المتوسط المقدر لمستوى العامل حول المتوسط الإجمالي.

٢- انحراف Y_{ij} حول المتوسط المقدر لمستوى العامل. ووفقا لـ (14.17) فان هـذا الانحـراف هو، ببساطة، الراسب e_{ij}.

ويوضح الشكل (١٤-٣) هذا التفكيك لمثال شركة كنتون للأغذية. وعندما نربع (14.22) ومن ثَمَّ نجمع تسقط الحدود الجدائية في الطرف الأيمن لنجد:

$$\sum_i\sum_j(Y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2+\sum_i n_i(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2+\sum_i\sum_j(\overline{Y}_{ij.}-\overline{Y}_{i.})^2 \qquad (14.23)$$

ويقيس الحد من الطرف الأيسر التشتت الكلي للمشاهدات ويرمـز لـه، كمـا في حالة الإنحدار، بـ الرمز $SSTO$ وهو يعني مجموع المربعات الكلي :

$$SSTO=\sum_i\sum_j(Y_{ij}-\overline{Y}_{..})^2 \qquad (14.24)$$

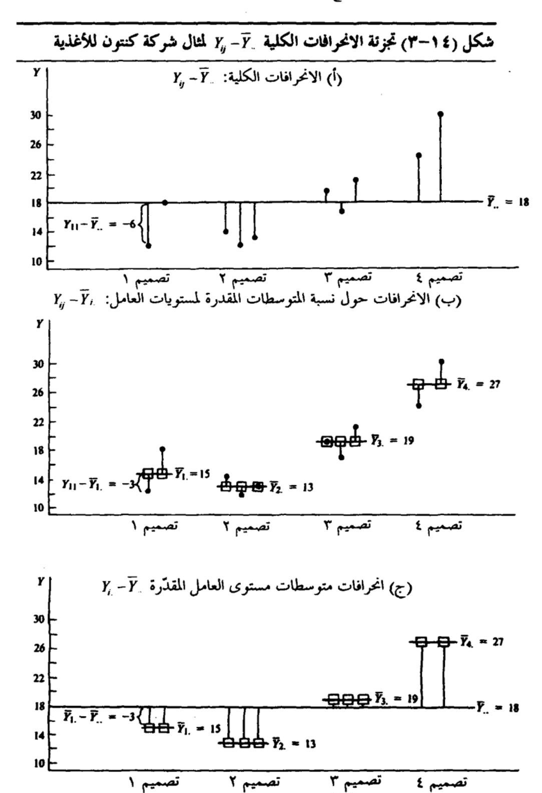
وسنرمز للحد الأول من الطـرف الأيمـن مـن (14.23) بـالرمز $SSTR$ وهـو يعـني مجموع مربعات المعالجات:

$$SSTR=\sum_i n_i(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2 \qquad (14.25)$$

أما الحد الثاني في الطرف الأيمن من (14.23) فسنرمز له بـالرمز SSE وهـو يعـني مجموع مربعات الخطأ:

$$SSE=\sum_i\sum_j(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.})^2=\sum\sum e_{ij}^2 \qquad (16.26)$$

شكل (١٤-٣) تجزئة الانحرافات الكلية $Y_{ij} - \bar{Y}_{..}$ لمثال شركة كنتون للأغذية



وهكذا، فإنه يمكن كتابة (14.23) بالصورة المكافئة:

$$SSTO = SSTR + SSE \tag{14.27}$$

ويتضح بسهولة هنا التقابل بين هذا التفكيك وتفكيك الانحدار في (3.48a). وهكذا يتألف مجموع المربعات الكلي لنموذج تحليل التباين من هاتين المركبتين :

١ ـ SSE وهو قياس للتغير العشوائي للبيانات حول المتوسطات لمستويات العامل المقابلة. فكلما قل التشتت بين المشاهدات عند كل مستوى عامل ، كلما صغر SSE. وإذا كان $SSE = 0$ فهذا يعني أن المشاهدات عند كل مستوى عامل متساوية ويصحّ هذا لمستويات العامل كافة. وكلما اختلفت المشاهدات بعضها عن بعض عند كل مستوى عامل كلما كان SSE أكبر.

٢ـ $SSTR$ وهو قياس لمقدار الفروق بين متوسطات مستويات العامل المقدرة ويبنى على انحرافات متوسطات مستويات العامل المقدَّرة $\bar{Y}_{i.}$ عن المتوسط الاجمالي $\bar{Y}_{..}$. وعندما تكون متوسطات مستويات العامل المقدرة $\bar{Y}_{i.}$ متساوية، فإن $SSTR = 0$. والمزيد من الاختلاف بين متوسطات مستويات العامل المقدرة سيجعل $SSTR$ أكبر.

تعليقات

١ - لإثبات (14.23)، نبدأ باعتبار (14.22):

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{..} = (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}) + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})$$

وبتربيع الطرفين نحصل على:

$$(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 = (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + 2(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})$$

ولو قمنا بالتجميع فوق كل مشاهدات العينة في الدراسة (أي فوق كل من i و j)، نحصل على:

$$\sum_i \sum_j (Y_i - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 + \sum_i \sum_j 2(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}) \tag{14.28}$$

ويساوي الحد الأول في الطرف الأيمن من (14.28):

$$\sum_i \sum_j (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum_i n_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \tag{14.29}$$

وبما أن الحد $(Y_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$ يبقى ثابتا عند الجمع فوق j، فإننا نحصل من الجمع فوق j

على n_i حدا.

ويكون الحد الثالث في الطرف الأيمن من (14.28) مساويا للصفر:

$$\sum_i \sum_j 2(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}) = 2\sum_i (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})\sum_j (\overline{Y}_{ij} - \overline{Y}_{i.}) = 0 \qquad (14.30)$$

ذلك لأن $\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}$ يبقى ثابتا عند الجمع فوق j وبالتالي يمكن إخراجه خارج إشارة المجموع فوق j. وبالاضافة إلى ذلك، فإن $\sum_j (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}) = 0$ باعتبار أن المجموع الجبري للانحرافات حول المتوسط الحسابي يساوي الصفر. وهكذا تختزل (14.28) إلى (14.23).

٢- توزن مربعات انحرافات متوسطات مستويات العامل المقدرة $(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2$ في $SSTR$ من (14.25) بعدد المشاهدات n_i عند ذلك المستوى للعامل. وسبب ذلك، كما يوضح الشكل (١٤-٣)ج، أن مركبة الانحراف $\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}$ تبقى نفسها لكل مشاهدة عند المستوى i للعامل.

صيغ حسابية. لأغراض الحساب اليدوي فإن المعادلات التي ذكرناهامن قبل لحساب $SSTO$ و $SSTR$ و SSE لن تكون سهلة الاستعمال. بينما المعادلات التالية ستكون مفيدة وسهلة الحساب يدويا وهي في الوقت نفسه مكافئة جبريا للمعادلات السابقة:

$$SSTO = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \sum_i \frac{Y_{..}^2}{n_T} \qquad (14.31a)$$

$$SSTR = \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{n_i} - \frac{Y_{..}^2}{n_T} \qquad (14.31b)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{n_i} \qquad (14.31c)$$

مثال. باستخدام الصيغ الحسابية في (14.31) يمكن الحصول على تفكيك تحليل التباين لمجموع المربعات الكلي في مثال شركة كنتون للأغذية الجدول (١٤-١)أ كالتالي:

$$SSTO = (12)^2 + (18)^2 + (14)^2 + \ldots + (30)^2 - \frac{(180)^2}{10} = 3{,}544 - 3{,}240 = 304$$

$$SSTR = \frac{(30)^2}{2} + \frac{(39)^2}{3} + \frac{(57)^2}{3} + \frac{(54)^2}{2} - \frac{(180)^2}{10 - 3.240} = 3{,}498 - 3{,}240 = 258$$

$SSE = 3{,}544 - 3{,}498 = 46$

وهكذا، فإن تفكيك $SSTO$ هو :

$$304 = 258 + 46$$
$$SSTO = SSTR + SSE$$

لاحظ أن كثيرا من التغير الكلـي في المشـاهدات مقـترن بالتغير بـين متوسـطات مستويات العامل المقدرة.

تفكيك درجات الحرية

وفقا لتفكيك مجموع المربعات الكلي، فإنه يمكننا، أيضا، الحصول على تفكيـك لدرجات الحرية المصاحبة.

يقترن بـ $SSTO$ عدد من درجات الحرية يساوي $n_T - 1$ حيث يوجـد في الإجمـال n_T من الانحرافات $\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{..}$، ولكن تُفقـد درجـة حريـة واحـدة لأن الانحرافـات غـير مستقلة بمعنى أن مجموعها لابد أن يساوي الصفر أي $\Sigma\Sigma(\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{..})=0$.

وعدد درجات الحرية المصاحبة لـ $SSTR$ هـو $r - 1$ ، فهنـاك r مـن انحرافـات متوسطات مستويات العامل المقدرة $\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}$ ولكـن تُفقـد درجـة حريـة واحـدة لأن الانحرافات غير مستقلة، بمعنـى أن المجمـوع المـوزون يجـب أن يسـاوي الصفـر، أي أن $\Sigma n_i(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})=0$.

وعدد درجات الحرية المصاحبة لـ SSE هو $n_T - r$. ويمكن ملاحظة هـذا مباشـرة بالنظر إلى مركبة SSE الموافقة للمستوى i من مستويات العامل:

$$\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2 \qquad (14.32)$$

تكافىء العبارة في (14.32) مجموع المربعات الكلـي معتـبرين فقـط المسـتوى i للعـامل. وبالتالي فإنه يوجد $n_i - 1$ من درجات الحرية المصاحبة لمجموع المربعـات هـذا. وبمـا أن SSE يتكـون مـن مجمـوع مركبـات مجـاميع كتلـك الموجـودة في(14.32) ،فـان عـــدد درجات الحرية المصاحبة لـ SSE هو درجات الحرية للمركبات :

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_r - 1) = n_T - r \qquad (14.33)$$

مثال. نجد في مثال شركة كنتون للأغذية حيث $n_T = 10$ و $r = 4$، فإن عدد درجـات الحرية المصاحبة لمجاميع المربعات الثلاثة هي:

df	SS
$10 - 1 = 9$	$SSTO$
$4 - 1 = 3$	$SSTR$
$10 - 4 = 6$	SSE

لاحظ أن درجات الحرية تجميعية مثلها في ذلك مثل مجاميع المربعات تماما:

$$9 = 3 + 6$$

متوسطات المربعات

يمكن الحصول على متوسط المربعات، كما هو المعتاد، بقسمة كل مجموع مربعات على عدد درجات الحرية المقترنة به. ولذلك نحصل على:

$$MSTR = \frac{SSTR}{r-1} \qquad (14.34a)$$

$$MSE = \frac{SSE}{n_T - 1} \qquad (14.34b)$$

ويدل $MSTR$ هنا على متوسط مربعات المعالجات، ويرمز MSE، كما سبق، لمتوسط مربعات الخطأ.

مثال. في مثال شركة كنتون للأغذية نحصل من النتائج السابقة، على:

$$MSTR = \frac{258}{3} = 86$$

$$MSE = \frac{46}{6} = 7.67$$

لاحظ أن حاصل جمع متوسطي المربعات لا يساوي = $SSTO \ / \ (n_T - 1) \ = \ 340/9$ 33.8.ولذلك فإن متوسطات المربعات هنا، وكما هو الحال في الانحدار ليست تجميعية.

جدول تحليل التباين

يمكن وضع مركبات المجموع الكلي للمربعات وعدد درجات الحرية المقابلة لها بالاضافة إلى متوسطات المربعات الناتجة عنها في جدول نسميه جدول تحاين (ANOVA) كالجدول (١٤-٣).

جدول التحاين لمثال شركة كنتون للأغذية مقدم من الجدول (١٤-٤).

جدول (١٤–٣) جدول تحاي لدراسة وحيدة العامل

مصدر التغير	SS	df	MS	E{MS}
بين المعالجات	$SSTR=\sum n_i(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2$	$r-1$	$MSTR=\frac{SSTR}{r-1}$	$\sigma^2+\frac{1}{r-1}\sum n_i(\mu_i-\mu.)^2$
الخطأ (ضمن المعالجات)	$SSE=\sum\sum(\bar{Y}_{ij}-\bar{Y}_{i.})^2$	n_T-r	$MSE=\frac{SSE}{n_T-r}$	σ^2
المجموع الكلي	$SSTO=\sum\sum(\bar{Y}_{ij}-\bar{Y}_{..})^2$	n_T-1		

جدول (١٤–٤) جدول تحاين لمثال شركة كنتون للأغذية

مصدر التغير	SS	df	MS
بين التصاميم	258	3	86
الخطأ	46	6	7.67
المجموع الكلي	304	9	

توقع متوسط المربعات

يمكن إثبات أن القيم المتوقعة لـ MSE و MSTR هي كما يلي:

$$E\{MSE\}=\sigma^2 \qquad (14.35a)$$

$$E\{MSTR\}=\sigma^2+\frac{\Sigma n_i(\mu_i-\mu.)^2}{r-1} \qquad (14.35b)$$

حيث:

$$\mu.=\frac{\Sigma n_i\mu_i}{n_T} \qquad (14.35c)$$

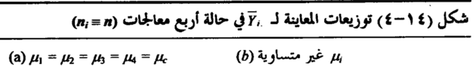
هذه القيم المتوقعة موضحة في العمود $E\{MS\}$ من الجدول (١٤-٣). وتوجد خاصيتان مهمتان من خواص توقع متوسط المربعات تستحقان الانتباه هما:

١- يُعتبر MSE مقدرا غير منحاز لتباين حدود الخطأ ε_{ij} سواء كانت متوسطات مستويات العامل μ_i متساوية أم لا. وهذا في الحقيقة أمر منطقي بداهة لأن تشتت المشاهدات داخل كل مستوى عامل لا يتأثر بمقادير متوسطات العامل المقدَّرة للمجتمعات الطبيعية.

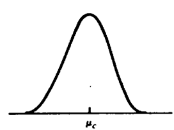
٢- عندما تكون كل متوسطات مستويات العامل μ_i متساوية وبالتالي مساوية للمتوسط المرجح $\mu.$ فعندئذ يكون $E\{MSTR\} = \sigma^2$ ، ذلك لأن الحد الثاني في الطرف الأيمن من (14.35b) يصبح صفرا. ولذلك فإن كلا من $MSTR$ وMSE يقدران تباين الخطأ σ^2 عندما تكون متوسطات مستويات العامل μ_i كلها متساوية. ولكن عندما تكون متوسطات مستويات العامل غير متساوية، فإن $MSTR$ تنحو في المتوسط إلى أن تكون أكبر من MSE، ذلك لأن الحد الثاني من (14.35b) سيكون عندئذ موجبا. وهذا أمر منطقي بالبداهة كما هو موضح في الشكل (١٤-٤) في حالة أربع معالجات. وتفترض الحالة التي يصورها هذا الشكل أن حجوم العينات متساوية، أي أن $n_i \equiv n$.

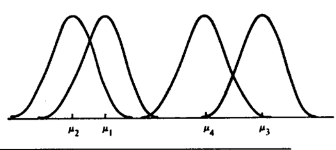
وعندما تكون كل المتوسطات μ_i متساوية، فإن الـ $\bar{Y}_{i.}$ جميعها ستتبع توزيع المعاينة نفسه بمتوسط مشترك $\mu.$ وتباين σ^2/n، وهذا مصور في الشكل (١٤-٤)أ. ومن جهة أخرى، إذا لم تكن المتوسطات μ_i متساوية، فإن الـ $\bar{Y}_{i.}$ ستتبع توزيعات معاينة مختلفة لكل منها التباين نفسه σ^2/n ولكن لها متوسطات مختلفة μ_i ، ويوضح الشكل (١٤-٤)ب إحدى هذه الإمكانات. وبالتالي، فإن $\bar{Y}_{i.}$ ستنحو إلى الاختلاف بعضها عن بعض عندما تكون μ_i مختلفة أكثر من إختلافها لو كانت μ_i متساوية، وبالتالي فإن $MSTR$ ستنحو إلى أن تكون، في حالة عدم تساوي متوسطات العامل، أكبر مما هي في حالة التساوي. وسيستفاد من هذه الخاصية لـ $MSTR$ لإنشاء اختبار إحصائي، نناقشه في الفقرة القادمة، وذلك ما إذا كانت متوسطات العامل μ_i متساوية

أم لا. فعندما يكون كل من MSTR و MSE من المرتبة نفسها في مقداريهما، فسيؤخذ هذا كدليل على أن متوسطات مستويات العامل μ_i متســاوية. وعندمـا يكـون MSTR أكبر بكثير من MSE ، فسيؤخذ هذا كدليل على أن μ_i غير متساوية.



شكل (٤-١٤) توزيعات المعاينة لـ $\overline{Y}_{i.}$ في حالة أربع معالجات ($n_i \equiv n$)





تعليقات

١- لإيجاد القيمة المتوقعة لـ MSE، نلاحظ أولاً أنه يمكن كتابة MSE على الشكل التالي:

$$MSE = \frac{1}{n_T - r} \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2 \tag{14.36}$$

$$= \frac{1}{n_T - r} \sum_i \left[(n_i - 1) \frac{\sum_j (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2}{n_i - 1} \right]$$

لنرمز الآن لتباين العينة المعتاد للمشاهدات الخاصة بالمستوى i للعامل بالرمز s_i^2 :

$$s_i^2 = \frac{\sum_j (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2}{n_i - 1} \tag{14.37}$$

فيمكن عندئذ كتابة (14.36) كما يلي:

$$MSE = \frac{1}{n_T - 1} \Sigma (n_i - 1) s_i^2 \tag{14.38}$$

وبما أنه من المعلوم جيدا أن تباين العينة (14.37) مقدّر غير منحاز لتباين المجتمع، وهو في حالتنا σ^2 ، وذلك من أجل جميع مستويات العامل، فلدينا:

$$E\{MSE\} = \frac{1}{n_T - r}\sum_i (n_i - 1)s_i^2$$
$$= \frac{1}{n_T - r}\sum_i (n_i - 1)\sigma^2$$
$$= \sigma^2$$

٢ـ سنستنبط القيمة المتوقعة لـ $MSTR$ في الحالة الخاصة التي تكون فيها حجوم العينات n_i متساوية أي أن $n_i \equiv n$. وعندئذ تصبح النتيجة العامة في (14.35b) لهـذه الحالـة الخاصة كالتالي :

$$E\{MSTR\} = \sigma^2 + \frac{n\sum(\mu_i - \mu.)^2}{r-1} \quad \text{حيث } n_i \equiv n \qquad (14.39)$$

بالإضافة إلى ذلك، عندما تكون حجوم العينات لكل مستويات العـامل تسـاوي n ، فإن $MSTR$ وكما هي معرَّفة في (14.25) و (14.34a)، تصبح:

$$MSTR = \frac{n\sum(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2}{r-1} \quad \text{حيث } n_i \equiv n \qquad (14.40)$$

ولاستنباط (14.39) اعتبر صياغة النموذج في (14.2) لـ Y_{ij}:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

وبأخذ المتوسط لـ Y_{ij} فوق المستوى i للعامل، نحصل على:

$$\overline{Y}_{i.} = \mu. + \overline{\varepsilon}_{i.} \qquad (14.41)$$

حيث $\overline{\varepsilon}_{i.}$ هو متوسط الـ ε_{ij} الخاص بالمستوى i للعامل :

$$\overline{\varepsilon}_{i.} = \frac{\sum_j \varepsilon_{ij}}{n} \qquad (14.42)$$

وبأخذ المتوسط لـ Y_{ij} فوق كل مستويات العامل، نحصل على:

$$\overline{Y}_{..} = \mu. + \overline{\varepsilon}_{..} \qquad (14.43)$$

حيث تصبح $\mu.$ المعرفة في (14.35c)، كالتالي في حالة $n_i \equiv n$:

$$\mu. = \frac{n\sum \mu_i}{nr} = \frac{\sum \mu_i}{r} \quad \text{عندما } n_i = n \qquad (14.44)$$

و $\overline{\varepsilon}_{..}$ هو متوسط كل الـ ε_{ij} :

$$\overline{\varepsilon}_{i.} = \frac{\sum\sum \varepsilon_{ij}}{nr} \qquad (14.45)$$

وبما أن كل حجوم العينات متساوية فلدينا ،أيضا:

$$\bar{Y}_{..} = \frac{\sum \bar{Y}_{i.}}{r} \qquad \bar{\varepsilon}_{..} = \frac{\sum \bar{\varepsilon}_{i.}}{nr} \tag{14.46}$$

وباستخدام (14.41) و (14.43) نحصل على:

$$\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..} = (\mu_i + \bar{\varepsilon}_{i.}) - (\mu_. + \bar{\varepsilon}_{..}) = (\mu_i - \mu_.) + (\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..}) \tag{14.47}$$

ولو قمنا بتربيع $\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}$ وجمعنا فوق مستويات العامل فسنحصل على:

$$\sum(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 = \sum(\mu_i - \mu_.)^2 + \sum(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2 + 2\sum(\mu_i - \mu_.)(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..}) \tag{14.48}$$

ونرغب الآن في إيجاد $E\{\sum(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2\}$ وبالتالي نحتاج إلى إيجاد القيمة المتوقعة لكل حد في الطرف الأيمن من (14.48):

أ ـ بما أن $\sum(\mu_i - \mu_.)^2$ قيمة ثابتة فإن توقعها هو:

$$E\left\{\sum(\mu_i - \mu_.)^2\right\} = \sum(\mu_i - \mu_.)^2 \tag{14.49}$$

ب ـ قبل إيجاد القيمة المتوقعة للحد الثاني في الطرف الأيمن لنعتبر أولاً العبارة :

$$\frac{\sum(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2}{r-1}$$

وهذا هو تباين العينة الاعتيادي ، حيث $\bar{\varepsilon}_{..}$ هو متوسط الـ r حدا $\bar{\varepsilon}_{i.}$ وفقا لـ(14.46) ونعرف بالإضافة إلى ذلك أن تباين العينة مقدّر غير منحاز لتباين المتغير حيث المتغير في حالتنا هذه هو $\bar{\varepsilon}_{i.}$. ولكن من (14.42) ، فإن $\bar{\varepsilon}_{i.}$ ليس إلا متوسط n حدا من حدود الخطأ المستقلة ε_{ij} وهكذا نجد :

$$\sigma^2\{\bar{\varepsilon}_{i.}\} = \frac{\sigma^2\{\varepsilon_{ij}\}}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

ولذلك فإن:

$$E\left\{\frac{\sum(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2}{r-1}\right\} = \frac{\sigma^2}{n}$$

وبالتالي:

$$E\left\{\sum(\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})^2\right\} = \frac{(r-1)\sigma^2}{n} \tag{14.50}$$

جـ ـ بما أن كلا من $\bar{\varepsilon}_{i.}$ و $\bar{\varepsilon}_{..}$ متوسطان لحدود ε_{ij} توقع كل منهما يساوي الصفر

فإن:

$$E\{\bar{\varepsilon}_{i.}\}=0 \qquad E\{\bar{\varepsilon}_{..}\}=0$$

ولذلك يكون:

$$E\{2\sum(\mu_i-\mu_.)(\bar{\varepsilon}_{i.}-\bar{\varepsilon}_{..})\}=2\sum(\mu_i-\mu_.)E\{\bar{\varepsilon}_{i.}-\bar{\varepsilon}_{..}\}=0 \qquad (14.51)$$

ونكون بذلك قد بينا بوساطة (14.49) و(14.50) و (14.51) أن :

$$E\left\{\sum(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2\right\}=\sum(\mu_i-\mu_.)^2+\frac{(r-1)\sigma^2}{n}$$

وبذلك نحصل فورا على (14.39):

$$E\{MSTR\}=E\left\{\frac{n\sum(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2}{r-1}\right\}=\frac{n}{r-1}\left[\sum(\mu_i-\mu_.)^2+\frac{(r-1)\sigma^2}{n}\right]$$

$$=\sigma^2+\frac{n\sum(\mu_i-\mu_.)^2}{r-1}$$

(١٤–٨) إختبار F لتساوي متوسطات مستويات عامل

إنه أمر اعتيادي أن نبدأ التحليل في الدراسة وحيدة العامل بتحديد ما إذا كانت متوسطات مستويات العامل μ_i متساوية أم لا. فعلى سبيل المثال، في مثال شركة كنتون للأغذية لو أن تصاميم الغلاف الأربعة أدت إلى حجوم المبيعات نفسها، فلن تكون هناك حاجة لمزيد من التحليل، مثل تحديد أي تصميم هو الأفضل أو ما هو الفرق بين تصميمين معينين في تشجيع المبيعات.

وهكذا فإن النتائج التي نود أن نعتبرها هي:

$$H_0: \mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_r \qquad (14.52)$$

H_a: ليست المتوسطات جميعها متساوية

إحصاءة الاختبار

إحصاءة الاختبار التي ستُستخدم في الاختيار بين البدائل في (14.52) هي:

$$F^*=\frac{MSTR}{MSE} \qquad (14.53)$$

لاحظ أن $MSTR$ تلعب هنا دور MSR في نموذج الانحدار.

وكما شاهدنا من (14.35) ، فإن $MSTR$ ستتجه لأن تكون أكبر من MSE

عندما تكون H_a صحيحة وبالتالي فإن القيم الكبيرة لـ F^* ستدعم H_a . بينما قيم F^* القريبة من 1 ستدعم H_0 ، وذلك لأن لكل من $MSTR$ و MSE القيمة المتوقعة نفسها عندما تكون H_0 صحيحة. ولذلك فإن الاختبار المناسب هنا هو اختبار الذيل الأعلى.

توزيع F^*

عندما تتساوى كل متوسطات المعالجات μ_i فإن لكل مشاهدة Y_{ij} القيمة المتوقعة نفسها. وعلى ضوء الخاصية التجميعية لمجموع المربعات ولدرجات الحرية، فإنه يمكن تطبيق نظرية كوكران (3.60):

عندما تكون H_0 صحيحة فإن $\frac{SSE}{\sigma^2}$ و $\frac{SSTR}{\sigma^2}$ متغيران مستقلان ويتبع كل منهما التوزيع χ^2 .

ونستنتج بالأسلوب ذاته كما في حالة الانحدار ما يلي:

إذا كانت H_0 صحيحة، فإن F^* تتبع توزيع $F(r-1, n_T-r)$

وإذا كانت H_a صحيحة، أي عندما لا تكون كل الـ μ_i متساوية، فإن F^* لا تتبع توزيع F . ولكنها ستتبع توزيعا أكثر تعقيدا يدعى توزيع F غير المركزي. وسنستفيد من توزيع F غير المركزي عندما نناقش قوة إختبار F في الفصل السابع عشر.

ملاحظة

يكون كل من STR و SSE مستقلين حتى لو لم تكن كل الـ μ_i متساوية ويمكن ملاحظة ذلك بسبب أن SSE يعكس التشتت داخل عينات مستويات العامل وعندما تكون حدود الخطأ موزعة طبيعيا، فإن هذا التشتت داخل مستويات العامل لا يتأثر بمقدار متوسطات مستويات العامل المقدرة. بينما يعتمد $SSTR$، من جهة أخرى، بالكامل على متوسطات مستويات العامل المقدرة $\overline{Y}_i$.

إنشاء قاعدة قرار

عند إنشاء قاعدة قرار يتم التحكم عادة في مخاطرة التورط بخطأ من النوع I. ويقدم هذا حماية ضد القيام بأية تحليلات إضافية لتأثيرات العوامل ، بينما لاتوجد في الحقيقة فروق بين متوسطات مستويات العوامل. ويمكن، أيضا، التحكم في الخطأ من النوع II، كما سنرى لاحقا، عن طريق تحديد حجم العينة.

وبما أننا نعرف أن F^* تتبع التوزيع $F(r-1, n_T-r)$ عندما تكون H_0 صحيحة، وأن القيم الكبيرة لـ F^* تقود إلى استنتاج أن H_a صحيحة، فإن قاعدة القرار المناسبة للتحكم في مستوى المعنوية عند α هو:

(14.54)

إستنتج H_0 إذاكان $F^* \leq F(1-\alpha; r-1, n_T-r)$

إستنتج H_a إذا كان $F^* > F(1-\alpha; r-1, n_T-r)$ (14.54)

حيث $F(1-\alpha;\ r-1, n_T-r)$ هو المئين لتوزيع F المناسب.

مثال

في مثال شركة كنتون للأغذية، نرغب في اختبار ما إذا كانت متوسطات المبيعات نفسها من أجل تصاميم الغلاف الأربعة :

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

H_a: ليست جميع الـ μ_i متساوية

وترغب الإدارة بالتحكم في مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I عند $\alpha = 0.05$ ولذلك، فإننا نحتاج إلى $F(.95;\ 3,6)$ حيث درجات الحرية هي تلك الموضحة في الجدول (١٤-٤). ونجد من جدول أ-٤ في الملحق أن $F(.95;3,6) = 4.76$ وبذلك تكون قاعدة القرار كالتالي:

استنتج H_0 إذا كانت $F^* \leq 4.76$

استنتج H_a إذا كانت $F^* > 4.76$

وباستخدام البيانات من جدول (١٤-٤) تكون إحصاءة الاختبار هي:

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{56}{7.67} = 11.2$$

وبما أن $F^* = 11.2 > 4.76$ فنستنتج أن H_a صحيحة، أي أن متوسطات مستويات العامل μ_i غير متساوية أو أن تصاميم الغلاف الأربعة لا تقود إلى حجم المبيعات نفسه. وهكذا نستنتج أنه توجد علاقة بين تصميم الغلاف وحجم المبيعات.

القيمة -P لإحصاءة الاختبار هي الاحتمال $P\{F(3,6) > F^* = 11.2\}$. ونجد من الجدول A - 4 أن القيمة-P تقع بين 005. و 01، وفي الواقع فإن القيمة-P تساوي 007.

هذا الاستنتاج بوجود علاقة بين تصاميم العلب وحجم المبيعات لم يكن مفاجأة لمدير المبيعات في شركة كنتون للأغذية. وذلك لأنه لم يقم بالدراسة في المقام الأول إلا لأنه كان يتوقع أن يكون لتصاميم الغلاف الأربعة تأثيرات مختلفة على حجم المبيعات، وكان مهتما بمعرفة طبيعة هذه الفروق. وسنناقش في الفصل القادم المرحلة الثانية للتحليل وهي كيفية دراسة طبيعة تأثيرات مستويات العامل في حالة وجود فروق بينها.

تعليقات

١ـ في حالة وجود مستويين، فقط، للعامل بحيث تكون $r = 2$ ،فإنه يمكن وبسهولة إثبات أن الاختبار الذي يستخدم F^* في (14.53) هو في الحقيقة مكافيء لاختبار t ذي الجانبين بين مجتمعين والمذكور في جدول (١-٢)أ . حيث يملك اختبار F هنا $(1, n_T - 2)$ درجة حرية ويملك اختبار $t\ (n_1 + n_2 - 2)$ أو $n_T - 2$ درجة حرية. وبذلك يقود كلا الاختبارين إلى مناطق حرجة متكافئة. وعند مقارنة متوسطي مجتمعين، فإنه يفضل استخدام اختبار t ذلك لأنه يمكن في هذه الحالة استخدامه لإجراء اختبار ذي جانب واحد أو اختبار ذي جانبين جدول (١-٢)، بينما يُستخدم اختبار F ،فقط، في اختبار ذي جانبين.

٢ـ بما أن اختبار F لاختبار البدائل في (14.52) هو اختبار لنموذج إحصائي خطي، فإنه يمكن الحصول عليه من الطريقة العامة التي شرحت في الفصل الثالث:

أ ـ النموذج التام هو نموذج تحاين (14.2):

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \qquad (14.55)$$

النموذج التام

وتوفيق النموذج التام بطريقة المربعات الدنيا وفقا لـ (14.15) يقـود إلى القيـم التوفيقيـة $\hat{Y}_{ij} = \bar{Y}_{i.}$. ويكون مجموع مربعات الخطأ الناتج هو:

$$SSE(F) = \sum\sum(Y_{ij} - \hat{Y}_{ij})^2 = \sum\sum(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

وبما أنه سيتم تقدير قيم r من المعالم $(\mu 1, ..., \mu_r)$ ، فإن عدد درجات الحرية المصاحب لـ

$SSE(F)$ هو $df_F = n_T - r$.

ب ـ وتحت H_0 فإن النموذج المخفّض يكون:

$$Y_{ij} = \mu_c + \varepsilon_{ij} \qquad \text{النموذج المخفض} \qquad (14.56)$$

حيث μ_C هو المتوسط المشـترك لكـل مسـتويات العـامل. وبتوفيـق النمـوذج المخفـض نحصل على مقدر المربعات الدنيا $\hat{\mu}_c = \bar{Y}_{..}$ ، بحيث تكون كـل القيـم التوفيقيـة $\hat{Y}_{ij} = \bar{Y}_{..}$ ويكون مجموع مربعات الخطأ الناتج هو:

$$SSE(R) = \sum\sum(Y_{ij} - \hat{Y}_{ij})^2 = \sum\sum(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$$

وبما أنه سيتم تقدير قيمة معلمة واحدة هي μ_c ، فإن عدد درجات الحرية المصاحب لـ $SSE(R)$ هو $df_R = n_T - 1$.

جـ ـ ووفقا لـ (14.24) و (14.26) على التوالي، فإن:

$$SSE(R) = SSTO$$
$$SSE(F) = SSE$$

وكذلك تبعا لـ (14.27) ، فإن $SSTO - SSE = SSTR$ وبالتالي، فإن إحصاءة الاختبـار (3.69) تصبح :

$$F^* = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{df_R - df_F} \div \frac{SSE(F)}{df_F}$$
$$= \frac{SSTO - SSE}{(n_T - 1) - (n_T - r)} \div \frac{SSE}{(n_T - 1)} = \frac{SSR}{r - 1} \div \frac{SSE}{n_T - r} = \frac{MSTR}{MSE}$$

(١٤-٩) مُدْخلات ومُخْرجات الحاسب الآلي لحزم التحاين

كمـا هـو الحـال في تحليـل الانحـدار، هنـاك برامـج حاسـب آلي جـاهزة للقيـام بحسـابات تحليـل التبـاين. وسـنفترض هنـا، وكمـا كـان الحـال في مناقشـاتنا لتحليـل

الانحدار، أنه للقيام بحسابات تحليل التباين بالنسبة لمعظم البيانـات، فيمـا عـدا البسـيطة منها، ستُستخدم حاسبات آلية أو آلات حاسبة قابلة للبرمجة.

وفي تحليل الانحدار، فإن برنامجـا واحـدا جـاهزا "للانحـدار المتعـدد" يكفـي عـادة للقيام بعدة تطبيقات مثل الانحـدار الخطـي البسـيط وانحـدار كثـيرة حـدود و الانحـدار المتعدد ولكن، من جهة أخرى، فإن البرامج الجاهزة الخاصـة بتحليـل التبـاين غالبـا مـا تكون خاصة بتحليل معين. ولذلك فإن مكتبـة مـا قـد تحـوي برنامجـا لتحليـل التبـاين أحادي العامل وبرامج أخرى لتحليل التباين متعدد العوامـل، ممـا سنناقشـه في فصـول قادمة. وغالبا ما تختلف بالكلية أشكال إدخال البيانات و إخراج النتائج من مكتبة إلى أخرى وربما اختلفت، أيضا ، في برامج تحليل التباين المختلفة في المكتبة الواحدة.

وأحد أشكال إدخال بيانات شركة كنتـون للأغذيـة الموضحـة في جـدول (١٤-١)أ يتطلب عمودين:

معالجة	مشاهدة
1	12
1	18
2	14
2	12
2	13
.	.
.	.
.	.
4	30

حيث تم إدخال هويـة المعالجـات في العمـود الأول بينمـا تم إدخـال البيانـات في العمود الآخر. وسوف نتعرض إلى أشكال أخرى عند استخدام حزم تحاين مختلفة.

ويوضح الشكل (١٤-٥) هيئـة مخرجـات تقليديـة عنـد اسـتخدام نمـوذج تحليـل التباين أحادي العـامل. والنتـائج الموضحـة في الشـكل (١٤-٥) هـي لبيانـات شـركة كنتون للأغذية وتم الحصول عليها عن طريق البرنامج *BMDP* (المرجع [14.1]). ولقد أضفنا بعض التعليقات لتسهيل فهم المخرجات. لاحظ أن هيئة إدخال البيانات مبين في أعلى الشـكل (١٤-٥) ويليـه عـدد المشـاهدات (المحـلات) لكـل تصميـم غـلاف، وتقديرات متوسطات مستويات العامل، وجدول تحليل التباين. ولاحـظ أن النتـائج في شكل (١٤-٥) تتطابق مع تلك التي حصلنا عليها مـن الحسـاب اليـدوي في الجـداول (١٤-١)أ أو (١٤-٤). وسبب ذلك هو عدم وجود أخطاء تدوير في البيانات البسـيطة

البسيطة لمثال شركة كنتون للأغذية. بينما قد تبرز تأثيرات لتدوير الأرقام العشرية في البيانات الأكثر تعقيدا، وبالتالي يمكن الحصول على نتائج مختلفة نوعا ما.

شكل (١٤-٥) جزء من مخرجات الحاسب الآلي لدراسة تحليل تباين أحادية العامل - مثال شركة كنتون للأغذية (*BMDP*، المرجع [14.1]).

CASE NO. LABEL	1 DESIGN	2 SOLD (Y_{ij})
1	1	12
2	1	18
3	2	14
4	2	12
5	2	13
6	3	19
7	3	17
8	3	21
9	4	24
10	4	30

NUMBER OF CASES PER GROUP

DESIGN1	2.
DESIGN2	3. ← n_i
DESIGN3	3.
DESIGN4	2.
TOTAL	10. ← n_T

ESTIMATES OF MEANS

		DESIGN1	DESIGN2	DESIGN3	DESIGN4	TOTAL
SOLD	2	15.0000	13.0000	19.0000 ($\bar{Y}_i$)	27.0000	18.0000 ← $\bar{Y}$

ANALYSIS OF VARIANCE TABLE

SOURCE OF VARIANCE	D.F.	SUM OF SQ.	MEAN SQ.	F-VALUE	PROB(TAIL)
EQUALITY OF CELL MEANS (Between treatments)	3	258.0000 (SSTR)	86.0000 (MSTR)	11.2174 (F^*)	0.0071 (One-sided P-value)
ERROR	6	46.0000 (SSE)	7.6667 (MSE)		

لقد ذكرنا، عند مناقشتنا لأخطاء التدوير في تحليل الانحدار، أن نتائج المربعات الدنيا تتأثر بشكل كبير بآثار التدوير وأن حزم الانحدار المختلفة لا تتساوى في ميزة ضبطها لمثل هذه الآثار. وبصورة مماثلة، فإن حزم تحليل التباين تختلف في جودتها ومن الحكمة تفحّص برنامج جاهز في مكتبة برامج قبل استخدامه للمرة الأولى. وإحدى الطرق لفحص أي برنامج هي باستخدامه على مجموعة بيانات معقدة تكون النتائج الدقيقة لها معروفة مسبقا.

(١٤-١٠) صياغة بديلة للنموذج I

نموذج تحاين I – نموذج تأثيرات عامل

يتم في بعض الأحيان استخدام صياغة بديلة ولكنها مكافئة تماما لنموذج تحاين I أحادي العامل (14.2). وتدعى هذه الصياغة البديلة نموذج تأثيرات العامل. وفي هذه الصياغة البديلة يُعبر عن متوسطات المعالجات μ_i بصورة مكافئة باستخدام المتطابقة التالية:

$$\mu_i \equiv \mu_. + (\mu_i - \mu_.) \qquad (14.57)$$

حيث $\mu_.$ مقدار ثابت ويمكن تعريفه ليناسب الدراسة. وسنرمز للفرق $\mu_i - \mu_.$ بـ τ_i:

$$\tau_i = \mu_i - \mu_. \qquad (14.58)$$

بحيث يمكن كتابة (14.57) بشكل مكافيء كالتالي:

$$\mu_i = \mu_. + \tau_i \qquad (14.59)$$

ويدعى الفرق $\tau_i = \mu_i - \mu_.$ تأثير مستوى العامل i. ويمكن الآن كتابة نموذج التحاين I كالتالي:

$$Y_{ij} = \mu_. + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad (14.60)$$

حيث:

$\mu_.$ مقدار ثابت مشترك لكل المشاهدات

τ_i تأثير المستوى i للعامل (مقدار ثابت لكل مستوى عامل)

ε_{ij} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$i = 1, \ldots, r \quad ; \quad j = 1, \ldots, n_i$

ويدعى نموذج التحاين (14.60) نموذج تأثيرات العامل، ذلك لأنه يُعبَّر عنه بدلالة تأثيرات العامل τ_i ، مما يميزه عن نموذج متوسطات الخلايا (14.2) الذي يُعبَّر عنه بدلالة متوسطات المعالجات μ_i .

وكما هو الحال في نموذج متوسطات الخلايا (14.2) ، فإن النموذج المكافيء (14.60) نموذج خطي. وسنوضح ذلك في الفقرة التالية.

تعريف μ

تعتمد عملية شطر متوسط مستوى عامل μ_i إلى قسمين هما متوسط عام μ وتأثير مستوى العامل τ_i على تعريف μ. ويمكن القيام بذلك بعدة طرق. وسنشرح الآن طريقتين أساسيتين لتعريف μ.

المتوسط غير المرجّح وُجد أن عملية تعريف μ كوسط غير مرجح لكل متوسطات مستويات العامل μ_i هي في الغالب مفيدة:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{r} \mu_i}{r} \qquad (14.61)$$

ويعني هذا التعريف ضمنا أن:

$$\sum_{i=1}^{r} \tau_i = 0 \qquad (14.62)$$

إذ لدينا من (14.58):

$$\sum \tau_i = \sum(\mu_i - \mu) = \sum \mu_i - r\mu$$

ومن (14.61) لدينا:

$$\sum \mu_i = r\mu$$

وهكذا فإن تعريف المتوسط العام μ كما في (14.61) يتضمن وضع قيد على τ_i، والقيد في هذه الحالة هو أن مجموعها يجب أن يكون صفرا.

مثال. في مثال أنظمة الحوافز التشجيعية في شكل (١٤ -٢)، فـإن 70 = μ_1 و μ_2 = 58 و 90 = μ_3 و 84 = μ_4 وعندما نعرف μ وفقا لـ (14.61) نحصل على:

$$\mu. = \frac{70+58+90+84}{4} = 75.5$$

وبالتالي:

$$\tau_1 = 70 - 75.5 = -5.5$$
$$\tau_2 = 58 - 75.5 = -17.5$$
$$\tau_3 = 90 - 75.5 = 14.5$$
$$\tau_4 = 84 - 75.5 = 8.5$$

وعلى سبيل المثال، فإن تأثير المستوى الأول للعامل هو $\tau_1 = -5.5$ ، وهذا يشير إلى أن إنتاجية المستخدمين الذين يحصلون على نظام الحوافز التشجيعية الأول هي أقل بـ 5.5 وحدات من متوسط الانتاج العام لكل أنواع أنظمة الحوافز التشجيعية الأربعة.

المتوسط المرجَّح

ويمكن تعريف المقدار الثابت $\mu_.$ كمتوسط مرجح لكل متوسطات مستويات العامل μ_i:

$$\mu_. = \sum_{i=1}^{r} w_i \mu_i \qquad (14.63)$$

حيث يتم تعريف الأوزان w_i بحيث يكون $\sum w_i = 1$. ويكون القيد على τ_i، عندئذ، هو:

$$\sum_{i=1}^{r} w_i \mu_i = 0 \qquad (14.64)$$

وهذا يتبع بالطريقة نفسها كما في (14.62).

وينبغي لعملية اختيار الأوزان w_i أن تعتمد على وجود مغزى للقياسات الناتجة لتأثيرات مستويات العامل. وسنقدم الآن مثالين بحيث يناسب كلاً منهما اختيار مختلف للأوزان:

(١) الوزن وفقا لمقياس أهمية معروف و (٢) الوزن وفقا لحجم العينة.

مثال ١. ترغب شركة تأجير سيارات في معرفة متوسط استهلاك الوقود (بالأميال لكل جالون) وذلك لأسطول السيارات الكبير لديها والذي يتألف من 50 في المئة من السيارات الصغيرة و30 في المئة من السيارات المتوسطة و 20 في المئة من السيارات الكبيرة. ومن الممكن أن يكون المقياس ذو المغزى هنا لـ $\mu_.$ بدلالة المتوسط العام لاستهلاك الوقود:

$$\mu_. = .5\mu_1 + .3\mu_2 + .2\mu_3 \qquad (14.65)$$

حيث μ_1 ، μ_2 و μ_3 هي متوسطات استهلاك الوقود للأنواع الثلاثة من السيارات في الأسطول وتقدير $\mu_.$ هنا هو:

$$\hat{\mu}_. = .5\bar{Y}_{1.} + .3\bar{Y}_{2.} + .2\bar{Y}_{3.} \qquad (14.66)$$

مثال ٢. لو أن شركة تأجير السيارات في مثال ١ استخدمت حجوم العينات للأنواع الثلاثة من السيارات في أسطولها، والتي لها تقريبا النسب نفسها كعدد السيارات من كل نوع في الأسطول، فقد يكون استخدام النسب n_1/n_T و n_2/n_T و n_3/n_T ، على الترتيب، كأوزان مناسب هنا. وعندئذ سيكون التعريف الناتج للثابت $\mu_.$، المتوسط الاجمالي لاستهلاك الوقود كما يلي:

$$\mu_. = \frac{n_1}{n_T}\mu_1 + \frac{n_2}{n_T}\mu_2 + \frac{n_3}{n_T}\mu_3 \tag{14.67}$$

ويمكن تقدير هذه الكمية بـ $\bar{Y}_{..}$ حيث:

$$\hat{\mu}_. = \frac{n_1}{n_T}\bar{Y}_{1.} + \frac{n_2}{n_T}\bar{Y}_{2.} + \frac{n_3}{n_T}\bar{Y}_{3.} = \bar{Y}_{..} \tag{14.68}$$

وعندما تكون حجوم العينات متساوية فإن $\mu_.$، وكما هومعروف في (14.67)، يُختزل إلى المتوسط غير المرجح (14.61).

اختبار تساوي متوسطات مستويات العامل

بما أن نموذج تأثيرات العامل (14.60) مكافيء لنموذج متوسطات الخلايا (14.2)، فإن اختبار تساوي متوسطات مستويات العامل يستخدم نفس إحصاءة الاختبار F^* في (14.53). والفرق الوحيد هنا هو في صياغة البدائل. فالبدائل في نموذج متوسطات الخلايا وكما رأينا في (14.52) هي:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r$$

H_a: ليست جميع الـ μ_i متساوية

وفي نموذج تأثيرات العامل (14.60) تصبح البدائل هذه نفسها وبدلالة تأثيرات العامل كما يلي:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_r = 0 \tag{14.69}$$

H_a: ليست جميع الـ τ_i متساوية

يمكن إثبات تكافؤ هاتين الصيغتين بسهولة. إن تساوي متوسطات مستويات العامل $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r$ يتضمن تساوي كل الـ τ_i. وهذا يتبع من (14.59) حيث أن الحد الثابت μ مشترك بين كل تأثيرات مستويات العامل τ_i، وبالإضافة إلى ذلك

فإن تساوي متوسطات مستويات العامل يتضمن أن كل τ_i تساوي الصفر سواء كان القيد المفروض على τ_i هو على الشكل (14.62) أو على الشكل (14.64). وفي كلا الحالتين، وبمعلومية تساوي الـ τ_i، فإنه يمكن تحقيق القيد بطريقة واحدة، فقط، وهي كون $\tau_i = 0$. وهكذا يتكافأ القولان بأن كل متوسطات مستويات العامل μ_i متساوية أو أن كل تأثيرات مستويات العامل τ_i تساوي الصفر.

(١٤-١١) تحليل التباين أحادي العامل بأسلوب الانحدار.

لقد نوهنا سابقا أن نموذج متوسطات الخلايا (14.2) هو نموذج خطي كما هو الحال بالنسبة لنموذج تأثيرات العامل المكافيء له (14.60). وهكذا يمكننا الحصول على إحصاءة الاختبار F^* لاختبار تساوي متوسطات مستويات العامل μ_i باستخدام صيغة المصفوفات كما في الفقرة(٨-٦) .وفي الواقع نستطيع الحصول على إحصاءة الاختبار F^* من دون تناول المصفوفات وذلك باستخدام برنامج انحدار متعدد. وسنشرح الآن تحليل التباين أحادي العامل بأسلوب الانحدار ولهذا الغرض سنستفيد من نموذج تأثيرات العامل (14.60):

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

وسنفترض هنا استخدام أوزان متساوية لمتوسطات مستويات العامل ستكون مناسبة لتعريف الثابت الاجمالي μ.

ولعرض نموذج التحاين (14.60) كنموذج خطي، ينبغي تمثيل المعالم $\mu, \tau_1,\ldots, \tau_r$ في النموذج. ولكن القيد (14.62) في حالة تساوي الأوزان:

$$\sum_{i=1}^{r} \tau_i = 0$$

يتضمن أن:

$$\tau_r = -\tau_1 - \tau_2 - \ldots - \tau_{r-1} \qquad (14.70)$$

وبالتالي سنحتاج في النموذج الخطي إلى المعالم $\mu, \tau_1,\ldots, \tau_{r-1}$ ،فقط، وذلك لأن τ_r دالة في $\tau_1, \ldots, \tau_{r-1}$.

ولإيضاح كيفية تطوير نموذج خطي بهذا الأسلوب، سنعتبر دراسة أحادية العامل بـ $r = 3$ مستويات عامل وحيث $n_1 = n_2 = n_3 = 2$. وتكون مصفوفات الـ $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$, $\boldsymbol{\beta}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}$ لهذه الحالة كالتالي:

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} Y_{11}\\ Y_{12}\\ Y_{21}\\ Y_{22}\\ Y_{31}\\ Y_{32}\end{bmatrix} \quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\mu_.\\ \tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{21}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{32}\end{bmatrix} \tag{14.71}$$

لاحظ أن متجه القيم المتوقعة، $\mathbf{E}\{\mathbf{Y}\} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ يؤدي إلى التالي:

$$\mathbf{E}\{\mathbf{Y}\}=\begin{bmatrix} E\{Y_{11}\}\\ E\{Y_{12}\}\\ E\{Y_{21}\}\\ E\{Y_{22}\}\\ E\{Y_{31}\}\\ E\{Y_{32}\}\end{bmatrix} \quad \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_.\\ \tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu_.+\tau_1\\ \mu_.+\tau_1\\ \mu_.+\tau_2\\ \mu_.+\tau_2\\ \mu_.-\tau_1-\tau_2\\ \mu_.-\tau_1-\tau_2\end{bmatrix} \tag{14.72}$$

وبما أن $\tau_3 = -\tau_1 - \tau_2$ وفقا لـ (14.70)، فنرى أن $E\{Y_{31}\} = E\{Y_{32}\} = \mu_. + \tau_3$. وهكذا فإن تمثيل المصفوفة $\mathbf{X}$ والمتجه $\boldsymbol{\beta}$ أعلاه يعطينا في كل الحالات القيم المتوقعة التالية:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu_. + \tau_i$$

ويشير التوضيح في (14.71) كيف نحتاج إلى تعريف نموذج الانحدار المتعدد، بصورة عامة، بحيث يكون مكافئا لنموذج التحاين أحادي العامل (14.60). لاحظ أننا سنحتاج إلى المتغيرات المؤشرة 0 أو 1 أو -1. وقد تمت مناقشة هذا الترميز في الفقرة (١٠-٦). ومع أن هذا الترميز ليس بسيطا كالترميز 1, 0 للمتغير المؤشر، إلا أن هذا مرغوب هنا لأنه يقود إلى معاملات انحدار في المتجه $\boldsymbol{\beta}$ هي في الوقت نفسه معالم نموذج تحاين تأثيرات العامل، أي $\mu_., \tau_1, \ldots, \tau_r$.

ولنرمز بـ X_{ij1} لقيمة المتغير المؤشر X_1 من أجل المشاهدة j عند المستوى i للعامل، وبـ X_{ij2} لقيمة المؤشر X_2 للمشاهدة نفسها وهكذا حتى نستخدم في الإجمال r-1 من المتغيرات المؤشرة في النموذج، وعندئذ يكون نموذج الانحدار المتعدد كمايلي:

(14.73) نموذج تام $Y_{ij} = \mu_. + \tau_1 X_{ij1} + \tau_2 X_{ij2} + \ldots + \tau_{r-1} X_{ij,r-1} + \varepsilon_{ij}$

حيث:

$X_{ij1} =$
1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 1 للعامل
-1 إذا كانت المشاهدة من المستوى r للعامل
0 فيما عدا ذلك

⋮

$X_{ij,r-1} =$
1 إذا كانت المشاهدة من المستوى $r-1$ للعامل
-1 إذا كانت المشاهدة من المستوى r للعامل
0 فيما عدا ذلك

ولاحظ كيف تلعب معالم نموذج التحاين دور معالم دالة الانحدار في (14.73)، حيث يكون حد التقاطع هو $\mu_.$ ومعاملات الانحدار هي $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{r-1}$.

ولاختبار تساوي متوسطات المعالجات μ_i بأسلوب الانحدار، سنعرض الفرضيات البديلة في الصياغة المكافئة (14.69) مع ملاحظة أن τ_r لابد أن تساوي الصفر عندما تكون $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_{r-1} = 0$ وذلك وفقا لـ (14.70):

(14.74)
$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_{r-1} = 0$
H_a: ليست جميع الـ τ_i مساوية للصفر

لاحظ أن H_0 تفرض أن كل معاملات الانحدار في نموذج الانحدار (14.73) مساوية للصفر، ولذلك فإننا نستعمل إحصاءة الاختبار المعتادة (7.34b) لاختبار ما إذا كانت هناك علاقة انحدار أم لا:

$$F^* = \frac{MSR}{MSE} \quad (14.75)$$

مثال

لاختبار تساوي متوسطات المبيعات لتصاميم الغلاف الأربعة في مثال شركة كنتون للأغذية بأسلوب الانحدار سنستخدم نموذج الانحدار:

$$Y_{ij} = \mu_. + \tau_1 X_{ij1} + \tau_2 X_{ij2} + \tau_3 X_{ij3} + \varepsilon_{ij} \quad (14.76)$$

حيث:

1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 1 للعامل

$X_{ij1} =$ -1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 4 للعامل

0 فيما عدا ذلك

1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 2 للعامل

$X_{ij2} =$ -1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 4 للعامل

0 فيما عدا ذلك

1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 3 للعامل

$X_{ij3} =$ -1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 4 للعامل

0 فيما عدا ذلك

يوضح الجدول (١٤-٥)أ متجه المشاهدات **Y** والمصفوفة **X** للبيانات في الجدول (١٤-١)أ وعلى سبيل المثال لاحظ، للمشاهدة Y_{11}، $X_1 = 1$ و $X_2 = 0$ و $X_3 = 0$ وهكذا نحصل من (14.76) على:

$$E\{Y_{11}\} = \mu + \tau_1$$

وبطريقة مشابهة، نحصل من أجل المشاهدة Y_{42} على $X_1 = -1$ و $X_2 = -1$ و $X_3 = -1$ وبالتالي يكون:

$$E\{Y_{42}\} = \mu - \tau_1 - \tau_2 - \tau_3 = \mu + \tau_4$$

لاحظ أننا نستخدم الترميزات التالية في المتغيرات المؤشرة وذلك لمشاهدات من كل من مستويات العامل الأربعة:

مستوى عامل	ترميز X_1	X_2	X_3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1
4	-1	-1	-1

وبتشغيلة حاسب لحزمة انحدار متعدد في حالة بيانات الجدول (١٤ -٥) أ، حصلنا على دالة الانحدار التوفيقية وجدول تحليل التباين المعروضين في الجدولين (١٤-٥)ب و(١٤-٥)جـ، ولذلك تكون إحصاءة الاختبار (14.75) كالتالي:

$$F^* = \frac{MSR}{MSE} = \frac{86}{7.67} = 11.2$$

وهذه إحصاءة الاختبار نفسها التي حصلنا عليها سابقا بناءً على حسابات تحليل التباين. وفي الحقيقة فإن جدول تحليل التباين الذي حصلنا عليه بأسلوب الانحدار هو الجدول نفسه في (١٤-٤) الذي حصلنا عليه بأسلوب تحليل التباين، فيما عدا أن مجموع مربعات المعالجات ومتوسط المربعات في الجدول (١٤-٤) سميت الآن مجموع مربعات الانحدار ومتوسط المربعات في الجدول (١٤-٥)جـ.

ومن هذه النقطة فصاعدا، فإن طريقة الاختبار القائمة على أسلوب الانحدار توازي تماما طريقة الاختبار في تحليل التباين التي شرحناها سابقا.

جدول (١٤-٥) أسلوب الانحدار لتحليل التباين – مثال شركة كنتون للأغذية

أ – مصفوفات البيانات لنموذج الانحدار (14.76)

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}12\\18\\14\\12\\13\\19\\17\\21\\24\\30\end{bmatrix}\qquad \mathbf{X}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & X_1 & X_2 & X_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 1\\1 & -1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1 & -1\end{bmatrix}\end{array}$$

ب – دالة الانحدار التوفيقية.

$$\hat{Y}= 18.5-3.5X_1 - 5.5X_2 + .5X_3$$

جـ – جدول تحليل التباين للانحدار

مصدر الخطأ	SS	df	MS
الانحدار	$SSR = 258$	3	$MSR = 86$
الخطأ	$SSE = 46$	6	$MSE = 7.67$
المجموع	$SSTO = 304$	9	

تعليقات

١ـ في دالة الانحدار التوفيقية في الجدول (١٤-٥)ب، نجد أن حد التقاطع 18.5 هو المتوسط غير المرجح لمتوسطات مستويات العامل المقدرة $\bar{Y}_{i.}$ وذلك لأنه قد تم تعريف μ كمتوسط غير مرجح لمتوسطات مستويات العامل μ_i.

٢ـ على وجه العموم فإنه لا يتم استخدام أسلوب الانحدار في مسائل تحليل التباين الاعتيادية. و السبب في ذلك هو أن بنية المصفوفة **X** في تحليل التباين تكون، في العادة، بسيطة جدا، كما رأينا في جدول (١٤-٥)أ لمثال شركة كنتون للأغذية. وتسمح هذه البنية البسيطة بتبسيطات حسابية متعارف عليها بوضوح في الطرق الإحصائية الخاصة بتحليل التباين. وسنتابع أسلوب الإنحدار لتحليل التباين في هذا الفصل وفي الفصول القادمة لسببين رئيسين. السبب الأول هو أن النموذج الإحصائي الخطي العام (7.18) الذي درسناه في الفصل السابع من هذا الكتاب يشمل نماذج تحليل التباين. والسبب الثاني هو أن أسلوب الانحدار مفيد جدا لتحليل دراسات متعددة العوامل لا تكون بنية المصفوفة **X** فيها بسيطة.

٣ـ عندما نرغب في إجراء اختبار تحليل التباين بأسلوب انحدار قائم على نموذج متوسطات الخلايا (14.2):

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

نعرف المتجه β بحيث يحوي كل متوسطات المعالجات μ_i وعددها r:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_r \end{bmatrix} \tag{14.77}$$

ونستخدم r من المتغيرات المؤشرة $X_1, ..., X_r$ بحيث يأخذ كل منها القيم 0 و 1 كما بينا في الفصل العاشر:

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت المشاهدة من المستوى 1 للعامل.} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$\vdots \tag{14.78}$$

$$X_r = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت المشاهدة من المستوى } r \text{ للعامل.} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ولذلك يكون نموذج الانحدار كما يلي:

(14.74) النموذج التام $Y_{ij} = \mu_1 X_{ij1} + \mu_2 X_{ij2} + \ldots + \mu_r X_{ijr} + \varepsilon_{ij}$

حيث تلعب المتوسطات μ_i دور معاملات الانحدار.

وتحوي المصفوفة **X** بهذه الطريقة القيم 0 و 1 ،فقط. فعلى سبيل المثال في حالة $r = 3$ مستويات عامل و $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ من المشاهدات تكون المصفوفة **X** (البيانات مرتبة كالتالي Y_{11}, Y_{12}, Y_{21} إلخ) والمتجه β كالتالي:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu 3 \end{bmatrix}$$

لاحظ أنه ليس لنموذج الانحدار (14.79) حد تقاطع وإذا استُخدم برنامج حاسب آلي في هذه الحالة، فمن المهم تحديد عملية التوفيق بدون حد تقاطع.

ويتطلب اختبار تساوي متوسطات مستويات العامل، أي $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r$ التساؤل عما إذا كانت معاملات الانحدار في (14.79) متساوية أم لا، وليس عن كونها مساوية للصفر أم لا. ولاجراء هذا الاختبار، فإنه يجب أن نوفق النموذج التام أولاً ومن ثَمَّ النموذج المخفض.

ويكون النموذج المخفض عندما تكون $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu r$ صحيحة كالتالي :

(14.80) النموذج المخفض $Y_{ij} = \mu_c + \varepsilon_{ij}$

حيث μ_c القيمة المشتركة لكل قيم μ_i تحت H_0 وتحتوي المصفوفة **X** ببساطة على عمود من القيم 1. وفي مثالنا هنا ستكون المصفوفة **X** والمتجه β كالتالي:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \beta = [\mu_c]$$

وبعد أن يتم توفيق النموذجين التام و المخفض ونحصل على مجموع مربعات الخطأ يتم حساب إحصاءة الاختبار الخطية العامة (3.69).

مراجع ورد ذكرها.

[14.1]. Dixon, W. J., Chief editor. *BMDP Statistical Software Manual*, vols. 1 and 2. Berkeley, Calif. : University of California Press, 1988.

مسائل

(١٤-١) بالعودة إلى الشكل (١٤-١)أ. لو كنت تعرف دالة الانحدار الحقيقية فهل يمكنك تحديد متوسط مستوى المبيعات عندما يكون مستوى السعر 68 دولارا؟ هل يمكنك القيام بهذا من الشكل (١٤-١)ب ، لو كنت تعرف ،فقط، قيم المعالم μ_1 و μ_2 و μ_3 في نموذج التحاين (14.2)؟ ما هو التمييز بين نماذج الانحدار ونماذج التحاين الذي بينته إجاباتك ؟

(١٤-٢) تخطط باحثة تسويق بعد أن جمعت بيانات عن مصاريف حبوب الإفطار لعائلات لديها 1 , 2 , 3 , 4 و 5 من الأطفال الذين يعيشون في المنزل وذلك باستخدام نموذج إنحدار اعتيادي لتقدير متوسط المصاريف في كل من المستويات الخمسة من حجوم العائلة. ولكنها لم تستطع إتخاذ قرار إزاء توفيق نموذج إنحدار خطي أو نموذج انحدار تربيعي، في حين أن البيانات لم تعط دليلا قاطعا لمصلحة أحد النموذجين. وقد اقترح عليها أحد زملائها ما يلي: "في حالتك هذه يمكنك ببساطة استخدام نموذج تحاين". فهل هذا اقتراح مفيد؟ اشرح.

(١٤-٣) بالعودة إلى مجموعة البيانات ***SENIC***. قام أحد المحللين بتحديد أربع شرائح عمرية للمتغير 3 (العمر) ويرغب في استخدام نموذج التحاين (14.2) لتحديد ما إذا كان متوسط خطورة العدوى (المتغير 4) هو نفسه لشرائح العمر الأربع.

أ – ما هو المتغير التابع هنا؟

ب – عرف العامل المدروس. وما هي مستوياته؟

جـ - هل العامل كمي أم نوعي ؟

د - هل العامل تصنيفي أم تجريبي ؟

(١٤-٤) تم عشوائيا تقسيم ثلاثين متدربا إلى ثلاث مجموعات، تتكون كل مجموعة من عشرة أشخاص، وتم إعطاء كل مجموعة تعليمات لتشغيل نظام معالجة كلمات مختلف. وفي نهاية فترة التدريب أُعطي كل متدرب مشروع معالجة كلمات موحد، ورصد الوقت الذي أنهى كل متدرب فيه المشروع. ولاختبار ما إذا كان متوسط الوقت هو نفسه للأنظمة الثلاثة سنستخدم نموذج التحاين (14.2).

أ - ما هو المتغير التابع هنا؟

ب - عرف العامل المدروس. وما هي مستوياته؟

جـ - هل العامل كمي أم نوعي ؟ هل ستختلف إجابتك في حالة أنه سمح للمتدرب (المتدربة) باختيار نظام معالجة الكلمات الذي يريد (تريد)؟

(١٤-٥) في دراسة عن مدى العزم على أخذ لقاحات ضد الأنفلونزا في منطقة مهددة بوباء، تَمَّ تقسيم 90 شخصا إلى ثلاث مجموعات في كل منها 30 شخصا، وفقا لدرجة مخاطرة الإصابة بالمرض. وفي كل مجموعة كان جميع أفرادها موجودين عند سؤال كل شخص فيها عن إمكانية أخذه للقاح، وذلك على مقياس احتمالي يتراوح بين الصفر والواحد، مما لا شك فيه أن معظم الأشخاص قد سمعوا إجابات الآخرين بجانبهم. ويرغب محلل في اختبار ما إذا كان متوسط درجات العزم على أخذ اللقاح هي نفسها في المجموعات الثلاث. اعتبر كل فرضية من فرضيات نموذج التحاين (14.2) واشرح ما إذا كانت هذه الفرضية متحققة في الوضع الراهن.

(١٤-٦) في دراسة لفعالية دعاية تستخدم الضوء المسرحي، جيء بأشخاص إلى استديو وعرض عليهم فيلم بواحد من ثلاثة أنواع من الدعاية التي تستخدم

الضوء المسرحي لمنتج معين. وقيس موقف كل شخص من المنتج قبل عرض الفيلم وبعده.

أ – في حالة من هذا النوع، هل ينبغي استخدام معالجة حيادية ؟

ب– اشرح بدقة ماذا ستكون عليه طبيعة المعالجة الحيادية لهذه الدراسة.

(١٤–٧) تدرس شركة العلاقة بين الرضى الوظيفي والقدم الوظيفي ولهذا الغرض وزعت الشركة المستخدمين إلى ثلاث مجموعات وفقا لطول مدة الخدمة (أقل من 5 سنوات ، ٥ ـ ١٠ سنوات، أكثر من ١٠ سنوات).

افترض أن $\mu_1 = 65$, $\mu_2 = 30$, $\mu_3 = 95$ و $\sigma = 3$ وأنه يمكن تطبيق نموذج التحاين (14.2).

أ – ارسم تمثيلاً لهذا النموذج في هيئة الشكل (١٤–٢).

ب – إذا اختير 25 شخصا من كل مجموعة عشوائيا لمقابلة شخصية يُسألون فيها بشكل مركز عن رضاهم الوظيفي، أحسب $E\{MSTR\}$ و $E\{MSE\}$. هل $E\{MSTR\}$ كبيرة جدا هنا مقارنة بـ $E\{MSE\}$ ؟ وما هي الآثار المترتبة على ذلك ؟

(١٤–٨) في دراسة عن طول الإقامة في المستشفى (مقاسة بالأيام) لأشخاص في أربع مجموعات دخل، كانت المعالم كالتالي:

$\sigma = 2.8$, $\mu_4 = 9.5$, μ_3 7.9 , $\mu_2 = 6.3$, $\mu_1 = 5.1$

إفترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب.

أ – ارسم تمثيلاً لهذا النموذج في هيئة الشكل (١٤–٢).

ب – إذا اختير100 شخص من كل مجموعة دخل عشوائيا ليخضعوا للدراسة. احسب $E\{MSTR\}$ و $E\{MSE\}$. هل $E\{MSTR\}$ أكبر بكثير $E\{MSE\}$ من هنا؟ ما هي الآثار المترتبة على ذلك؟

جـ – لو أن $\mu_2 = 5.6$ و $\mu_3 = 9.0$ مع بقاء كل شيء آخر على حاله، فكم سيكون $E\{MSTR\}$؟ ولماذا يكون $E\{MSTR\}$ هنا أكبر من

ذلك المحسوب في الجزء (ب) بالرغم من أن مدى متوسطات مستويات العامل بقي نفسه بدون تغيير ؟

(١٤-٩) يسأل أحد الطلبة السؤال التالي : "لماذا لا يكون اختبار F لتساوي متوسطات مستويات العامل اختبارا ذا جانبين طالما أن فروقات بين متوسطات مستويات العامل يمكن أن تظهر في أي من الاتجاهين ؟ "أشرح مستخدما العبارات الخاصة بمتوسطات المربعات المتوقعة في (14.35).

(١٤-١٠) **تحسين الانتاجية**. جمّع أحد الاقتصاديين بيانات عن تحسين الإنتاجية في العام الماضي لعينة من الشركات المنتجة لتجهيزات الحاسوب، وقد صُنفت الشركات وفقا لمستوى متوسط نفقاتها على البحث والتطوير في السنوات الثلاث الأخيرة (منخفض، معتدل، مرتفع) وكانت نتائج الدراسة كالتالي (لقد قيس تحسين الانتاجية على تدريج يتراوح بين الصفر و المئة) افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب.

i		j: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	منخفض	7.6	8.2	6.8	5.8	6.9	6.6	6.3	7.7	6.0			
2	معتدل	6.7	8.1	9.4	8.6	7.8	7.7	8.9	7.9	8.3	8.7	7.1	8.4
3	مرتفع	8.5	9.7	10.1	7.8	9.6	9.5						

ملخص نتائج حسابية : $SSTR = 20.125$, $SSE = 15.362$

أ - أوجد القيم التوفيقية.

ب - أوجد الرواسب. وهل مجموعها يساوي الصفر وفقا لـ (14.18)؟

جـ - أكتب جدول تحليل التباين.

د - اختبر ما إذا كان متوسط تحسين الإنتاجية يختلف وفقا لمستوى نفقات البحث والتطوير. اضبط المخاطرة α عند 0.05. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.

هـ - ما هي القيمة -P للاختبار في الفقرة (د)؟ وكيف تدعم هـذه القيمة القرار الذي وصلت اليه في الفقرة (د)؟

و - كيف تبدو طبيعة العلاقة بين نفقات البحث والتطوير وبين تحسين الإنتاجية؟

(١٤-١١) **لون الاستبيان.** في تجربة لدراسة لون الورق (أزرق، أخضر، برتقالي) على معدلات الاستجابة لاستبيانات وزعت "بطريقة وضعها على الزجاج الأمامي للسيارة" في مواقف أسواق مركزية، اختير 15 سوقا مركزيا ممثلة في أحد المناطق الحضرية وخُصص كل لون عشوائيا لخمسة مواقف. وفيما يلي معدلات الاستجابة (بالنسبة المئوية). افترض أ ن نموذج التحاين (14.2) مناسب.

	i	j = 1	2	3	4	5
1	أزرق	28	26	31	27	35
2	أخضر	34	29	25	31	29
3	برتقالي	31	25	27	29	28

ملخص نتائج حسابية : $SSTR = 7.60$, $SSE = 116.40$

أ - أوجد القيم التوفيقية

ب - أوجد الرواسب

جـ - اكتب جدول تحليل التباين.

د - اختبر ما إذا كان متوسط معدلات الاستجابة يختلف باختلاف الألوان الثلاثة مستخدما مستوى معنوية $\alpha = .01$. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة وما هي القيمة -P للإختبار ؟

هـ - عندما أطلع أحد المدربين التنفيذيين على النتائج علق بقوله : "هل رأيت؟ لقد كنت محقا منذ البداية. فقد كان بإمكاننا أن نطبع

الاستبيان على ورق أبيض حيث أنه أرخص "فهل هذا هو الاستنتاج الذي توصلت إليه الدراسة؟ ناقش.

(١٤-١٢) **علاج إعادة التأهيل.** يرغب باحث في مركز لإعادة التأهيل في فحص العلاقة بين اللياقة البدنية، قبل إجراء عملية تصحيحية في الركبة، وبين الوقت اللازم للعلاج الطبيعي حتى تنجح عملية إعادة التأهيل. لقد روجعت ملفات المرضى في مركز التأهيل وتم اختيار 24 مريضا من الذكور الذين تتراوح أعمارهم ما بين الثامنة عشرة والثلاثون عاما و اجتازوا عملية تصحيحية في الركبة خلال العام المنصرم، وفيما يلي عدد الأيام التي احتاجها كل مريض لإنهاء فترة العلاج الطبيعي وكذلك حالة اللياقة البدنية قبل العملية (تحت المتوسط، متوسط، فوق المتوسط).

i		j: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	تحت المتوسط	29	42	38	40	43	40	30	42		
2	متوسط	30	35	39	28	31	31	29	35	29	33
3	فوق المتوسط	26	32	21	20	23	22				

افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب.

أ - أوجد القيم التوفيقية.

ب - أوجد الرواسب. وهل مجموعها يساوي الصفر وفقا لـ (14.18)؟

جـ - اكتب جدول تحليل التباين.

د - اختبر ما إذا كان عدد الأيام اللازمة لإعادة التأهيل بنجاح هي نفسها لمجموعات اللياقة الثلاث اضبط المخاطرة α عند 0.01. اعرض الفرضيات البديلة وقاعدة القرار و النتيجة.

هـ - ما هي القيمة -P للاختبار في الفقرة (د). اشرح كيف يمكن الوصول إلى القرار نفسه بمعرفة القيمة -P.

و - كيف تبدو طبيعة العلاقة بين حالة اللياقة البدنية و الفترة اللازمة لإعادة التأهيل؟

(١٤-١٣) **عروض نقدية.** قامت منظمة للمستهلكين بدراسة تأثير عمر مالك السيارة على قرار العرض المالي المقدم لشراء سيارته وذلك باستخدام 12 شخصا في كل من فئات العمر الثلاث التالية (فتى، كهل، شيخ) والذين مثلوا دور المالكين لسيارة مستعملة. و اختيرت سيارة عمرها ست سنوات وذات سعر متوسط لهذه التجربة، ولقد طلب "المالكون" من 36 تاجرا للسيارات اختيروا بشكل عشوائي من بين تجار المنطقة أن يقدموا عروضا مالية لشراء السيارة. واستخدمت التعشية في تخصيص التجار إلى "المالكين" وفيما يلي العروض (بمئات الدولارات) افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب.

	i	j 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	فتى	23	25	21	22	21	22	20	23	19	22	19	21
2	كهل	28	27	27	29	26	29	27	30	28	27	26	29
3	شيخ	23	20	25	21	22	23	21	20	19	20	22	21

أ - أوجد القيم التوفيقية.

ب- أوجد الرواسب.

جـ - اكتب جدول تحليل التباين.

د - قم باختبار F حول تساوي متوسطات مستويات العامل مستخدما $\alpha = .01$ اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار و النتيجة، ما هي القيمة -P للاختبار؟

هـ - كيف تبدو طبيعة العلاقة بين عمر المالك ومتوسط المال المعروض ؟

(١٤-١٤) **آلات التعبئة.** تستخدم شركة ست آلات من النوع نفسه و العمر نفسه لتعبئة أحد المنظفات في علب كرتون عليها علامة الوزن 32 أونصة، وقد شكا مدير الانتاج أن الآلات الست لاتعبيء الكمية نفسها في علب

الكرتون. وقد طلب أحد المستشارين بأن يتم اختيار 20 من هذه العلب المعبأة من كل آلة ويتم وزنها بعناية، وفيما يلي المشاهدات (وللسهولة كتبت كانحرافات عن 32.0 إونصة). افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب.

				j						
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i
-.21	.27	-.27	-.04	.10	.38	.18	.07	.20	-.14	1
-.03	.06	.33	-.12	.06	.24	.47	.12	.11	.46	2
.62	.47	.24	.54	.35	.22	.45	.32	.78	.21	3
.34	.48	.14	.40	.55	.27	.29	.52	.58	.49	4
.14	.29	.22	.01	.15	.23	.11	.06	.27	-.19	5
-.07	.43	.17	.08	.27	.12	.47	.28	-.05	.05	6

				j						
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	i
-.19	-.01	.07	.26	.13	.09	.28	-.02	-.07	.39	1
.12	.11	.02	.17	.04	.36	.29	.42	.53	.05	2
.61	.20	.50	.44	.48	.45	.71	.59	.55	.47	3
.20	.45	.42	.51	.54	.48	.13	.18	.33	.01	4
-.18	.35	.14	.20	.24	-.20	.27	-.11	.30	.20	5
.05	-.09	.35	.43	.13	-.06	.16	.10	.01	.20	6

أ – أوجد القيم التوفيقية.

ب – أوجد الرواسب. وهل مجموعها يساوي الصفر وفقا لـ (14.18)؟

جـ – اكتب جدول تحليل التباين.

د – اختبر ما إذا كان متوسط الكمية المعبأة يختلف من آلة لأخرى أ م لا. اضبط المخاطرة α عند 0.05. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار و النتيجة. وهل يدعم استنتاجك شكوى مدير المبيعات ؟

هـ – ما هي القيمة -P للاختبار في الفقرة (د) ؟ وهل هذه القيمة متسقة مع النتيجة في الفقرة (د) ؟ اشرح.

و – هل يبدو التشتت بين متوسط الكميات المعبأة للآلات الست كبيرا بالمقارنة مع تشتت الكميات المعبأة في العلب الخاصة بأي من الآلات؟.

(١٤–١٥) **توزيع جوائز تشجيعية.** يستخدم أحد صانعي المشروبات الغازية خمسة وكلاء (5, 4, 3, 2, 1) للقيام بعملية توزيع جوائز تشجيعية على منتجاته المختلفة. ويرغب مدير التسويق في دراسة حدود الأوقات التي يتم توزيع الجوائز فيها. فاختار عشوائيا عشرين عملية لكل وكيل وحسب الوقت المنصرم (بالأيام) للقيام بكل عملية. وفيما يلي النتائج. افترض أن جدول التحاين (14.2) مناسب.

j

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	24	24	29	20	21	25	28	27	23	21
2	18	20	20	24	22	29	23	24	28	19
3	10	11	8	12	12	10	14	9	8	11
4	15	13	18	16	12	19	10	18	11	17
5	33	22	28	35	29	28	30	31	29	28

j

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	24	26	23	24	28	23	23	27	26	25
2	24	25	21	20	24	22	19	26	22	21
3	16	12	18	14	13	11	14	9	11	12
4	15	12	13	13	14	17	16	17	14	16
5	33	30	32	33	29	35	32	26	30	29

أ – أوجد القيم التوفيقية.

ب – أوجد الرواسب. وهل مجموعها يساوي الصفر وفقا لـ (14.18)؟

جـ – اكتب جدول تحليل التباين.

د – اختبر ما إذا كان متوسط الوقت المنصرم يختلف من عميل لآخر، اضبط مستوى المخاطرة α عند 05. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.

هـ - ما هي القيمة -P للاختبار في الفقرة (د)؟ اشرح كيف يمكن الوصول إلى القرار نفسه في (د) بمعرفة القيمة-P .

و - بناء على متوسطات المعالجات المقدرة، هل يبدو أن هناك اختلافا كبيرا في متوسط الوقت المنصرم للوكلاء الخمسة ؟ وهل هذا التشتت ناتج بالضرورة بسبب الفروق في كفاءة تنفيذ العملية للوكلاء الخمسة ؟ ناقش.

(١٤-١٦) يُراد دراسة أربع معالجات في تصميم تام التعشية، ويتوفر 16 وحدة تجريبية. ويجب تخصيص كل معالجة إلى أربع وحدات تجريبية نختارها عشوائيا. وهناك أربعة مراقبين يجب تخصيص كل منهم عشوائيا لوحدة تجريبية واحدة وذلك من أجل كل معالجة. قم بإجراء كل التعشيات المناسبة.

(١٤-١٧) يراد دراسة خمس معالجات في تصميم تام التعشية، ويوجد 30 وحدة تجريبية. ويجب تخصيص كل معالجة إلى ست وحدات تجريبية نختارها عشوائيا. وسيتم اجراء التجربة فوق فترة ستة أيام بحيث يتم ادخال كل معالجة في كل يوم، ويراد تعشية ترتيب إدخال المعالجات الخمس في كل يوم. قم بإجراء التعشيات اللازمة.

(١٤-١٨) بالرجوع إلى مسألة **لون الاستبيان** (١٤-١١). اشرح كيف يمكنك تخصيص مواقف الأسواق المركزية عشوائيا إلى الألوان في هذا الدراسة وحيدة العامل، قم بإجراء كل التعشيات المناسبة.

(١٤-١٩) بالعودة إلى مسألة **العروض النقدية** (١٤-١٣). اشرح كيف يمكنك تخصيص التجار عشوائيا إلى " المالكين" في هذه الدراسة وحيدة العامل. قم بإجراء كل التعشيات اللازمة.

(١٤-٢٠) بالعودة إلى المسأله (١٤-٧) كم ستكون القيم τ_1 و τ_2 و τ_3 إذا كان نموذج التحاين مصاغا بالشكل البديل (14.60) بدلالة تأثيرات العامل، و μ معرّفة كما في (14.61) ؟

(١٤-٢١) بالعودة إلى المسألة (١٤-٨).كم ستكون قيم τ_i إذا كان نموذج التحاين مصاغا بالشكل البديل (14.60) بدلالة تأثير العامل، و μ معرّفة كما في (14.61).

(١٤-٢٢) بالعودة إلى مسألة **توزيع الجوائز التشجيعية** (١٤-١٥). افترض أن 25 في المئة من توزيعات الجوائز يقوم بها الوكيل 1 و 20 في المئة يقوم بها الوكيل 2 و 20 في المئة يقوم بها الوكيل 3 و 20 في المئة يقوم بها الوكيل 4 و 15 في المئة يقوم بها الوكيل 5.

أ - أوجد تقديرا نقطيا لـ μ إذا كان نموذج التحاين مصاغا بالشكل (14.60) البديل وμ معرفة كما في (14.63) وبحيث تكون الأوزان هي النسب التي يقوم كل وكيل بتوزيعها.

ب - اعرض الفرضيات البديلة لاختبار تساوي متوسطات مستويات العامل بدلالة نموذج تأثيرات العامل (14.60) في هذه الحالة، هل ستتأثر إجابتك لو أن μ كانت معرفة وفقا لـ (14.61) ؟ اشرح.

(١٤-٢٣) بالعودة إلى مسألة **تحسين الانتاجية** (١٤-١٠). مستخدما نموذج الانحدار (14.73) لاختبار تساوي متوسطات مستويات العامل.

أ - اكتب المصفوفات **Y** و **X** و β.

ب - أوجد $\mathbf{X}\beta$ وطور تعابير مكافئة لعناصر هذا المتجه بدلالة μ_i.

جـ - أوجد دالة الانحدار التوفيقية. و ما الذي يقدره حد التقاطع ؟

د - أوجد جدول تحليل التباين للانحدار.

هـ - قم باختبار تساوي متوسطات مستويات العامل مستخدما $\alpha = 0.05$. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار و النتيجة.

(١٤-٢٤) بالعودة إلى مسألة **لون الاستبيان** (١٤-١١). مستخدما نموذج الانحدار (14.73) لاختبار تساوي متوسطات مستويات العامل.

أ - اكتب المصفوفات **Y** و **X** و β.

ب - أوجد $X\beta$ وطور تعابير مكافئة لعناصر هذا المتجه بدلالة μ_i.

جـ - أوجد دالة الانحدار التوفيقية. وما الذي يقدره حد التقاطع ؟

د - أوجد جدول تحليل التباين للانحدار.

هـ - قم باختبار تساوي متوسطات مستويات العامل، مستخدما $\alpha = .01$ اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرا ر والنتيجة.

(١٤-٢٥) بالعودة إلى **مسألة العروض النقدية** (١٤-١٣).

أ - قم بتوفيق نموذج الانحدار التام (14.73) للبيانات. ما الذي يقدره حد التقاطع ؟

ب - أوجد جدول تحليل التباين للانحدار واختبر ما إذا كانت متوسطات مستويات العامل متساوية أم لا، مستخدما $\alpha = .01$. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار، و النتيجة.

(١٤-٢٦) بالعودة إلى مسألة علاج **إعادة التأهيل** (١٤-١٢).

أ - قم بتوفيق نموذج الانحدار التام (14.79) للبيانات. وهل سيكون نموذج الانحدار التوفيقي الذي يحوي حد تقاطع ملائما هنا ؟

ب - قم بتوفيق النموذج المخفض (14.80) للبيانات.

جـ - استخدم إحصاءة الاختبار (3.69) لاختبار تساوي متوسطات مستويات العامل مستخدما مستوى معنوية $\alpha = .01$.

تمارين

(١٤-٢٧) (تحتاج لحساب التفاضل) اعرض دالة الإمكانية العظمى لنموذج التحاين (14.2) عندما تكون $r = 3$ و $n_i \equiv 2$. وأوجد تقديرات الامكانية العظمى. وهل هي نفسها تقديرات المربعات الدنيا (14.14)؟

(١٤-٢٨) أثبت أن النتيجة في (14.31b) مكافئة جبريا لـ (14.25).

(١٤-٢٩) أثبت أنه عند تربيع إحصاءة الاختبار t^* في جدول (١-٢)أ، فإنها تكون مكافئة لإحصاءة الاختبار F^* (14.53) في حالة $r = 2$.

(١٤-٣٠) استنبط القيد في (14.64) عندما يُعرّف الثابت μ وفقا لـ (14.63).

(١٤-٣١) أ - أوجد مقدار المربعات الدنيا لمعاملات الانحدار في نموذج الانحدار التام (14.79). ما هي $SSE(F)$ هنا ؟.

ب - أوجد مقدار المربعات الدنيا لـ μ_c في نموذج الانحدار المخفض (14.80). ما هي $SSE(R)$ هنا ؟

(١٤-٣٢) اعتبر التوضيح في (14.8) - (14.6) والذي يبين أن نموذج التحاين (14.2) هو نموذج خطي. ولاختبار تساوي متوسطات المعالجات الثلاث يمكننا إذن أن نستخدم أسلوب المصفوفات العام والاستفادة من (8.70) لكتابة إحصاءة الاختبار أثبت أنه إذا كان:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{h}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

فإن الصيغة (8.70) تكافيء $SSTR$.

مشاريع

(١٤-٣٣) بالعودة إلى مجموعة البيانات SENIC. اختبر ما إذا كان متوسط خطورة العدوى (المتغير 4) هو نفسه في كل المناطق الجغرافية الأربع (المتغير 9) مستخدما مستوى معنوية $\alpha = .05$. افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار و النتيجة.

(١٤-٣٤) بالعودة إلى مجموعة البيانات SENIC. يراد دراسة تأثير متوسط عمر المريض (المتغير 3) على متوسط خطورة العدوى (المتغير ٤). ولأغراض هذه الدراسة يتم تصنيف متوسط العمر إلى أربع فئات : أقل من 50.0 ، 50.0-54.9، 55.0-59.9 و 60 فأكثر. افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب. اختبر ما إذا كان متوسط خطورة العدوى يختلف لفئات العمر

الأربع أم لا. اضبط المخاطرة α عند 0.10. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار و النتيجة.

(١٤-٣٥) بالعودة إلى مجوعة بيانات SMSA يراد دراسة تأثير المنطقة الجغرافية (المتغير 12) على معدلات الجريمة (المتغير 11 ÷ المتغير 3) افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب. اختبر ما إذا كانت معدلات الجريمة تختلف في المناطق الجغرافية الأربع أم لا مستخدما $\alpha = .05$. اعرض الفرضيات البديلة، قاعدة القرار، والنتيجة.

(١٤-٣٦) اعتبر اختبارا يتضمن الفرضية $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. ستؤخذ خمس مشاهدات عند كل مستوى عامل، وسيستخدم مستوى معنوية $\alpha = .05$.

أ - ولّد خمس مشاهدات عشوائية من التوزيع الطبيعي عندما تكون $\mu_1 = 100$ و $\sigma = 12$ وذلك لتمثيل مشاهدات المعالجة 1. وكرر هذه العملية بالنسبة لـ $\mu_2 = \mu_3 = 100$ و $\sigma = 12$. وأخيرا احسب إحصاءة الإختبار F^* (14.43).

ب- كرر الفقرة(أ) 100 مرة.

جـ- إحسب متوسط المئة قيمة للإحصاءة F^* .

د- ما هي نسبة إحصاءة الاختبار F^* التي تقود إلى النتيجة H_0؟ وهل يتسق هذا مع التوقعات النظرية ؟

هـ- كرر الفقرات (أ) و (ب) عندما تكون $\mu_1 = 80$, $\mu_2 = 60$, $\mu_3 = 160$ و $\sigma = 12$. احسب متوسط المائة قيمة للإحصاءة F^*. ماهو الفرق ين هذا المتوسط والمتوسط الذي حصلت عليه في الفقرة (جـ) عندما: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 100$؟ وهل هذه النتيجة متسقة مع استخدام قاعدة القرار (14.54)؟

و - ما هي النسبة من قيم إحصاءات الاختبار المائة التي وجدتها في الفقرة (هـ) التي أدت إلى النتيجة H_a؟ وهل يبدو أن الاختبار له قوة مرضية عندما يكون $\mu_1 = 80$, $\mu_2 = 60$ و $\mu_3 = 160$ ؟

تحليل تأثيرات مستويات عامل

اختبار F الذي نوقش في الفصل السابق، لتحديد ما إذا كانت متوسطات مستويات عامل μ_i، مختلفة أم لا، هو اختبار مبدئي لتحديد الحاجة إلى تحليل تفصيلي لتأثيرات مستويات عامل. فإذا قاد اختبار F إلى القرار بأن متوسطات العامل μ_i متساوية، فإن هذا يدل على أنه لا توجد علاقة بين العامل والمتغير التابع. وعلى الوجه الآخر لو قاد اختبار F إلى القرار بأن متوسطات مستويات العامل تختلف فإن هذا يتضمن وجود علاقة بين العامل والمتغير التابع. وفي هذه الحالة نقوم عادة بتحليل شامل لطبيعة تأثيرات مستويات العامل. ويتم هذا بطريقتين رئيستين:

١- تحليل مباشر لتأثيرات مستويات العامل التي تهمنا باستخدام تقنيات التقدير.

٢- إجراء اختبارات إحصائية بالنسبة لتأثيرات مستويات العامل التي تهمنا.

وسنشرح كلا من هاتين الطريقتين على حدة، ولكن سنركز على أسلوب التقدير نظرا لأهميته البالغة وسنستمر في هذا الفصل بافتراض نموذج التحاين I. وقد عرضنا لنسخة متوسطات الخلايا من هذا النموذج في (14.2):

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \qquad (15.1)$$

حيث:

μ_i معالم

ε_{ij} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

(١٥-١) الرسوم البيانية لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة

قبل القيام بتحليل رسمي لطبيعة تأثيرات مستويات العامل، فمن المفيد عادة فحص تأثيرات العامل هذه بشكل غير رسمي، وذلك برسم لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة $\bar{Y}_{i.}$. وسنعرض إلى نوعين من الرسوم:

(١) رسم خط، وهو مناسب سواء أكانت حجوم العينات n_i متساوية أم لا و(٢) رسم احتمال طبيعي وهو مناسب عندما تكون حجوم العينات n_i متساوية.

رسم خط

يوضح رسم الخط لمتوسطات مستويات العامل ببساطة مواقع $\bar{Y}_{i.}$ على تدريج خطي وهذه وسيلة بسيطة جدا ولكنها فعالة لتبين ما إذا كان واحد أو أكثر من متوسطات مستويات العامل مختلفا جذريا عن البقية.

مثال. بالرجوع إلى مثال شركة كنتون للأغذية في الفصل الرابع عشر، نعيد في الجدول (١٥-١) عرض النتائج الأساسية للدراسة بشكل مختصر. وفي الشكل (١٥-١) نقدم رسم خط لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة $\bar{Y}_{i.}$. ويتضح من الشكل (١٥-١) أن التصميم 4 أعطى إلى حد بعيد أعلى متوسط مبيعات في هذه الدراسة، وأن التصميمين 1 و 2 أعطيا متوسطي مبيعات متقاربين، والهدف من طرق الاستقراء الرسمية والتي سنعرض لها قريبا هو تزويدنا بمعلومات عما إذا كان النمط الذي لاحظناه هنا هو ببساطة نتيجة تغير عشوائي، أو أنه يعكس فروقا حقيقية بين متوسطات مستويات العامل μ_i.

رسم احتمال طبيعي

يعتبر رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة أن $\bar{Y}_{i.}$ تخضع لتباين عشوائي ويسمح للمرء بأن يقوّم بطريقة غير رسمية ما إذا كانت الفروق في المتوسطات المقدَّرة تعكس تأثيرات حقيقية. ويتطلب استخدام رسوم الاحتمال الطبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة أن تكون حجوم العينات جميعها متساوية، وبمعنى آخر، أن تكون $n_i \equiv n$.

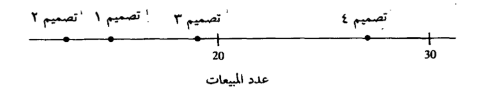
جدول (١٥-١) تلخيص لنتائج مثال شركة كنتون للأغذية التي حصلنا عليها في الفصل ١٤.

	تصميم غلاف (i)				
	1	2	3	4	المجموع
n_i	2	3	3	2	10
$Y_{i.}$	30	39	57	54	180
$\bar{Y}_{i.}$	15	13	19	27	18

مصدر التغير	SS	df	MS
بين التصماميم	258	3	86
الخطأ	46	6	7.67
المجموع	304	9	

تصميم غلاف	المميزات
1	3 ألوان مع صور من الرسوم المتحركة
2	3 ألوان بدون صور من الرسوم المتحركة
3	5 ألوان مع صور من الرسوم المتحركة
4	5 ألوان بدون صور من الرسوم المتحركة

شكل (١٥-١) رسم خط لمتوسطات مستويات العامل المقدّرة- مثال شركة كنتون للأغذية.



ولقد تطرقنا إلى الرسوم الاحتمال الطبيعي للرواسب في الفصل الرابع. ورسمنا هناك الرواسب مقابل قيمها المتوقعة تحت الطبيعية، المعطاة في (4.6). ونفترض هنا أن المشاهدات Y_{ij} تتبع التوزيع الطبيعي بتباين ثابت σ^2. والحالة التي نختبرها هي كون

متوسطات مستويات العامل μ_i متساوية أم لا. وإذا كان الأمر كذلك، فسيكون للمتوسطات المقدَّرة $\bar{Y}_{i.}$ القيمة المتوقعة نفسها والتباين نفسه (وذلك لأن Y_{ij} لها تباين ثابت ولأن حجوم العينات متساوية)، ولذلك عندما تكون متوسطات مستويات العامل متساوية، فينبغي أن تسلك المتوسطات المقدَّرة سلوك مشاهدات عشوائية من التوزيع نفسه وذلك عند رسمها في رسم احتمال طبيعي. وهكذا فإن الحيدان الكبير عن النمط الخطي للرسم يشير إلى أن متوسطات مستويات العامل غير متساوية، وقد تقترح طبيعة الرسم المتوسط إياه الذي يختلف عن البقية.

وعندما تكون كل متوسطات مستويات العامل μ_i متساوية، فإن القيمة المتوقعة لمتوسط مستوى العامل المقدر ذي الرتبة i هي على وجه التقريب:

$$\text{القيمة المتوقعة} = \bar{Y}_{..} + z\left(\frac{i-.375}{r+.25}\right)\sqrt{\frac{MSE}{n}} \qquad (15.2)$$

حيث، حد الجذر التربيعي هو الانحراف المعياري المقدر لـ $\bar{Y}_{i.}$، $i = 1, \ldots, r$، كما سنوضح بعد قليل. وعوضا عن رسم متوسطات مستويات العامل المقـدَّرة $\bar{Y}_{i.}$ مقابل قيمها المتوقعة، كما فعلنا في الرسوم الرواسب، فسيكون رسم $\bar{Y}_{i.}$ مقابل مئينات التوزيع الطبيعي أكثر فعالية. وبما أن القيم المتوقعة دوال خطية في المئينات، فإن النمط الخطي للرسم سيبقى مصونا، سواء رسمنا مقابل المئينات أو مقابل القيم المتوقعة. وسنرسم، أيضا، الخط :

$$y = \text{القيمة المتوقعة}$$

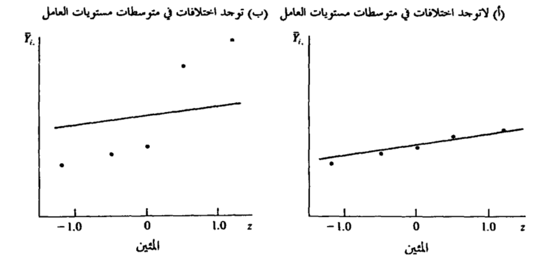
على الرسم البياني نفسه ليخدم كخط مرجعي يساعد في الحكم على ما إذا كان أي من المتوسطات المقدَّرة $\bar{Y}_{i.}$ بعيدا عن قيمته المتوقعة.

يوضح الشكل (١٥-٢)أ نموذجا لنمط يدل على أن جميع متوسطات المعالجات متساوية. فكل النقاط قريبة من الخط المرجعي y = القيمة المتوقعة، ولذلك فإن نمط النقاط خطي بشكل معقول.

ويوضح الشكل (١٥-٢)ب نموذجاً لنمط تقترح القفزة في نقاطه أن متوسطي مستويي العامل الأكبر يختلفان عن بقية متوسطات مستويات العامل الثلاثة الأخرى. وكون نقاط متوسطات مستويات العامل الثلاثة الصغيرة $\bar{Y}_{i.}$ تتبع نمطا خطيا موازيا تقريبا للخط المرجعي y = القيمة المتوقعة، فإن هذا يقترح أن متوسطات مستويات العامل هذه لايختلف بعضها عن بعض. والانحرافات الكبيرة لهذه النقاط عن الخط المرجعي هو نتيجة لفرق كبير بين المجموعتين من متوسطات مستويات العامل.

شكل (١٥-٢) نماذج لرسوم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات عامل مقدّرة

(أ) لاتوجد اختلافات في متوسطات مستويات العامل (ب) توجد اختلافات في متوسطات مستويات العامل



مثال. في دراسة لكفاءة أنواع مختلفة من موانع الصدأ، اختيرت أربعة أنواع ($A, B,$ C, D) وخصصت 40 وحدة تجريبية بشكل عشوائي إلى الأنواع الأربعة بحيث خصص لكل نوع 10 وحدات. وبعد تعريض الوحدات التجريبية إلى ظروف طقس قاسية حصلنا على النتائج الموضحة على شكل رموز في الجدول (١٥-٢)أ. وكلما زادت القيمة الرمزية كلما كان مانع الصدأ أكثر فعالية. ولاحظ في الجدول (١٥-٢)أ أن

المعالجات معطاة في أعمدة وذلك لاعتبارات تتعلق بمخطط العرض.

ويوضح الجدول (١٥-٢)ب تحليل التباين. وباستخدام مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ لاختبار ماإذا كان هناك اختلاف في فعالية موانع الصدأ الأربعة أم لا، فإننا نحتاج إلى القيمة $F(.95; 3,36) = 2.87$ ،وباستخدام قيمة متوسط المربعات من الجدول (١٥-٢)ب تكون قيمة إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{5,317.82}{6.140} = 866.1$$

وبما أن $2.87 < 866.1 = F^*$ فنستنتج أن موانع الصدأ الأربعة تختلف في فعاليتها والقيمة -P للاختبار هي 0^+ .

جدول (١٥-٢) البيانات ونتائج تحليل التباين لمثال موانع الصدأ (البيانات مرمزة)

(أ) البيانات

j	A $i=1$	B $i=2$	C $i=3$	D $i=4$
	صنف مانع الصدأ			
1	43.9	89.8	68.4	36.2
2	39.0	87.1	69.3	45.2
3	46.7	92.7	68.5	40.7
4	43.8	90.6	66.4	40.5
5	44.2	87.7	70.0	39.3
6	47.7	92.4	68.1	40.3
7	43.6	86.1	70.6	43.2
8	38.9	88.1	65.2	38.7
9	43.6	90.8	63.8	40.9
10	40.0	89.1	69.2	39.7
$\bar{Y}_{i.}$	43.14	89.44	67.95	40.47

(ب) تحليل التباين

تحليل التباين	SS	df	MS
مابين الأصناف	15,953.47	3	5,317.82
الخطأ	221.03	36	6.140
المجموع	16,174.50	39	

ويحوي الشكل (١٥-٣)أ رسم خط لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة $\bar{Y}_{i.}$. ويقترح هذا الرسم أن الصنفين B و C قد أعطيا نتائج أفضل بكثير، في المتوسط، من الصنفين الآخرين.

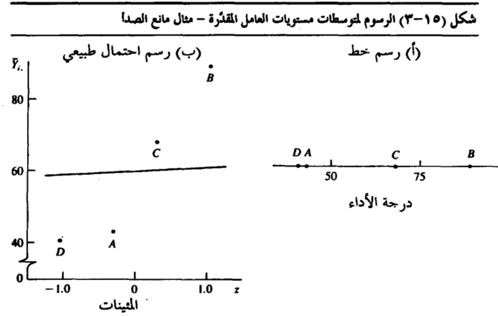
وقبل أن نحضّر لرسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة، فإننا نسردها بترتيب تصاعدي في العمود الأول من الجدول (١٥-٣)، ويبين العمود الثاني المئينات الطبيعية المعيارية، بينما يبين العمود الثالث القيم المتوقعة للمتوسطات المقدَّرة المرتبة تحت فرضية أن متوسطات مستويات العامل متساوية. ونبين الحسابات بالنسبة لأصغر متوسط مستوى عامل، ودليل ترتيبه $i = 1$، فالمئين الطبيعي المعياري المطلوب هو:

$$z\left(\frac{i-.375}{r+.25}\right)=z\left(\frac{1-.375}{4+.25}\right)=z(.147)=-1.049$$

ونعرف من الجدول (١٥-٢) أن $\bar{Y}_{..}=60.25$ و $MSE = 6.140$ ،وباستخدام (15.2) نحصل على القيمة المتوقعة التقريبية:

$$60.25+(-1.049)\sqrt{\frac{6.140}{10}}=59.4$$

شكل (١٥-٣) الرسوم لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة – مثال مانع الصدأ



ويوضح العمود الثالث في الجدول (١٥-٣) القيم المتوقعة لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة الأخرى التي حُسبت بالطريقة نفسها.

ويحوي الشكل (١٥-٣)ب رسم الاحتمال الطبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة في مثال مانع الصدأ. وهو يقترح بقوة، مثلما اقترح رسم الخط في شكل (١٥-٣)أ، أن موانع الصدأ الأربعة تختلف في فعاليتها، ذلك لأن النقاط تحيد بشكل كبير عن الخط المرجعي. وبالإضافة إلى ذلك يقترح رسم الاحتمال الطبيعي أن مانعي الصدأ B و C قد أديا إلى نتائج أفضل من مانعي الصدأ A و D .

جدول (١٥-٣) متوسطات مستويات العامل المقدَّرة $\overline{Y}_{i.}$ والقيم المتوقعة تحت فرضية تساوي الـ μ_i - مثال مانع الصدأ

الترتيب التصاعدي i	(1) المتوسطات المتبة $\overline{Y}_{i.}$	(2) $z\left(\frac{i-.375}{4+.25}\right)$	(3) القيمة المتوقعة تحت فرضية التساوي
1	40.5	-1.049	59.4
2	43.1	-.299	60.0
3	68.0	.299	60.5
4	89.4	1.049	61.1

$$\overline{Y}_{..} = 60.25$$

$$\sqrt{\frac{MSE}{n}} = \sqrt{\frac{6.140}{10}} = .784$$

وبالإضافة إلى ذلك، فإن رسم الاحتمال الطبيعي يقترح أن متوسط الأداء لكل من الصنفين A و D قد يكونا متساويين، ذلك لأن هاتين النقطتين تشكلان خطا موازيا تقريبا للخط المرجعي، ومن جهة أخرى يبدو متوسط الأداء لمانع الصدأ B أكبر من متوسط الأداء لمانع الصدأ C، وذلك لأن هاتين النقطتين تشكلان خطا ميله أكبر بكثير من ميل الخط المرجعي.

ونحتاج الآن إلى طرق استقراء رسمية لتأكيد الاقتراحات التي حصلنا عليها من الرسوم البيانية.

(١٥-٢) تقدير تأثيرات مستويات عامل

تتضمن تقديرات تأثيرات مستويات عامل عادة:

١- تقدير متوسط مستوى عامل μ_i .

٢- تقدير الفرق بين متوسطي مستويي عامل.

٣- تقدير متضادة بين متوسطات مستويات عامل.

٤- تقدير تركيب خطي في متوسطات مستويات عامل.

وسنناقش كلا من هذه الأنواع الأربعة من التقدير على التوالي.

تقدير متوسط مستوى عامل

لقد حصلنا على مقدّر نقطي غير منحاز لمتوسط مستوى عامل μ_i في (14.14):

$$\hat{\mu}_i = \bar{Y}_{i.} \tag{15.3}$$

ولهذا المقدّر متوسط وتباين هما:

$$E\{\bar{Y}_{i.}\} = \mu_i \tag{15.4a}$$

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{i.}\} = \frac{\sigma^2}{n_i} \tag{15.4b}$$

وحصلنا على النتيجة الأخيرة لأن (14.41) تدل على أن $\bar{Y}_{i.} = \mu_i + \bar{\varepsilon}_{i.}$ ، أي مجموع عدد ثابت ومتوسط n_i من الحدود المستقلة ε_{ij}، تباين كل منها σ^2. وإضافة إلى ذلك، فإن $\bar{Y}_{i.}$ تتبع التوزيع الطبيعي لأن حدود الخطأ ε_{ij} متغيرات عشوائية مستقلة طبيعية.

ونرمز لتقدير تباين الـ $\bar{Y}_{i.}$ بـ $s^2\{\bar{Y}_{i.}\}$ ونحصل عليه كالمعتاد بإحلال التقدير النقطي غير المنحاز MSE محلّ σ^2 في (15.4b):

$$s^2\{\bar{Y}_{i.}\} = \frac{MSE}{n_i} \tag{15.5}$$

والانحراف المعياري المقدر $s\{\bar{Y}_{i.}\}$ هو الجذر التربيعي الموجب لـ (15.5).

ويمكن إثبات أن:

$$\frac{\overline{Y}_{i.}-\mu_i}{s\{\overline{Y}_{i.}\}} \quad \text{تتبع توزيع } t\,(n_T - r) \text{ لنموذج التحاين (15.1).} \tag{15.6}$$

حيث درجات الحرية هي تلك المصاحبة لـ MSE. وتتبع النتيجة (15.6) من تعريف t في (1.41) وذلك لأن : (١) $\overline{Y}_{i.}$ تتبع التوزيع الطبيعي (٢) MSE/σ^2 تتوزع مستقلة عن $\overline{Y}_{i.}$ وفق التوزيع $\chi^2(n_T - r)/(n_T - r)$ وذلك وفقا للنظرية التالية:

في نموذج التحاين (15.1)، يتبع SSE / σ^2 التوزيع χ^2 بـ n_{T-r} درجة حرية وهو مستقل عن $\overline{Y}_{1.},\ldots,\overline{Y}_{r.}$

ومن (15.6) مباشرة نستنتج أن حدي الثقة لـ μ_i بمعامل ثقة $(1-\alpha)$ هما:

$$\overline{Y}_{i.} \pm t(1-\alpha/2; n_T - r)\, s\{\overline{Y}_{i.}\} \tag{15.8}$$

مثال. يرغب مدير المبيعات، في مثال شركة كنتون للأغذية، بتقدير متوسط المبيعات لتصميم الغلاف 1 بـ 95% معامل ثقة.

وباستخدام النتائج من جدول (١٥-١) نجد:

$$\overline{Y}_{1.} = 15 \qquad n_1 = 2 \qquad MSE = 7.67$$

ونحتاج لقيمة $t(.975;6)$ ومن الجدول A-2 في الملحق نجد أن $t(.975\ ;\ 6) = 2.447$

ونحتاج أخيرا لقيمة $s\{\overline{Y}_{1.}\}$. فنجد:

$$s^2\{\overline{Y}_{1.}\} = \frac{MSE}{n_1} = \frac{7.67}{2} = 3.835$$

و تكون قيمة $s\{\overline{Y}_{1.}\} = 1.958$. وبالتالي نحصل على حدي الثقة $15 \pm 2.447(1.958)$ وعلى فترة الثقة:

$$10.2 \le \mu_1 \le 19.8$$

وهكذا، فإننا نقدر وبمعامل ثقة 0.95، بأن متوسط مبيعات المحل الواحد لتصميم الغلاف 1 يقع بين 10.2 و 19.8 علبة.

تقدير الفرق بين متوسطي مستويي عامل

غالبا مانقارن معالجتين أو مستويي عامل عن طريق تقدير الفرق D بين متوسطي مستويي العامل ولنقل μ_i و $\mu_{i'}$:

$$D = \mu_i - \mu_{i'} \tag{15.9}$$

وسندعو هذا الفرق بين متوسطي مستويي عامل مقارنة ثنائية. والمقدر النقطي لـ (15.9)، ونرمز له بـ $\hat{D}$ ، هو:

$$\hat{D}=\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{i'.} \qquad (15.10)$$

وهذا المقدر النقطي غير منحاز.

$$E\{\hat{D}\}=\mu_i-\mu_{i'} \qquad (15.11)$$

وبما أن $\overline{Y}_{i.}$ و $\overline{Y}_{i.}'$ مستقلان، فإن تباين $\hat{D}$ يتبع من (1.28b):

$$\sigma^2\{\hat{D}\}=\sigma^2\{\overline{Y}_{i.}\}+\sigma^2\{\overline{Y}_{i'.}\}=\sigma^2\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}\right) \qquad (15.12)$$

والتباين المقدر لـ $\hat{D}$ ، ونرمز له بـ $s^2\{\hat{D}\}$ ، هو :

$$s^2\{\hat{D}\}=MSE\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}\right) \qquad (15.13)$$

وأخيرا فإن $\hat{D}$ تتبع التوزيع الطبيعي وذلك من (1.37) لأن $\hat{D}$ تركيب خطي في متغيرات طبيعية مستقلة.

وينتج من هذه الخصائص ومن نظرية (15.7) ومن تعريف t في (1.41) أن:

$$\frac{\hat{D}-D}{s\{\hat{D}\}} \qquad (15.14)$$ تتبع توزيع $t(n_T-r)$ لنموذج التحاين (15.1)

وبالتالي، فإن $(1-\alpha)$ حدي ثقة لـ D هما:

$$\hat{D}\pm t(1-\alpha/2;n_T-r)s\{\hat{D}\} \qquad (15.15)$$

مثال. في مثال شركة كنتون للأغذية، إستخدمت في تصميم الغلاف 1 و 2 الطباعة بثلاثة ألوان، بينما استخدمت في تصميمي الغلاف 3 و 4 الطباعة بخمسة ألوان كما هو موضح في جدول (١٥-١). ونرغب في تقدير الفرق في متوسط المبيعات للتصاميم التي استخدمت خمسة ألوان، أي التصاميم 3 و 4 وذلك باستخدام 95% فترة ثقة. أي أننا نرغب في تقدير الفرق $D=\mu_3-\mu_4$. ونجد من جدول (١٥-١) ما يلي:

$$\overline{Y}_{3.}=19 \qquad n_3=3 \qquad MSE=7.67$$
$$\overline{Y}_{4.}=27 \qquad n_4=2$$

ولذلك:

$$\hat{D}=\overline{Y}_{3.}-\overline{Y}_{4.}=19-27=-8$$

ويكون تباين $\hat{D}$ المقدر هو :

$$s^2\{\hat{D}\}=MSE\left(\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}\right)=7.67\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=6.392$$

وبذلك يكون تقدير الانحراف المعياري لـ $\hat{D}$ هو $s\{\hat{D}\}=2.528$ ونحتاج إلى قيمة $t(.975;6)=2.447$. وبالتالي يكون حدا الثقة هما (2.528) 2.447 ± 8 - والـ 95% فترة الثقة المطلوبة هي:

$$-14.2\leq \mu_3-\mu_4\leq -1.8$$

وهكذا فإننا نقدر بـ 0.95 معامل ثقة أن متوسط المبيعات للتصميم 3 أقل منه في التصميم 4 بما يتراوح بين 1.8 و 14.2 علبة للمحل الواحد.

تقدير متضادة

المتضادة هي مقارنة تنطوي على إثنين أو أكثر من متوسطات مستويات عامل وهي بذلك تتضمن الحالة السابقة أي الفرق مثنى مثنى بين متوسطي مستويي عامل في (15.9). وسنرمز للمتضادة بـ L وتُعّرف كتركيب خطي في متوسطات مستويات عامل μ_i بحيث يكون مجموع المعاملات C_i مساويا للصفر.

$$L=\sum_{i=1}^{r}c_i\mu_i \qquad \text{حيث} \qquad \sum_{i=1}^{r}c_i=0 \tag{15.16}$$

توضيحات لمتضادات. سوف نوضح بعض المتضادات بالرجوع إلى مثال شركة كنتون للأغذية. تذكّر أن التصميمين 1 و 2 استخدما الطباعة بثلاثة ألوان، بينما استخدم التصميمان 3 و 4 الطباعة بخمسة ألوان. وبالإضافة إلى ذلك، وكما نرى من الجدول (١٥-١)، فإن التصميمين1 و 3 استخدما صور الرسوم المتحركة، بينما لم يستخدم التصميمان 2 و 4 صور الرسوم المتحركة.

١- المقارنة بين متوسطي المبيعات للتصميمين اللذين استخدما ثلاثة ألوان هي:

$$L=\mu_1-\mu_2$$

وهنا تكون $C_1=1$ ، $C_2=-1$ ، $C_3=0$ ، $C_4=0$ و $\sum C_i=0$.

٢- المقارنة بين متوسط مبيعات التصاميم التي تستخدم ثلاثة ألوان و التصاميم التي

تستخدم خمسة ألوان هي:

$$L=\frac{\mu_1+\mu_2}{2}-\frac{\mu_3+\mu_4}{2}$$

حيث : $C_1=\frac{1}{2}, C_2=\frac{1}{2}, C_3=\frac{-1}{2}, C_4=-\frac{1}{2}$ و $\Sigma C_i=0$.

٣- المقارنة بين متوسط مبيعات التصاميم التي تستخدم صور الرسوم المتحركة والتصاميم التي لا تستخدمه هي:

$$L=\frac{\mu_1+\mu_3}{2}-\frac{\mu_2+\mu_4}{2}$$

حيث $C_1=\frac{1}{2}, C_2=-\frac{1}{2}, C_3=\frac{1}{2}, C_4=-\frac{1}{2}$ و $\Sigma C_i=0$.

لاحظ أن المتضادة الأولى هي ببساطة مقارنة ثنائية. ونقارن في المتضادة الثانية والثالثة معدلات عدة متوسطات مستويات عامل. والمعدلات التي استُخدمت هنا هي معدلات غير مرجحة للمتوسطات μ_i، ومثل هذه المعدلات هي في العادة مثار الإهتمام. ومن الممكن أن يهتم المرء في حالات خاصة بمعدلات مرجحة لـ μ_i وذلك لوصف متوسط الاستجابة لمجموعة من عدة مستويات عامل. فعلى سبيل المثال، لو أن كلا من تصاميم الثلاثة ألوان والخمسة ألوان كانت ستُدرس بحيث تستخدم تصاميم الثلاثة ألوان أكثر بثلاثة أضعاف من تصاميم الخمسة ألوان، فإن مقارنة تأثير وجود صور الرسوم المتحركة مع عدم وجودها يمكن أن تُبنى على المقارنة:

$$L=\frac{3\mu_1+\mu_3}{4}-\frac{3\mu_2+\mu_4}{4}$$

حيث : $C_1=\frac{3}{4}, C_2=-\frac{3}{4}, C_3=\frac{1}{4}, C_4=-\frac{1}{4}$ و $\Sigma C_i=0$.

فترة الثقة لمتضادة. المقدَّر غير المنحاز للمتضادة L هو:

$$\hat{L}=\sum_{i=1}^{r} c_i \bar{Y}_{i.} \tag{15.17}$$

وبما أن الـ $\bar{Y}_{i.}$ ، مستقلة، فإن تباين $\hat{L}$ وفقا لـ (1.28) هو :

$$\sigma^2\{\hat{L}\}=\sum_{i=1}^{r} c_i^2 \sigma^2\{\bar{Y}_{i.}\}=\sum_{i=1}^{r} c_i^2\left(\frac{\sigma^2}{n_i}\right)=\sigma^2\sum_{i=1}^{r}\frac{c_i^2}{n_i} \tag{15.18}$$

و المقدَّر غير المنحاز لهذا التباين هو:

$$s^2\{\hat{L}\} = MSE\sum_{i=1}^{r}\frac{c_i^2}{n_i} \qquad (15.19)$$

ووفقا لـ (1.37) يتوزع $\hat{L}$ طبيعيا باعتباره تركيبا خطيا في متغيرات عشوائية طبيعية مستقلة. و يمكن، بواسطة النظرية (15.7) وخصائص $\hat{L}$ التي ذكرناها سابقا وتعريف t، إثبات أن:

$$\frac{\hat{L}-L}{s\{\hat{L}\}} \qquad (15.20)$$

تتبع توزيع $t(n_T - r)$ لنموذج التحاين (15.1)

ووفقا لذلك، فإن $(1 - \alpha)$ حدي ثقة لـ L هما:

$$\hat{L} \pm t(1-\alpha/2; n_T - r)s\{\hat{L}\} \qquad (15.21)$$

مثال. في مثال شركة كنتون للأغذيـة، نرغب في مقارنة متوسط المبيعات لتصاميم الخمسة ألوان بمتوسط المبيعات لتصاميم الثلاثة ألوان. ولنقدر هذا التأثير بـ 95% فترة ثقة. فما نرغبه هو تقدير:

$$L = \frac{\mu_1+\mu_2}{2} - \frac{\mu_3+\mu_4}{2}$$

والتقدير النقطي هو (انظر البيانات في جدول ١٥-١):

$$\hat{L} = \frac{\overline{Y}_{1.}+\overline{Y}_{2.}}{2} - \frac{\overline{Y}_{3.}+\overline{Y}_{4.}}{2} = \frac{15+13}{2} - \frac{19+27}{2} = -9$$

وبما أن $C_1 = \frac{1}{2}$ و $C_2 = \frac{1}{2}$ و $C_3 = \frac{-1}{2}$ و $C_4 = \frac{-1}{2}$ فنحصل على:

$$\sum\frac{c_i^2}{n_i} = \frac{(1/2)^2}{2} + \frac{(1/2)^2}{3} + \frac{(-1/2)^2}{3} + \frac{(-1/2)^2}{2} = \frac{5}{12} = .4167$$

ويكون:

$$s^2\{\hat{L}\} = MSE\sum\frac{c_i^2}{n_i} = 7.67(.4167) = 3.196$$

بحيث أن : $s\{\hat{L}\} = 1.79$

ومن أجل 95 بالمائة معامل ثقة، نحتاج لقيمة $t(.975; 6) = 2.447$ ، وهكذا، فإن حدي الثقة لـ L هما : $-9 \pm 2.447(1.79)$ ، وتكون فترة الثقة المطلوبة هي:

$$-13.4 \le L \le -4.6$$

وبالتالي نستنتج بـ 95. معامل ثقة أن متوسط المبيعات لتصاميم الثلاثة ألوان أقل

من متوسطات المبيعات لتصاميم الخمسة ألوان بما يتراوح بين 4.6 و 13.4 علبة للمحل الواحد.

ملاحظة

تمكّننا النظرية (15.20) من اختبار أي فرضية تتعلق بمتضادة L بواسطة الاختبار t. وتدعى اختبارات كهذه اختبارات درجة واحدة من الحرية، وسنناقشها في الفقرة (١٥-٦).

تقدير تركيب خطي

نهتم، من حين لآخر، بتركيب خطي في متوسطات مستويات عامل لايشكل متضادة. فمثلاً، افترض أن شركة كنتون للأغذية ستستخدم كل تصاميم الغلاف الأربعة بحيث تستخدم كل تصميم في واحد من أربع مناطق تسويق رئيسة للشركة، وأن نسبة مبيعات الشركة في كل من هذه المناطق هو 35 ,28 ,12 و25 في المئة على الترتيب. وفي هذه الحالة قد نهتم بمتوسط المبيعات الإجمالي للمحل الواحد في المناطق جميعا:

$$L = .35\mu_1 + .28\mu_2 + .12\mu_3 + .25\mu_4$$

لاحظ أن هذا التركيب الخطي من الشكل $L = \sum C_i\mu_i$ ولكن مجموع المعاملات C_i يساوي 1 وليس الصفر كما يجب أن يكون في حالة متضادة.

ونعرف التركيب الخطي في متوسطات مستويات عامل μ_i كما يلي:

$$L = \sum_{i=1}^{r} c_i \mu_i \tag{15.22}$$

دون أية قيود على المعاملات C_i .

ونحصل على حدي ثقة لِـ L بالطريقة نفسها تماما التي حصلنا عليها في حالة متضادة، وذلك من العلاقة (15.21)، مستخدمين المقدّر النقطي (15.17) والتباين المقدّر (15.19).

الحاجة إلى طرق المقارنات المتعددة

هناك نقطتا قصور مهمتان لطرق تقدير تأثيرات مستويات عامل والتي نوقشت

حتى هذه النقطة هما:

١ـ معامل الثقة $1 - \alpha$ ينطبق، فقط، على تقدير معين بذاته وليس على سلسلة من التقديرات.

٢ـ معامل الثقة $1 - \alpha$ مناسب، فقط، إذا لم يكن التقدير قد اقتُرح بواسطة البيانات.

ونقطة القصور الأولى مألوفة في تحليل الانحدار. وهي على وجه الخصوص، مهمة في نماذج تحليل التباين لأن العديد من المقارنات المختلفة تكون في الغالب ذات أهمية هنا ونحتاج إلى ربط النتائج بعضها ببعض. اعتبر مثلاً الحالة البسيطة جدا حيث نقارن كفاءة ثلاث أنواع مختلفة من الإعلان في ترويج المبيعات. وحصلنا على التقديرات التالية لفعالياتها المقارنة، وكل من هذه المقارنات بـ 95% معامل ثقة:

$$59 \leq \mu_2 - \mu_1 \leq 62$$
$$-2 \leq \mu_3 - \mu_1 \leq 3$$
$$58 \leq \mu_2 - \mu_3 \leq 64$$

وقد يكون من الطبيعي هنا أن نربط المقارنات المختلفة معا ونستنتج أن الدعاية 2 تقود إلى أعلى متوسط مبيعات، بينما الدعايتان 1 و 3 أقل كفاءة بشكل كبير ولاتختلفان كثيرا فيما بينهما. ويرغب المرء بالتالي في الحصول على معامل ثقة عائلي لهذه العائلة من العبارات يمنحه درجة معلومة من الاطمئنان إلى أن جميع العبارات في هذه العائلة صحيحة.

أما نقطة القصور الثانية عند تقدير تأثيرات مستويات عامل، ونعني أن التقدير يجب ألا يُقترح بواسطة البيانات، فهي نقطة مهمة في الدراسات الاستطلاعية حيث يمكن أن يطرأ العديد من التساؤلات عند تحليل البيانات. وتسمى عملية دراسة تأثيرات اقترحتها البيانات "بالتطفل على البيانات".إذ ينحو المحللون، في الغالب، إلى تقصّي مقارنات يبدو من بيانات العينة أن تأثيرها كبير. والآن قد تبدو التأثيرات كبيرة لأنها في الحقيقة كذلك، أو لأن واقعة عشوائية جعلتها تبدو كبيرة مع أنها ليست كذلك. وبالتالي فإن الاقتصار على تقصّي المقارنات التي يبدو تأثيرها كبيرا يتضمن أن معامل الثقة سيكون أصغر مما هو محدد له لو اتفق أن كان التأثير في الحقيقة صغيرا أو غير

موجود البتة. وفي الحقيقة، يمكن إثبات أنه إذا كان يراد مقارنة متوسطات ست مستويات عامل وأن المحلل سيقارن دائما متوسطات أكبر وأصغر تقدير لمتوسطات العامل مستخدما حدي الثقة (15.15) بـ 95% معامل ثقة، فسيقترح التقدير بفترة وجود تأثير حقيقي في 40 في المئة من المرات، وذلك عندما لايوجد، في الحقيقة، فرق بين أي من متوسطات مستويات العامل (المرجع 15.1). ومع عدد أكبر من مستويات العامل، فإن احتمالية الاقتراح المضلل بوجود تأثير حقيقي ستكون أكبر.

وأحد الحلول لمشكلة القيام بمقارنات يقترحها التحليل المبدئي للبيانات هو استخدام طريقة المقارنات المتعددة بحيث تتضمن عائلة العبارات جميع العبارات التي يتوقع المجرب أن يقوم بها بعد فحص البيانات، فعلى سبيل المثال، في دراسة تتم فيها دراسة خمسة مستويات لعامل، تقرر مسبقا أن الاهتمام سينصب على ثلاث مقارنات ثنائية. ولكن اتُفق، ايضا، أنه تنبغي، بالإضافة إلى ذلك، دراسة أية مقارنات ثنائية ستبدو مهمة فيما بعد. وفي هذه الحالة يمكن للمرء أن يستخدم كل المقارنات الثنائية كأساس للحصول على معامل ثقة عائلي مناسب للمقارنات التي اقتُرحت من البيانات.

وسنناقش في الفقرات الثلاث القادمة ثلاث طرق للمقارنات المتعددة لنماذج تحليل التباين وهي تسمح بالتحكم في معامل الثقة العائلي. وطريقتان من بين هذه الطرق تسمحان بالتطفل على البيانات دون أن يتأثر بذلك معامل الثقة ولقد تعرضنا إلى طريقتين من هذه الطرق الثلاث من قبل هما طريقتا شيفّه وبونفيروني. أما طريقة توكي فهي طريقة جديدة وسنقوم بمناقشتها أولاً.

(١٥–٣) طريقة توكي للمقارنات المتعددة

يمكن تطبيق طريقة توكي للمقارنات المتعددة التي سندرسها هنا عندما تكون العائلة التي تهمنا هي مجموعة كل المقارنات مثنى مثنى لمتوسطات مستويات عامل، وبمعنى آخر، تحوي العائلة على تقديرات لجميع الأزواج $D = \mu_i - \mu_{i'}$. وعندما تكون حجوم العينات جميعها متساوية، فإن معامل الثقة العائلي لطريقة توكي هو بالضبط α - 1 . وعندما تكون حجوم العينات غير متساوية، فإن معامل الثقة العائلي سيكون أكبر من

α - 1، وبمعنى آخر، فإن طريقة توكي تكون عندئذ محافظة.

توزيع المدى المعيّر تقديرا

تستخدم طريقة توكي توزيع المدى المعيَّر تقديرا. فلنفترض أن لدينا r من المشاهدات المستقلة $Y_1, \ldots, Y_r$ من توزيع طبيعي بمتوسط μ وتباين σ^2 . وليكن w مدى هذه المجموعة من المشاهدات، فيكون:

$$w = \max(Y_i) - \min(Y_i) \qquad (15.23)$$

وبالإضافة إلى ذلك، لنفترض أن لدينا تقديرا للتباين σ^2، وهو s^2، قائما على v درجة حرية ومستقلا عن الـ Y_i. فعندئذ تدعى النسبة w/s المدى المعيّر تقديرا. ونرمز له بـ:

$$q(r,v) = \frac{w}{s} \qquad (15.24)$$

حيث تذّكرنا الرموز داخل الأقواس أن توزيع q يعتمد على r و v . ولقد تمت جدولة توزيع q، ويقدم الجدول 9 - A مختارات من مئينات هذا التوزيع.

وهذا الجدول سهل الاستخدام. افترض أن $r = 5$ و $v = 10$. فيكون المئين 95 هو $q\,(.95; 5,10) = 4.65$ وهو يعني أن:

$$P\left\{\frac{w}{s} = q(5,10) \le 4.65\right\} = .95$$

وهكذا، لو كان لدينا خمس مشاهدات Y من التوزيع الطبيعي، فباحتمال 95. لن يكون مداها أكبر من 4.65 ضعفا لانحراف عينة معياري مستقل مبني على 10 درجات حرية.

فترات ثقة لمقارنات متعددة

إن حدي ثقة مقارنات توكي المتعددة لكل المقارنات الثنائية $D = \mu_i - \mu_{i'}$ بمعامل ثقة عائلي α - 1 على الأقل هما كما يلي:

$$\hat{D} \pm T s\{\hat{D}\} \qquad (15.25)$$

حيث:

$$\hat{D} = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{i'.} \qquad (15.25a)$$

$$s^2\{\hat{D}\} = s^2\{\bar{Y}_{i.}\} + s^2\{\bar{Y}_{i'.}\} = MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n'_i}\right) \qquad (15.25b)$$

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}q(1-\alpha;r,n_T-r) \qquad (15.25c)$$

لاحظ أن المقدَّر النقطي $\hat{D}$ في (15.25a) والتباين المقدّر في (15.25b) هما نفساهما المذكوران في (15.10) و (15.13) لمقارنة ثنائية بمفردها. ولذلك فإن الفرق الوحيد بين حدي الثقة ، في (15.25) للمقارنات المتزامنة وما يقابلها في (15.15) لمقارنة واحدة هو مضاعف الانحراف المعياري المقدَّر.

ويشير معامل الثقة العائلي $1 - \alpha$ المتعلق بالمقارنات الثنائية المتعددة إلى النسبة عائلات المقارنات الثنائية الصحيحة عندما نكرر اختيار مجموعات من العينات ونحسب جميع فترات الثقة الثنائية في كل مرة. وتُعتبر عائلة من المقارنات الثنائية صحيحة إذا كانت كل مقارنة ثنائية في العائلة صحيحة. وهكذا عندما يكون معامل الثقة العائلي $1 - \alpha$، فإن جميع المقارنات الثنائية في العائلة ستكون صحيحة في $100\%(1 - \alpha)$ من العائلات.

مثال١ حجوم عينات متساوية

كان مطلوبا من مثال مانع الصدأ، في جدول (١٥-٢)، أن نقدر جميع المقارنات الثنائية بطريقة توكي، مستخدمين 95% معامل ثقة عائلي . وبما أن $r = 4$ و $n_T - r = 36$ ، فإن المئين المطلوب لتوزيع المدى المعيّر تقديرا هو : $q(.95;4,36)$، ونجد من الجدول أ-٩ أن $q(.95; 4,36) = 3.814$ ونحصل بذلك من (15.25c) على الآتي:

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}(3.814)=2.70$$

وبالإضافة إلى ذلك سنحتاج لـ $s\{\hat{D}\}$ ، وبما أننا استخدمنا حجوم عينات متساوية فنجد، من أجل أي مقارنة ثنائية، مستخدمين (15.25b) مايلي:

$$s^2\{\hat{D}\}=MSE\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}\right)=6.140\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)=1.23$$

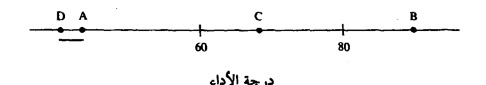
ومنه نجد $s\{\hat{D}\}=1.11$. وبالتالي نحصل لكل مقارنة ثنائية على:

$$Ts\{\hat{D}\}=2.70(1.11)=3.0$$

وتكون فترات الثقة الثنائية بـ 95% معامل ثقة عائلي كالتالي:

$$43.3 = (89.44 - 43.14) - 3.0 \le \mu_2 - \mu_1 \le (89.44 - 43.14) + 3.0 = 49.3$$
$$21.8 = (67.95 - 43.14) - 3.0 \le \mu_3 - \mu_1 \le (67.95 - 43.14) + 3.0 = 72.8$$
$$-.3 = (43.14 - 40.47) - 3.0 \le \mu_1 - \mu_4 \le (43.14 - 40.47) + 3.0 = 5.7$$
$$18.5 = (89.44 - 67.95) - 3.0 \le \mu_2 - \mu_3 \le (89.44 - 67.95) + 3.0 = 24.5$$
$$46.0 = (89.44 - 40.47) - 3.0 \le \mu_2 - \mu_4 \le (89.44 - 40.47) + 3.0 = 52.0$$
$$24.5 = (67.95 - 40.47) - 3.0 \le \mu_3 - \mu_4 \le (67.95 - 40.47) + 3.0 = 30.5$$

وتدل هذه المقارنات الثنائية أن جميع المقارنات الثنائية باستثناء المقارنة (D, A) مهمة إحصائيا. (فترة الثقة لاتحوي الصفر). ونستوعب هذه المعلومة في رسم الخط لمتوسطات مستويات العامل المقدّرة وذلك بوضع خط تحت المقارنات غير المهمة.



درجة الأداء

والخط بين A و D يشير إلى أنه لايوجد دليل واضح على ما إذا كان A أم D هو مانع الصدأ الأفضل. بينما يدل عدم وجود خط على وجود فرق في الأداء. وهكذا نرى أن طريقة المقارنات المتعددة تسمح لنا، بـ 95% معامل ثقة عائلي، استقراء سلسلة من الاستنتاجات، وهي أن B أفضل مانع للصدأ (أفضل بما يتراوح بين 18.5 و 24.5 وحدة من مانع الصدأ الذي يليه في الأفضلية)، وأن C هو الثاني في الأفضلية وأن A و D هما أسوأ بمراحل من البقية مع فرق بسيط أو عدم وجود فرق بينهما. وهكذا فإن التأثيرات التي اقترحها رسم الاحتمال الطبيعي في الشكل (١٥-٣)ب قد أكدها هذا التحليل.

مثال٢ حجوم عينات غير متساوية

كان مدير التسويق في مثال شركة كنتون للأغذية، في الجدول (١٥-١) مهتما بتقدير الأداء المقارن لتصاميم الغلاف الأربعة. ولقد وضع المحلل جميع المقارنات الثنائية بطريقة توكي مع 90% معامل ثقة عائلي على الأقل. وبما أن حجوم العينات غير متساوية هنا، فيجب إعادة حساب الانحراف المعياري المقدر $s\{\hat{D}\}$ لكل مقارنة

ثنائية. وعلى سبيل المثال، لمقارنة التصميمين 1 و 2، نجد:

$$\hat{D}=\overline{Y}_{1.}-\overline{Y}_{2.}=15-13=2$$

$$s^2\{\hat{D}\}=MSE\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)=7.67\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=6.39$$

$$s\{\hat{D}\}=2.53$$

ولـ 90% معامل ثقة عائلي، نحتاج إلى حساب $q(0.90;4,6)=4.07$

وبالتالي نجد:

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}(4.07)=2.88$$

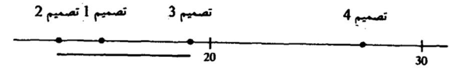
وبذلك يكون حدا الثقة هما $2\pm2.88(2.53)$ ، وتكون فترة الثقة لِـ $\mu_1-\mu_2$:

$$-5.3\leq\mu_1-\mu_2\leq9.3$$

ونحصل بالطريقة نفسها على فترات الثقة الخمس الأخرى:

$$-3.3=(19-15)-2.88(2.53)\leq\mu_3-\mu_1\leq(19-15)+2.88(2.53)=11.3$$
$$4.0=(27-15)-2.88(2.77)\leq\mu_4-\mu_1\leq(27-15)+2.88(2.77)=20.0$$
$$-.5=(19-13)-2.88(2.26)\leq\mu_3-\mu_2\leq(19-13)+2.88(2.26)=12.5$$
$$6.7=(27-13)-2.88(2.53)\leq\mu_4-\mu_2\leq(27-13)+2.88(2.53)=21.3$$
$$.7=(27-19)-2.88(2.53)\leq\mu_4-\mu_3\leq(27-19)+2.88(2.53)=15.3$$

ونلخص الأداء المقارن من خلال رسم الخط، و مشيرين بخط مسطرة لكل فرق غير معنوي.



عدد مرات المبيع

و هكذا، نستطيع أن نستنتج بِـ 90% معامل ثقة عائلي، على الأقل، أن التصميم 4 هو التصميم الأفضل. ولكن صغر حجم الدراسة لايسمح لنا وضع أي ترتيب بين التصاميم الثلاثة الأخرى، ذلك لأن كلاً من فترات الثقة الثنائية تحيط بإمكانية أن يكون لأي من التصميمين متوسط مبيعات أعلى للمحل الواحد.

تعليقات

١ ـ تسمى طريقة توكي بطريقة توكي – كريمر إذا استخدمت في حالة حجوم عينات غير متساوية.

٢ ـ عندما لاتكون جميع المقارنات الثنائية مهمة، فإن معامل الثقة العائلي للمقارنات سيكون أكبر من المواصفة α - 1 المستخدمة عند إعداد فترات توكي. وهكذا، فإن معامل الثقة α - 1 في طريقة توكي يخدم كمستوى أصغري مضمون عندما لاتكون جميع المقارنات الثنائية ذات أهمية.

٣ ـ يمكن استخدام طريقة توكي للتطفل على البيانات طالما أن التأثيرات المراد دراستها بناء على تحليل البيانات المبدئي هي مقارنات ثنائية.

٤ ـ يمكن تعديل طريقة توكي بحيث تتناول متضادات عامة بين متوسطات مستويات عامل. ولكننا لن نناقش هذا التعديل لأن طريقة شيفّه (التي سنناقشها بعد قليل) تُفضَّل على طريقة توكي في هذه الحالة.

٥ ـ لاستنباط فترات الثقة المتزامنة لتوكي في حالة تساوي حجوم العينات، أي أن $n_i \equiv n$ بحيث يكون $n_T = rn$ اعتبر الانحرافات:

$$(\bar{Y}_{1.} - \mu_1),\ldots,(\bar{Y}_{r.} - \mu_r) \qquad (15.26)$$

وافترض أن نموذج التحاين (15.1) ينطبق هنا. فالانحرافات في (15.26) هي عندئذ متغيرات مستقلة (لأن حدود الخطأ مستقلة)، وتتبع التوزيع الطبيعي (لأن حدود الخطأ مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي)، ولها التوقع نفسه وهو الصفر (لأن μ_i طرحت من $\bar{Y}_{i.}$). ولها جميعا التباين نفسه σ^2/n. وبالإضافة إلى ذلك، فإن MSE/n هو مقدر لـ σ^2/n مستقل عن الانحرافات $(\bar{Y}_{i.} - \mu_i)$ حسب النظرية (15.7). وهكذا يتبع من تعريف المدى المعيّر تقديرا في q (15.24) أن:

$$\frac{\max(\bar{Y}_{i.} - \mu_i) - \min(\bar{Y}_{i.} - \mu_i)}{\sqrt{\frac{MSE}{n}}} \sim q(r, n_T - r) \qquad (15.27)$$

حيث $n_T - r$ هو عدد درجات الحرية المصاحب لـ SSE ، $\max(\bar{Y}_{i.} - \mu_i)$ هو أكبر

انحراف و $\min(\overline{Y}_{i.}-\mu_i)$ هو أصغر انحراف.

وفي ضوء (15.27) نستطيع كتابة العبارة الاحتمالية التالية:

$$P\left\{\frac{\max(\overline{Y}_{i.}-\mu_i)-\min(\overline{Y}_{i.}-\mu_i)}{\sqrt{\frac{MSE}{n}}}\leq q(1-\alpha;r,n_T-r)\right\}=1-\alpha \qquad (15.28)$$

لاحظ الآن أن المتراجحة التالية صحيحة لكل الأزواج من مستويات العامل i و i' :

$$\left|(\overline{Y}_{i.}-\mu_i)-(\overline{Y}_{i'.}-\mu_{i'})\right|\leq\max(\overline{Y}_{i.}-\mu_i)-\min(\overline{Y}_{i.}-\mu_i) \qquad (5.29)$$

واحتجنا إلى القيمة المطلقة في الجزء الأيسر لأن مستويي العامل i و i' غير مرتبين بحيث أننا ربما نطرح الانحراف الأكبر من الانحراف الأصغر. وبمعنى آخر، نحن هنا مهتمون، فقط، بالفرق بين انحرافات مستويي العامل بغض النظر عن اتجاه هذا الانحراف.

وبما أن المتراجحة في (15.29) صحيحة لكل أزواج مستويات العامل i و i' ،فإنه يتبع من (15.28) أن الاحتمال:

$$P\left\{\left|\frac{(\overline{Y}_{i.}-\mu_i)-(Y_{i'}-\mu_{i'})}{\sqrt{\frac{MSE}{n}}}\right|\leq q(1-\alpha;r,n_T-r)\right\}=1-\alpha \qquad (15.30)$$

صحيح لكل الـ $r(r-1)/2$ من المقارنات الثنائية بين مستويات العامل وعدّتها r.
وبإعادة ترتيب المتراجحة في (15.30) وباستخدام تعاريف $s^2\{\hat{D}\}$ في (15.25b) وT في (15.25c) وبملاحظة أنه في حالة تساوي حجوم العينات تصبح $s^2\{\hat{D}\}$ كما يلي:

$$s^2\{\hat{D}\}=MSE\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{2\,MSE}{n}$$

نحصل على حدود الثقة لمقارنات توكي المتعددة (15.25).

(١٥-٤) طريقة شيفّه للمقارنات المتعددة

لقد تعرضنا لطريقة شيفّه للمقارنات المتعددة في نماذج الانحدار. وهي، أيضا، ممكنة التطبيق في نماذج تحليل التباين. ويمكن تطبيقها في نماذج تحليل التباين عندما

تكون:

العائلة موضع الاهتمام هي مجموعة التقديرات لجميع المتضادات الممكنة بين متوسطات مستويات العامل:

$$L=\sum c_i\mu_i \qquad \text{حيث} \qquad \sum c_i=0 \tag{15.31}$$

ولذلك، فإن عددا لانهائيا من العبارات ينتمي إلى هذه العائلة. ومعامل الثقة العائلي لطريقة شيفّه هو بالضبط α - 1 سواء أكانت حجوم العينات متساوية أم غير متساوية.

لقد وجدنا من قبل أن تقديرا غير منحاز لِ L هو:

$$\hat{L}=\sum c_i\overline{Y}_{i.} \tag{15.32}$$

والتباين المقدّر له هو:

$$s^2\{\hat{L}\}=MSE\sum\frac{c_i^2}{n_i} \tag{15.33}$$

ويمكن إثبات أن α - 1 هو احتمال أن تكون جمع حدود الثقة من الشكل:

$$\hat{L}\pm Ss\{\hat{L}\} \tag{15.34}$$

صحيحة في آن واحد، حيث $\hat{L}$ و $s\{\hat{L}\}$ معطيان في (15.32) و (15.33) على الترتيب، و S معطى بِ :

$$S^2=(r\text{-}1)F(1\text{-}a\,;\,r\text{-}1,\,n_T-r) \tag{14.34a}$$

ولذلك فإننا لو حسبنا من (15.34) كل فترات الثقة لجميع المقارنات الممكنة ففي $100(1-\alpha)$ بالمائة من تكرارات التجربة ستكون كافة فترات الثقة في العائلة صحيحة.

لاحظ أن حدود الثقة المتزامنة في (15.34) لاتختلف عن حد الثقة بمفرده في (15.21) إلا بمضاعف الانحراف المعياري المقدَّر.

مثال

نرغب في مثال شركة كنتون للأغذية بتقدير المتضادات الأربع التالية بـ 90% معامل ثقة عائلي:

مقارنة بين التصميم ذي الثلاثة ألوان والتصميم ذي الخمسة ألوان:

$$L_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

مقارنة بين التصاميم التي تستخدم صور الرسوم المتحركة والتصاميم التي لاتستخدمه:

$$L_2 = \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} - \frac{\mu_2 + \mu_4}{2}$$

مقارنة بين التصميمين اللذين يستخدمان ثلاثة ألوان:

$$L_3 = \mu_1 - \mu_2$$

مقارنة بين التصميمين اللذين يستخدمان خمسة ألوان:

$$L_4 = \mu_3 - \mu_4$$

لنعتبر تقدير L_1 فقد وجدنا من قبل أن :

$$\hat{L}_1 = -9$$

$$s\{\hat{L}_1\} = 1.79$$

وبما أن $r = 4$ و $n_T - r = 6$ (جدول ١٥-١) فلدينا:

$$S^2 = (r-1)F(1-\alpha\,;\, r-, n_T-r) = 3F(.90;3,6) = 3(3.29) = 9.87$$

بحيث تكون $S = 3.14$ لذلك فإن حدي الثقة لِ L_1 بطريقة شيفه للمقارنات المتعددة هما : $-9 \pm 3.14\ (1.79)$ وتكون فترة الثقة المطلوبة:

$$-14.6 \le L_1 \le -3.4$$

وبطريقة مشابهة نحصل على فترات الثقة الأخرى المرغوبة، وتكون المجموعة بكاملها كما يلي:

$$-14.6 \le L_1 \le -3.4$$
$$-8.6 \le L_2 \le 2.6$$
$$-5.9 \le L_3 \le 9.9$$
$$-15.9 \le L_4 \le -.1$$

ولهذه المجموعة من فترات الثقة معامل ثقة عائلي 90 في المائة، وهكذا يرتبط معامل الثقة هذا بأي سلسلة من النتائج نستنبطها من فترات الثقة. والاستنتاجات الرئيسة التي استنبطها مدير المبيعات من مجموعة التقديرات أعلاه كانت كما يلي:

أعطت التصاميم التي تستخدم خمسة ألوان متوسط مبيعات أعلى من التصاميم التي تستخدم ثلاثة ألوان، وتراوحت الزيادة بين ثلاث إلى خمس عشرة حالة بيع

للمحل الواحد. وما أُشير إلى أي تأثير لاستخدام صور الرسوم المتحركة في تصميم الغلاف، مع أنه في التصاميم ذات الخمسة ألوان أدى استخدام صور الرسوم المتحركة إلى انخفاض متوسط المبيعات عنه في تلك التي لم تستخدم صور الرسوم المتحركة.

تعليقات

١- لو أننا رغبنا في مثال شركة كنتون للأغذية بتقدير مقارنة وحيدة بـ 90% معامل ثقة، فستكون قيمة t المطلوبة هي $t(.95; 6) = 1.943$. وقيمة t هذه أصغر من مضاعف شيفه $S = 3.14$، وهذا يعني أن فترة الثقة الوحيدة ستكون نوعا ما أضيق. وزيادة عرض الفترة في طريقة شيفه هو الثمن الذي تدفعه مقابل معامل ثقة معروف لعائلة من العبارات ولسلسلة النتائج المستخلصة منها. وكذلك لإمكانية القيام بمقارنات لم تكن محددة سلفا قبل تحليل البيانات.

٢- بما أن تطبيقات طريقة شيفّه لاتتضمن أبدا كافة المتضادات الممكنة، فإن معامل الثقة للعائلة المنتهية من العبارات المعتبرة بالفعل سيكون أكبر من α - 1. ولذلك، فعندما نذكر أن معامل الثقة هو α - 1 في طريقة شيفّه فإننا في الحقيقة نقصد أنه من المضمون أن يكون معامل الثقة على الأقل $1-\alpha$. ولهذا السبب، فقد اقترح أن يكون معامل الثقة α- 1 المستخدم في طريقة شيفّه أقل مما هو مستخدم في العادة، باعتبار أن هو حد أدنى، وسيكون معامل الثقة الحقيقي أكبر من ذلك. وكثيرا مايُستخدم معاملا الثقة 90% و 95% في طريقة شيفّه.

٣- يمكن استخدام طريقة شيفّه في تشكيلة واسعة من حالات التطفل على البيانات باعتبار أن عائلة العبارات تتضمن جميع المتضادات الممكنة.

مقارنة طريقة شيفه مع طريقة توكي

١- تعطى طريقة توكي حدود ثقة أضيق عند القيام بمقارنات ثنائية، فقط، ولذلك فهي الطريقة المفضلة في هذه الحالة.

٢- في حالة متضادات عامة، تنحو طريقة شيفّه إلى إعطاء حدود ثقة أضيق، ولذلك فهي الطريقة المفضلة في هذه الحالة.

٣- تملك طريقة شيفّه خاصية أنه إذا دل الاختبار المبنى على F^* على عدم تساوي

متوسطات مستويات عامل μ_i ، فإن طريقة شيفّه المقابلة للمقارنات المتعددة ستعثر على متضادة واحدة على الأقل (من بين كل المتضادات الممكنة) تختلف معنويا عن الصفر (فترة الثقة لاتغطي الصفر). ولكن قد لاتكون هذه المتضادة من بين تلك التي قدّرها المحلل.

(١٥-٥) طريقة المقارنات المتعددة لبونفيروني

لقد تطرقنا سابقا إلى طريقة المقارنات المتعددة لبونفيروني في نماذج الانحدار. وهي ،أيضا، مناسبة لنماذج تحليل التباين عندما:

تكون العائلة محل الإهتمام هي المجموعة الخاصة من المقارنات الثنائية أو المتضادات أو التراكيب الخطية التي حددها المجرب.

ويمكن تطبيق طريقة بونفيروني سواء أكانت حجوم العينات لمستويات العامل متساوية أم لا، وسواء أكان مانريد تقديره هو مقارنات ثنائية أو متضادات أو تراكيب خطية أو خليط منها.

وسنرمز لعدد العبارات في العائلة بـ g، وسنعاملها كلها كتراكيب خطية. ذلك لأن كلا من المقارنات الثنائية والمتضادات تُعتبر حالات خاصة من التراكيب الخطية. وتتضمن متراجحة بونفيروني (5.5)، عندئذ، وبمعامل ثقة على الأقل $1 - \alpha$، أن حدود الثقة التالية لِـ g من التراكيب الخطية L_i، جميعها صحيحة:

$$\hat{L}_i \pm Bs\{\hat{L}_i\} \qquad i = 1,\dots, g \tag{15.35}$$

حيث:

$$B = t(1 - \alpha / 2g; nT\text{-}r) \tag{15.35a}$$

مثال

يهتم مدير المبيعات في شركة كنتون للأغذية بتقدير المقارنتين التاليتين بـ 975 . معامل ثقة عائلي:

مقارنة بين التصاميم التي تستخدم ثلاثة ألوان وتلك التي تستخدم خمسة ألوان:

$$L_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

مقارنة بين التصاميم التي تستخدم صور الرسوم المتحركة وتلك التي لاتستخدمه

$$L_2 = \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} - \frac{\mu_2 + \mu_4}{2}$$

وقد وجدنا سابقا :

$$\hat{L}_1 = -9 \qquad s\{\hat{L}_1\} = 1.79$$
$$\hat{L}_2 = -3 \qquad s\{\hat{L}_2\} = 1.79$$

وفي طريقة بونفيروني و لِـ 97.5% معامل ثقة عائلي، نحتاج إلى:

$$B = t[1 - .025 / 2(2);6] = t(.99375;6) = 3.57$$

ونستطيع الآن حساب فترات الثقة للمتضادتين السابقتين. فحدا الثقة لِـ L_1 همـا $-9 \pm 3.57(1.79)$، مما يؤدي إلى فترة الثقة:

$$-15.4 \le L_1 \le -2.6$$

وبطريقة مشابهة نحصل على فترة الثقة الأخرى:

$$-9.4 \le L_2 \le 3.4$$

ونضمن لفترتي الثقة هاتين 97.5% معامل ثقة عائلي، وهذا يعني أنه في 97.5%، على الأقل، من تكرارات التجربة ستكون كلا الفترتين صحيحتين.

ونستنتج من عائلة التقديرات هذه، مرة أخـرى، أن متوسـط المبيعـات للتصـاميم ذات الخمسة ألوان أعلى من متوسط المبيعات للتصاميم ذات الثلاثة ألوان (بمـا يـتراوح بين 3 إلى 15 علبة للمحل الواحد)، وكذلك لاتوجـد أي دلالـة علـى تأثـير استخدام صور الرسوم المتحركة في تصاميم الغلاف.

ومضاعف شيفّه لِـ 97.5% معامل ثقة عائلي كان سيكون في هذه الحالة:

$$S^2 = 3F(.975;3,6) = 3(6.60) = 19.8$$

أو $S = 4.45$ بالمقارنة مع مضاعف بونفيروني $B = 3.57$. وهكـذا، فـإن طريقـة شـيفّه كانت ستؤدي هنا إلى فترات ثقة أوسع من فترات الثقة لطريقة بونفيروني.

ملاحظة

ليس من الضروري أن يكون لكل من المقارنات التي ستُقدَّر معامل ثقة $1 - (\alpha/g)$ كي يكون معامل الثقة العائلي في طريقة بونفيروني $1 - \alpha$. بل يمكـن استخدام معـامل ثقة مختلف $1 - \alpha_i$ لكل عبارة، وذلك اعتمادا على أهمية كل عبارة، شريطة أن يكون:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_g = \alpha$$

مقارنة طريقة بونفيروني مع كل من طريقتي شيفه وتوكي

١- إذا كانت جميع المقارنات الثنائية محل اهتمام، فإن طريقة توكي تتفوق على طريقة بونفيروني من حيث أنها تؤدي إلى فترات ثقة أضيق. أما إذا لم تكن جميع المقارنات الثنائية محل الاهتمام، فقد تكون طريقة بونفيروني أفضل أحيانا.

٢- ستكون طريقة بونفيروني أفضل من طريقة شيفه عندما يكون عدد المتضادات المراد تقديرها قريبا من عدد مستويات العامل أو أقل منه. ويجب في الواقع أن يكون عدد العبارات أكبر بكثير من مستويات العامل قبل أن تصبح طريقة شيفه الأفضل.

٣ـ في أي مسألة معطاة، يمكن للمرء أن يحسب كلاً من مضاعف بونفيروني ومضاعف شيفّه بالإضافة، إن أمكن، إلى مضاعف توكي ويختار أصغرها. وهذا الاختيار مناسب لأنه لايعتمد على البيانات الملحوظة.

٤ـ لا تساعد طريقة بونفيروني للمقارنات المتعددة على التطفل على البيانات ما لم يتمكن المرء مسبقا من تحديد عائلة المقارنات التي سيدرسها، ويجب، أيضا، ألا تكون هذه العائلة كبيرة. وعلى الوجه الآخر، تنطوي طريقتا توكي وشيفّه على عائلات من العبارات تسمح، وبشكل طبيعي، بالتطفل على البيانات.

٥ـ لا تزال هناك طرق أخرى للقيام بمقارنات متعددة. وقد صُمم العديد منها لحالات خاصة، مثل مقارنة معالجات تجريبية مع معالجة حيادية.

ويعتبر كتاب ميللر(*MILLER*) (المرجع 15.2) مرجعا جيدا للمقارنات المتعددة.

(١٥-٦) اختبارات بدرجة واحدة من الحرية

عندما تؤدي إحصاءة الاختبار F الإجمالية إلى نتيجة أن متوسطات مستويات العامل في دراسة وحيدة العامل μ_i ليست جميعها متساوية، فإن البحث في طبيعة تأثيرات مستويات العامل يتم أحيانا عن طريق اختبارات تتعامل مع أسئلة محددة وليس بواسطة تقدير مقارنات ثنائية أو متضادات أو تراكيب خطية. فعلى سبيل المثال، رغب مدير المبيعات في شركة كنتون للأغذية بمعرفة ما إذا كان متوسط المبيعات

للمحل الواحد يبقى نفسه في التصاميم ذات الثلاثة ألوان والتصاميم ذات الخمسة ألوان، وبما أن جميع متوسطات مستويات العامل μ_i اعتبرت بالأهمية نفسها، فإن هذا السؤال يتضمن الفرضيات البديلة التالية:

$$H_0: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$
$$H_a: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \neq \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

ويمكن كتابة هذه الفرضيات البديلة بشكل مكافىء كما يلي:

$$H_0: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} = 0$$
$$H_a: \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \neq 0$$

يدعى الاختبار الذي يتضمن تركيبا خطيا في متوسطات مستويات العامل μ_i اختبارا بدرجة واحدة من الحرية. وبصورة عامة، تُكتب الفرضيات البديلة ذات الجانبين لاختبار ذي درجة حرية واحدة كالتالي:

$$H_0: \sum c_i\mu_i = c \qquad (15.36)$$
$$H_a: \sum c_i\mu_i \neq c$$

حيث c_i و c ثوابت مناسبة . وفي المثال السابق مثلاً، لدينا:

$$c_1 = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = \frac{1}{2}, \qquad c_3 = -\frac{1}{2}, \qquad c_4 = -\frac{1}{2} \text{ و } c = 0$$

ولاختبار البدائل (15.36)، نستخدم نظرية (15.20) التي تؤدي إلى إحصاءة الاختبار t^*:

$$t^* = \frac{\sum c_i \overline{Y}_{i.} - c}{\sqrt{MSE \sum \frac{c_i^2}{n_i}}} \qquad (15.37)$$

وهي تتبع التوزيع t بـ $n_T - r$ درجة حرية عندما تكون H_0 صحيحة. وهناك إحصاءة اختبار مكافئة هي $(t^*)^2$ ونرمز لها بـ F^* :

$$F^* = (t^*)^2 = \frac{\left(\sum c_i \overline{Y}_{i.} - c\right)^2}{MSE \sum \frac{c_i^2}{n_i}} \qquad (15.38)$$

وهي تتبع التوزيع F بـ 1 و $n_T - r$ درجات حرية عندما تكون H_0 صحيحة. تذكر من (1.47a) أن $[t(n_T - r)]^2 = F(1, n_T - r)$.

مثال

في مثال شركة كنتون للأغذية، لاختبار ماإذا كان متوسط المبيعات للمحل الواحد يبقى نفسه للتصاميم ذات الثلاثة ألوان والتصاميم ذات الخمسة ألوان أم لا، سنستخدم إحصاءة الاختبار (15.38) حيث $\alpha = .05$ والفرضيات البديلة هي:

$$H_0 : \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} = 0$$

$$H_a : \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} \neq 0$$

حيث يكون $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ و $C_3 = C_4 = \frac{-1}{2}$ و $C = 0$ وباستخدام نتائج العينة في الجدول (١٥-١) نحصل على إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{\left(\frac{\overline{Y}_{1.} + \overline{Y}_{2.}}{2} - \frac{\overline{Y}_{3.} + \overline{Y}_{4.}}{2} - 0\right)^2}{MSE\left[\frac{(1/2)^2}{n_1} + \frac{(1/2)^2}{n_2} + \frac{(-1/2)^2}{n_3} + \frac{(-1/2)^2}{n_4}\right]}$$

$$= \frac{\left(\frac{15+13}{2} - \frac{19+27}{2}\right)^2}{7.67\left(\frac{.25}{2} + \frac{.25}{3} + \frac{.25}{3} + \frac{.25}{2}\right)} = 25.3$$

ومن أجل $\alpha = .05$، نحتاج لقيمة $F(.95; 1,6) = 5.99$ وهكذا تكون قاعدة القرار:

إذا كان: $F^* \leq 5.99$ استنتج H_0

إذا كان: $F^* > 5.99$ استنتج H_a

وبما أن $F^* = 25.3 > 5.99$ فنستنتج H_a، أي أن متوسط المبيعات للتصاميم ذات الثلاثة ألوان يختلف عن متوسط المبيعات للتصاميم ذات الخمسة ألوان. والقيمة -P لهذا

الاختبار هي $P\{F(1,6) < 25.3\} = .0024$. و لو أننا استخدمنا إحصاءة الاختبار (15.37) لكانت احصاءة الاختبار:

$$t^*=\frac{\frac{\bar{Y}_{1.}+\bar{Y}_{2.}}{2}-\frac{\bar{Y}_{3.}+\bar{Y}_{4.}}{2}-0}{\sqrt{MSE\left[\frac{(1/2)^2}{n_1}+\frac{(1/2)^2}{n_2}+\frac{(-1/2)^2}{n_3}+\frac{(-1/2)^2}{n_4}\right]}}$$

$$=\frac{\frac{15+13}{2}-\frac{19+27}{2}}{\sqrt{7.67\left(\frac{.25}{2}+\frac{.25}{3}+\frac{.25}{3}+\frac{.25}{2}\right)}}=-5.03$$

ومن أجل $\alpha = .05$ ، سنحتاج للقيمة $t(.975;6) = 2.447$ وتكون قاعدة القرار:

اذا كانت $|t^*| \le 2.447$ ، استنتج H_0

اذا كانت $|t^*| > 2.447$ ، استنتج H_a

وبما أن $|t^*| = 5.03 > 2.447$ فنستنتج H_a ، كما سبق أن استنتجنا باستخدام إحصاءة الاختبار F^*.

تعليقات

١ـ يمكن، أيضا، إجراء اختبار درجة واحدة من الحرية عن طريق تكوين فترة ثقة للمقارنة الثنائية المناسبة أو المتضادة أو التركيب الخطي وملاحظة ماإذا كانت فترة الثقة تحوي القيمة c المحددة في الفرضيات البديلة. فعلى سبيل المثال، حصلنا سابقا على 95% فترة ثقة للفرق بين متوسط المبيعات للتصاميم ذات الثلاثة ألوان والتصاميم ذات الخمسة ألوان:

$$-13.4\le\frac{\mu_1+\mu_2}{2}-\frac{\mu_3+\mu_4}{2}\le-4.6$$

وبما أن فترة 95% لاتحوي القيمة $c = 0$ ، فإن اختبارا للفرق بين متوسطي الفئتين من التصاميم، مع قيمة $\alpha = .05$ يؤدي إلى النتيجة بأن متوسطي الفئتين غير متساويين.

٢- ويمكن، أيضا، استخدام إحصاءة الاختبار t^* عندما نريد إجراء اختبارات ذات جانب واحد، ولكن إحصاءة الاختبار F^* مناسبة، فقط، للاختبارات ذات الجانبين.

٣- تسمح العديد من حزم الحاسوب، الخاصة بتحليل التباين وحيدة العامل للمستخدم بأن يحدد المقارنة التي يريدها وستقدم الحزمة عندئذ إحصاءة الاختبار t^* أو F^*.

اختبارات متعددة كل منها بدرجة واحدة من الحرية

عند القيام بتحليل تأثيرات العامل بواسطة اختبارات ذات درجة حرية واحدة، تُستخدم، عادة، العديد من الاختبارات ذات الدرجة الواحدة من الحرية للإجابة على الأسئلة ذات العلاقة. فعلى سبيل المثال، قد لا يرغب مدير المبيعات في شركة كنتون للأغذية في معرفة ما إذا كان للألوان المستخدمة تأثير على متوسط المبيعات فحسب بل يريد، أيضا، معرفة ماإذا كان لاستخدام صور الرسوم المتحركة تأثير أم لا. وإذا ماتم استخدام اختبارات متعددة بدرجة واحدة من الحرية، فإن كلا من مستوى المعنوية وقوة الاختبار يتأثران، وذلك إلى الحد المتعلق بعائلة من الاختبارات فمثلاً، لو قمنا بثلاثة اختبارات كل منها بدرجة حرية واحدة سواء كانت اختبارات t أو F و $\alpha = .05$ لكل منها، فاحتمال أن كلا من هذه الاختبارات سيؤدي إلى النتيجة H_a عندما تكون H_0 صحيحة في كل حالة، وبفرض استقلال الاختبارات، سيكون عندئذ $(.95)^3 = .857$. وهكذا، فإن مستوى المعنوية بأن واحدا من هذه الاختبارات سيؤدي إلى النتيجة H_a عندما تكون H_0 صحيحة في كل حالة هو $1-.857 = .143$، وليس 0.05. وبالتالي نرى أن مستوى المعنوية وقوة الاختبار لعائلة من الاختبارات لا تبقى نفسها كما في حالة اختبار بمفرده. وفي الواقع فإن الإحصاءتين F^* و t^* غير مستقلتين، ذلك لأنهما مبنيتان على البيانات نفسها وتستخدمان القيمة MSE نفسها. ولذلك فغالبا مايكون من الصعوبة بمكان تحديد مستوى المعنوية وقوة الاختبار لعائلة من الاختبارات. ويمكن التحكم في مستوى المعنوية العائلي عند القيام بعدد من الاختبارات ذات الدرجة الواحدة من الحرية، وذلك باستخدام أحد طرق التقدير المتزامنة – سواء كانت طريقة بونفيروني أو طريقة شيفّه (عند وجود متضادات) أو طريقة توكي (عند وجود مقارنات ثنائية). ويمكن للمرء ببساطة أن ينشيء فترات الثقة المناسبة ويستخلص من كل من هذه الفترات النتيجة المناسبة للاختبار. ولايسمح

هذا الأسلوب بالقيام باختبـارات درجـة واحـدة مـن الحريـة مـع التحكـم في مسـتوى المعنوية العائلي فحسب، بل يعطي، أيضا، معلومات عن حجم أية تأثيرات موجودة.

مثال يرغب المحلل في مثال شركة كنتون للأغذية باختبـار مـا إذا كـان أي زوج μ_i و $\mu_{i'}$ من متوسطات مستويات العامل مختلفـين أم لا. ولذلـك، فـإن المحلـل كـان مهتمـا بإجراء اختبارات تتضمن الفرضيات البديلة التالية:

اختبار١: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ، $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

اختبار٢: $H_0 : \mu_1 = \mu_3$ ، $H_a : \mu_1 \neq \mu_3$

اختبار٣: $H_0 : \mu_1 = \mu_4$ ، $H_a : \mu_1 \neq \mu_4$

اختبار٤: $H_0 : \mu_2 = \mu_3$ ، $H_a : \mu_2 \neq \mu_3$

اختبار٥: $H_0 : \mu_2 = \mu_4$ ، $H_a : \mu_2 \neq \mu_4$

اختبار٦: $H_0 : \mu_3 = \mu_4$ ، $H_a : \mu_3 \neq \mu_4$

ويُراد تثبيت مستوى المعنوية العائلي عند $\alpha = 0.10$.

وقـد اسـتخدم المحلـل طريقـة توكـي للمقارنـات المتعـددة للحصـول علـى جميـع المقارنات الثنائية واستخدم قاعدة القرار :

إذا احتوت فترة الثقة القيمة 0، استنتج H_0

فيما عدا ذلك استنتج H_a

لقد حصلنا سابقا على فترات الثقة هذه ونعيد النتائج هنـا بالإضافـة إلى الاسـتنتاجات المناسبة:

اختبار١: $-5.3 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 9.3$ استنتج H_0

اختبار٢: $-3.3 \leq \mu_3 - \mu_1 \leq 11.3$ استنتج H_0

اختبار٣: $4.0 \leq \mu_4 - \mu_1 \leq 20.0$ استنتج H_0

اختبار٤: $-.5 \leq \mu_3 - \mu_2 \leq 12.5$ استنتج H_0

اختبار٥: $6.7 \leq \mu_4 - \mu_2 \leq 21.3$ استنتج H_a

اختبار٦: $.7 \leq \mu_4 - \mu_3 \leq 15.3$ استنتج H_a

وهكذا نرى أن جميع الفروق الثنائية بين تصميم الغلاف 4 وبين باقي التصاميم لها دلالة إحصائية (أي أن الفروق بين هذه المتوسطات لاتساوي الصفر)، بينما بقية الفروق الثنائية كافة ليس لها دلالة إحصائية.

وغالبا مايتم تلخيص نتائج هذه الاختبارات الثنائية بتشكيل فئات من مستويات العامل لا تختلف متوسطاتها بعضها عن بعض وفقا لاختبارات الدرجة الواحدة من الحرية. وفي مثالنا هنا لدينا فئتان هما:

المجموعة ١	المجموعة ٢
تصميم الغلاف ١ : $\overline{Y}_{1.} = 15$	تصميم الغلاف ٤ : $\overline{Y}_{4.} = 27$
تصميم الغلاف ٢ : $\overline{Y}_{2.} = 13$	
تصميم الغلاف ٣ : $\overline{Y}_{3.} = 19$	

تعليقات

١ـ يمكن استخدام طريقة بونفيروني لإجراء اختبارات متعددة كل منها بدرجة حرية واحدة ليس عن طريق فترات الثقة فحسب، ولكن، أيضا، مع أي من إحصاءتي الاختبار t^* أو F^*. فلنفترض مثلا أننا نرغب في إجراء أربعة اختبارات كل منها بدرجة واحدة من الحرية وبمستوى معنوية عائلي $\alpha = 0.10$، فيبساطة يجري كل اختبار t^* أو F^* بمستوى معنوية منفرد يساوي $.025 = 10/4$.

٢ـ عند استخدام طريقة توكي للمقارنات المتعددة لاختبار فروق ثنائية، فتدعى هذه الاختبارات أحيانا اختبارات فروق مهمة فعلا.

(١٥–٧) تحليل تأثيرات عامل عندما يكون كمياً

عندما يكون العامل المدروس كميا، يمكن أن يمضي تحليل تأثيرات العامل إلى ما وراء القيام بمقارنات متعددة ليشمل دراسة طبيعة دالة الاستجابة. اعتبر مثلاً دراسة تجريبية أجريت للبحث في تأثير أسعار منتج ما على المبيعات. وتمت دراسة خمسة مستويات للأسعار هي (28سنتا، 29 سنتا، 30 سنتا، 31 سنتا ، 32 سنتا)، وكانت

الوحدة التجريبية محلا تجاريا. وبعد اختبار مبدئي لمعرفة ماإذا كان متوسط المبيعات يختلف باختلاف مستويات الأسعار المدروسة، قد يرغب المحلل القيام بمقارنات متعددة لفحص ماإذا كان "التسعير الفردي" بدءا من 29 سنتا، يؤدي في الواقع إلى زيادة المبيعات أكثر من "التسعير الزوجي" بدءا من 28 سنتا، بالإضافة إلى أسئلة أخرى مهمة. وبالإضافة إلى ذلك، قد يرغب المحلل في دراسة ماإذا كان متوسط المبيعات هو دالة معينة في السعر وذلك لمدى الأسعار الذي دُرست في هذه التجربة وعندما يتم تحديد هذه العلاقة فقد يرغب المحلل في استخدامها لتقدير حجم المبيعات لمستويات أسعار لم تُدرس في هذه التجربة.

وبالطبع تعتبر طرق تحليل الانحدار التي نوقشت في الجزئين I و II مناسبة لتحليل دالة الاستجابة، ويجب التنويه هنا بأن الدراسات وحيدة العامل التي نوقشت في هذا الفصل تحوي بشكل شبه دائم على تكرارات عند مستويات العامل المختلفة بحيث يمكن إجراء اختبار نقص التوفيق لدالة استجابة معينة. ولهذا الغرض، يجب تذكر أن مجموع مربعات الخطأ في تحليل التباين (14.26) في مطابق لمجموع مربعات الخطأ البحت في الفصل الرابع في (4.11)، وسنوضح هذه العلاقة بالمثال التالي.

مثال

في دراسة لخفض تكلفة المواد الخام في مصنع لتشكيل الزجاج، قام محلل عمليات بجمع البيانات التجريبية في الجدول (١٥-٤) وذلك لعدد القطع المقبولة التي انتجت من كميات متساوية من المواد الخام بواسطة 28 من العمال الذين يعملون بالقطعة والذين تلقوا تدريبا خاصا كجزء من التجربة. وقد تم استخدام أربعة مستويات للتدريب (6 ,8 ,10 ,12 ساعة) بحيث خصص سبعة من العمال عشوائيا لكل مستوى، وكلما زاد عدد القطع المنتجة كلما دل هذا على زيادة كفاءة العامل في الاستفادة من المواد الخام.

تحليل مبدئي. اختبر المحلل في البداية ما إذا كان متوسط عدد القطع المقبولة هو نفسه لمستويات التدريب الأربعة أم لا. فاستخدم نموذج التحاين (15.1):

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \qquad (15.39)$$

جدول (١٥-٤) بيانات مثال المتدربين اللذين يعملون بالقطعة

	المعالجات (عدد ساعات التدريب)	j						
	i	1	2	3	4	5	6	7
1	٦ ساعات	40	39	39	36	42	43	41
2	٨ ساعات	53	48	49	50	51	50	48
3	١٠ ساعات	53	58	56	59	53	59	58
4	١٢ ساعة	63	62	59	61	62	62	61

والبدائل وإحصاءة الاختبار المناسبة هي:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

H_a: ليست جميع المتوسطات μ_i متساوية

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE}$$

أعطى برنامج حاسوب لنموذج تحاين وحيد العامل النتائج المبينة في الشكل (١٥-٤). وقد بين تحليل الرواسب (سنناقشه في الفصل ١٦) أن نموذج التحاين (15.1) ملائم هنا. وهكذا استمر المحلل في الاختبار مستخدما $\alpha = .05$ ، فكانت قاعدة القرار كما يلي:

إذا كانت $F^* \leq F(.95; 4, 24) = 3.01$ استنتج H_0

إذا كانت $F^* > 3.01$ استنتج H_a

ومن النتائج المطبوعة في الشكل (١٥-٤)، نحصل على:

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{602.8926}{4.2619} = 141.5$$

وبما أن $F^* = 141.5 > 3.01$، فقد استنتج المحلل H_a، أي أن تأثيرات مستويات التدريب مختلفة وتحتاج إلى مزيد من التحليل. القيمة -P الإحصاءة الاختبار كانت 0^+ كما هو مبين في الشكل (١٥-٤).

دراسة تأثيرات المعالجات. لقد تركز اهتمام المحلل بعد ذلك على مقارنات متعددة لكافة الأزواج من متوسطات المعالجات، وقد استخدم خيار توكي للمقارنات المتعددة في برنامج الحاسوب الذي استخدمه المحلل. وأعطى المخرج الموضح في الجزء الأسفل من شكل (١٥-٤). هذا المخرج يعطي نتائج الاختبارات بدرجة واحدة من الحرية التي نُفذت وفقا لطريقة توكي للمقارنات المتعددة وذلك من أجل جميع المقارنات الثنائية (لم تظهر فترات الثقة لمقارنات الثنائية في المُخْرَج). وقد وُضعت كل مستويات العامل التي استنتج الاختبار أن متوسطاتها مثنى مثنى متساوية في المجموعة نفسها.

ولقد وضعنا شكل التلخيص هذا للاختبارات ذات درجة الحرية الواحدة سابقا في مثال شركة كنتون للأغذية. وعندما تحوي مجموعة ما على مستوى عامل واحد، كما هو الحال لكل المجموعات في المُخْرَج المعروض في الشكل (١٥-٤)، فهذا يعني أن جميع الاختبارات ذات درجة الحرية الواحدة التي تتضمن مستوى العامل هذا وكلاً من مستويات العامل الأخرى قد أدت إلى استنتاج H_a ، أي أن مستويي العامل موضع المقارنة غير متساويين.

هناك نقطتان مهمتان يجب ملاحظتهما من النتائج في شكل ١٥-٤: (١) جميع فروق مستويات العامل مثنى مثنى مهمة إحصائيا. (٢) هناك بعض الدلالة بأن الفروق بين متوسطات مستويات العامل المتجاورة تتناقص مع تزايد عدد ساعات التدريب، أي أنه يبدو أننا نحصل على عائد يتلاشى مع زيادة مدة التدريب.

تقدير دالة الاستجابة. هذه النتائج كانت متفقة مع توقعات المحلل. وكان ظنه أن متوسطات المعالجات μ_i ستتبع، في الغالب، دالة استجابة تربيعية في مستوى التدريب. ولقد دعم رسم الحاسوب للبيانات هذا التوقع. ويرغب الآن بحث هذه النقطة أكثر بتوفيق نموذج انحدار تربيعي. والنموذج الذي سيجري توفيقه واختباره هو:

$$Y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_{11} x_i^2 + \varepsilon_{ij} \qquad (15.40)$$

شكل (١٥-٤) جزء من مخرج الحاسوب لمثال المتدربين الذين يعملون بالقطعة ($SPSS^X$ المرجع [15.3])

	GROUP	COUNT (n_i)	MEAN ($\bar{Y}_{i.}$)	STANDARD DEVIATION
	GRP01	7	40.0000	2.3094
معالجة ←	GRP02	7	49.8571	1.7728
	GRP03	7	56.5714	2.6367
	GRP04	7	61.4286	1.2724
	TOTAL	28	51.9643	8.4129

ANALYSIS OF VARIANCE

SOURCE	D.F.	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARES
BETWEEN GROUPS	3	SSTR → 1808.6778	602.8926 ← MSTR
WITHIN GROUPS	24	SSE → 102.2856	4.2619 ← MSE
TOTAL	27	SSTO → 1910.9634	

F RATIO	F PROB.
141.461	0.0000
↑ F^*	↑ القيمة -P ذات الجانب الواحد

MULTIPLE RANGE TEST

TUKEY-HSD PROCEDURE
RANGES FOR THE 0.050 LEVEL -

3.90 ← $q(.95; 4, 24)$

HOMOGENEOUS SUBSETS

SUBSET 1

GROUP	GRP01
MEAN	40.0000

SUBSET 2

GROUP	GRP02
MEAN	49.8571

SUBSET 3

GROUP	GRP03
MEAN	56.5714

SUBSET 4

GROUP	GRP04
MEAN	61.4286

جدول (١٥-٥) مصفوفات X و Y لمثال المتدربين الذين يعملون بالقطعة

$$
\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}40\\39\\39\\36\\42\\43\\41\\53\\48\\49\\50\\51\\50\\48\\53\\58\\56\\59\\53\\59\\58\\63\\62\\59\\61\\62\\62\\61\end{bmatrix}
\qquad
\begin{matrix} & x & x^2 \end{matrix}
\mathbf{X}=\begin{bmatrix}
1 & -3 & 9\\
1 & -3 & 9\\
1 & -3 & 9\\
1 & -3 & 9\\
1 & -3 & 9\\
1 & -3 & 9\\
1 & -3 & 9\\
1 & -1 & 1\\
1 & -1 & 1\\
1 & -1 & 1\\
1 & -1 & 1\\
1 & -1 & 1\\
1 & -1 & 1\\
1 & -1 & 1\\
1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1\\
1 & 3 & 9\\
1 & 3 & 9\\
1 & 3 & 9\\
1 & 3 & 9\\
1 & 3 & 9\\
1 & 3 & 9\\
1 & 3 & 9
\end{bmatrix}
$$

حيث Y_{ij} و ε_{ij} معرفـان كالسـابق، والثوابـت β هـي معـالم الانحـدار، ويرمـز x_i لعـدد ساعات التدريب عند مستوى التدريب (X_i) معبرا عنه كانحراف عن متوسط كل مستويات التدريب، أي أن $x_i = X_i - 9$. والمصفوفتان **X** و **Y** لتحليل الانحدار معطيتان في الجدول (١٥-٥). وقد أعطت تشغيلة حزمة انحدار متعدد حاسوبية دالة الانحدار المقدَّرة التالية:

$$\hat{Y} = 53.52679 + 3.55000x - .13250x^2 \qquad (15.41)$$

ويوضع الجدول (١٥-٦)أ تحليل التباين لنموذج الانحدار (15.40). ولتمام المقارنة نعيد عرض تحليل التباين لنموذج التحاين (15.39) في الجدول (١٥-٦)ب.
وبما أن البيانات تحوي تكرارات، فيمكن للمحلل اختبار النقص في توفيق نموذج الإنحدار (15.40).

جدول (١٥-٦) تحليل التباين لمثال المتدربين الذين يعملون بالقطعة

(أ) نموذج الانحدار (15.40)

مصـــــدر	SS	df	MS
انحدار	1,808.100	2	904.05
خطأ	102.864	25	4.11
المجموع	1,910.964	27	

(ب) نموذج تحليل التباين (15.39)

مصدر التغير	SS	df	MS
انحدار	1.808.678	3	602.89
خطأ	102.286	24	4.26
المجموع	1,910.964	27	

(جـ) نموذج التحاين لإختبار النقص في التوفيق

مصدر التغير	SS	df	MS
انحدار	1,808.100	2	904.05
خطأ	102.864	25	4.11
النقص في التوفيق	.578	1	.58
الخطأ البحت	102.286	24	4.26
المجموع	1,910.964	27	

وقد استفاد من حقيقة أن مجموع مربعات خطأ التحاين في (14.26) مطابق لمجموع مربعات الخطأ البحت للإنحدار في (4.11). فكلاهما يقيس التشتت حول المتوسط عند أي مستوى معطى لِـ X (أي حول متوسط المعالجة المقدّر). عندئذ يمكن الحصول على مجموع مربعات نقص التوفيق مباشرة من النتائج السابقة:

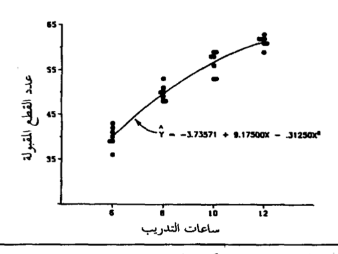
$$SSLF = SSE - SSPE = 102.864 - 102.286 = .578 \qquad (15.42)$$

وبما أنه يوجد هنا $c = r = 4$ مستويات لـ X و $p = 3$ معالم في نموذج الانحدار، فإنه يقترن مع $SSLF$ $c - p = 4 - 3 = 1$ درجة حرية. ولذلك نحصل على $MSLF = .578/1 = .578$. ويحوي الجدول (١٥-٦)جـ تحليل التباين لنموذج الانحدار بحيث تم تقسيم مجموع مربعات الخطأ ودرجات الحرية إلى مركبتي نقص التوفيق والخطأ البحت.

وتكون البدائل (7.57a) لاختبار نقص التوفيق هنا هي:

$$H_0: E\{Y\} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_{11} x^2$$
$$H_a: E\{Y\} \neq \beta_0 + \beta_1 x + \beta_{11} x^2$$

شكل (١٥-٥) رسم انتشار ودالة استجابة تربيعية توفيقية– مثال المتدربين الذين يعملون بالقطعة.



وتكون إحصاءة الاختبار (7.57b) كما يلي:

$$F^* = \frac{MSLF}{MSPE}$$

ومن أجل $\alpha = .05$، تصبح قاعدة القرار (7.57c) كالتالي:

إذا كانت $F^* \leq F(.95; 1,24) = 4.26$ استنتج H_o

إذا كانت $F^* > 4.26$ استنتج H_a

ونحسب إحصاءة الاختبار من جدول (١٥-٦)جـ:

$$F^* = \frac{.58}{4.26} = .136$$

وبما أن $F^* = .136 < 4.26$ فقد استنتج المحلل أن دالة الاستجابة التربيعية توفيق جيد. وبالتالي فقد إستخدم دالة الانحدار التوفيقية في (15.41) لمزيد من تقويم العلاقة بين متوسط عدد القطع المقبولة من الانتاج وبين مستوى التدريب، وذلك بعد أن عبر عن دالة الاستجابة التوفيقية بدلالة المتغير المستقل الأصلي X (عدد ساعات التدريب).

$$\hat{Y} = -3.73571 + 9.17500X - .31250X^2$$

ويعرض الشكل (١٥-٥) دالة الاستجابة المقدّرة هذه.

مراجع ورد ذكرها

[15.1] Cochran. W. G., and G. M. Cox. *Experimental Designs*. 2nd ed. New York : John Wiley & Sons, 1957, p. 74.

[15.2] Miller, R. G., Jr. *Simultaneous Statistical Inference*. 2nd ed. New York : Springer Verlag, 1981.

[15.3] *SPSS*[x] *User's Guide*. 2nd ed. Chicago : SPSS, 1986.

مسائل

(١٥-١) لنعد إلى شكل (١٥-٤) لمثال المتدربين الذين يعملون بالقطعة. فلتقدير متوسط المعالجة μ_i باستخدام التقدير بفترة، هل سيكون صحيحا أن نستخدم لتباين المقدّر $\bar{Y}_{1.}$:

$$s^2\{\bar{Y}_{1.}\} = \frac{s_1^2}{n_1} = \frac{(2.3094)^2}{7}$$

عوضا عن (15.5) :

$$s^2\{\bar{Y}_{1.}\} = \frac{MSE}{n_1} = \frac{4.2619}{7}$$

ماهي مزايا استخدام (15.5)؟ وماهي المساوىء؟

(١٥ـ٢) **بالرجوع إلى مسألة توزيع الجوائز التشجيعية (١٤ـ١٥).** إقترح أحد الطلاب عندما طُلب منه أن يشرح في الفصل استخدام فترات الثقة لمقارنة متوسطي معالجتين، أن يضع 99% فترة ثقة للمقارنة الثنائية $D = \mu_5 - \mu_3$. وقد اختار هذه المقارنة بالذات لأن متوسطي العينتين $\bar{Y}_{5.}$ و $\bar{Y}_{3.}$ هما الأكبر والأصغر على التوالي. وقد قال الطالب. "إن فترة الثقة هذه مفيدة على وجه الخصوص. فإذا لم تحتضن الصفر، فإنها ستدل، وبمستوى معنوية $\alpha = .01$، على أن متوسطات مستويات العامل "غير متساوية".

أ ـ أشرح أسباب خطأ اقتراح الطالب.

ب ـ كيف يجب بناء فترة الثقة بحيث يكون اقتراح الطالب صحيحا بمستوى معنوية $\alpha = .01$؟

(١٥ـ٣) فحص أحد المتدربين مجموعة من البيانات التجريبية للبحث عن المقارنات التي "تبدو مفيدة" وحسب عائلة من فترات الثقة لبونفيروني لهذه المقارنات بـ 90% عامل ثقة عائلي. وعندما أُخْبِرَ بأنه لايمكن أن يطبق طريقة بونفيروني لأن المقارنات قد اقتُرحت من البيانات، قال المتدرب : "لن يكون هناك أي فرق "إذ سأستخدم الصيغ نفسها للتقديرات النقطية وللأخطاء المعيارية المقدَّرة حتى ولو لم تكن المقارنات اقترحت من البيانات". ماهو ردّك.

(١٥ـ٤) اعتبر التراكيب الخطية التالية التي تهمنا في دراسة وحيدة العامل تتضمن أربعة مستويات:

$$(i)\ \ \mu_1 + 3\mu_2 - 4\mu_3$$
$$(ii)\ .3\mu_1 + .5\mu_2 + .1\mu_3 + .1\mu_4$$
$$(iii)\ \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3} - \mu_4$$

أ ـ ما هي التراكيب الخطية التي تعتبر مقارنات؟ أذكر المعاملات لكل من هذه المقارنات.

ب ـ أعط مقدرا غير منحاز لكل من هذه التراكيب الخطية. واعط كذلك التباين المقدر لكل مقدر بفرض أن $n_i \equiv n$.

(١٥-٥) في دراسة تحاين وحيدة العامل تتكون من $r = 6$ معالجات وحجوم عينات $n_i \equiv 10$

أ - بافتراض أنه ستوضع مقارنات ثنائية لمتوسطات المعالجات بـ 90% معامل ثقة عائلي، أوجد المضاعفات T و S و B للأعداد التالية من المقارنات الثنائية في العائلة : $g = 2, 5, 15$ ما هو التعميم الذي تقترحه نتائجك؟

ب - بافتراض أن المقارنات لمتوسطات المعالجات ستقدر بـ 90% معامل ثقة عائلي. أوجد المضاعفات S وB للأعداد التالية من المتضادات في العائلة: $g = 2,5,15$ ماهو التعميم الذي تقترحه نتائجك؟

(١٥-٦) اعتبر دراسة وحيدة العامل بـ $r = 5$ معالجات وحجوم عينات $n_i \equiv 5$

أ - أوجد مضاعفات T و S و B إذا كانت $g = 2,5,10$ من المقارنات الثنائية ستتم بـ 95% معامل ثقة عائلي. ماهو التعميم الذي تقترحه نتائجك؟

ب - ماذا ستكون المضاعفات T وS وB لحجوم عينات $n_i \equiv 20$ ؟ هل التعميم الذي حصلت عليه من الفقرة (أ) مازال صحيحا؟

(١٥-٧) عند القيام بمقارنات متعددة، لماذا يكون من المناسب استخدام طريقة المقارنات المتعددة التي تؤدي إلى أضيق فترات ثقة مُستخرجة مما لدينا من بيانات عينة؟ ناقش.

(١٥- ٨) اعتبر دراسة وحيدة العامل بـ $r = 2$ من المعالجات وحجوم عينات $n_i \equiv 10$، أوجد المضاعفات T و S و B لـ $g = 1$ من المقارنات الثنائية بـ 99% معامل ثقة عائلي. ماهو التعميم الذي تقترحه نتائجك؟

(١٥-٩) بالرجوع إلى مسألة **تحسين الإنتاجية**، (١٤-١٠)، إليك بعض النتائج الحسابية الإضافية:

i	مستوى نفقات البحث والتطوير	n_i	$\bar{Y}_{i.}$	
1	منخفض	9	6.878	
2	معتدل	12	8.133	$MSE = .6401$
3	مرتفع	6	9.200	

أ - جهز رسم خط لمتوسطات العامل المقدَّرة $\bar{Y}_{i.}$. ماذا يقترح هذا الرسم بالنسبة لتأثير مستوى نفقات البحث والتطوير على متوسط تحسين الإنتاجية؟

ب- قدّر متوسط تحسين الإنتاجية لشركات ذات مستويات عالية لنفقات البحث والتطوير، استخدم 95% فترة ثقة.

جـ - أوجد 95% فترة ثقة لِـ $D = \mu_2 - \mu_1$ فسر فترة الثقة هذه.

د - أوجد فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية لمتوسطات المعالجات، استخدم طريقة توكي بـ 90% معامل ثقة عائلي. أذكر استنتاجاتك وجهز تلخيصا بيانيا بوضع خط تحت المقارنات غير المهمة في رسم الخط الذي حصلت عليه في الفقرة (أ).

هـ - هل طريقة توكي التي استخدمت في الفقرة (د) هي الطريقة الأكثر كفاءة التي يمكن استخدامها هنا؟ أشرح.

(١٥-١٠) بالرجوع إلى مسألة **لون الاستبيان** (١٤-١١)، فيما يلي بعض النتائج الحسابية الإضافية:

i	اللون	n_i	$\bar{Y}_{i.}$	
1	أزرق	5	29.4	
2	أخضر	5	29.6	$MSE = 9.70$
3	برتقالي	5	28.0	

أ - جهز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل $\bar{Y}_{i.}$ ماذا يقترح هذا الرسم بالنسبة لتأثير اللون على معدل الاستجابة؟ هل إستنتاجك موافق لنتيجة الاختبار في مسألة (١٤-١١)د؟

ب- قدر متوسط معدل الاستجابة للاستبيانات الزرقاء، استخدم 90% فترة ثقة.

جـ- أوجد 90% فترة ثقة لِـ $D = \mu_3 - \mu_2$ فسر تقدير الفترة هذه وعلى ضوء نتيجة اختبار التحاين في المسألة (١٤-١١)(د)، هل يبدو مفاجئا أن تحتوي فترة الثقة على الصفر؟ اشرح.

(١٥-١١) بالرجوع إلى مسألة **علاج إعادة التأهيل** (١٤-١٢).

أ - جهّز رسم خط لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة $\overline{Y}_{i.}$. ماذا يقترح هذا الرسم بالنسبة لتأثير اللياقة البدنية السابقة على متوسط الزمن اللازم للعلاج؟.

ب- قدّر بـ 99% فترة ثقة متوسط عدد الأيام اللازمة للعلاج لأشخاص لهم لياقة بدنية متوسطة.

جـ- أوجد فترات ثقة لـ $D_1 = \mu_2 - \mu_3$ و $D_2 = \mu_1 - \mu_2$، استخدم طريقة بونفيروني بـ99% معامل ثقة عائلي. فسر نتائجك.

د - هل ستكون طريقة توكي أكثر فعالية للاستخدام في الفقرة (جـ)؟ اشرح.

هـ- لو رغب الباحث بتقدير $D_3 = \mu_1 - \mu_3$ ، أيضا، بـ 95% معامل ثقة عائلي، فهل سيحتاج إلى تعديل المضاعف B المستخدم في الفقرة (جـ)؟ وهل ستكون هذه هي الحالة ،أيضا، لو أن طريقة توكي كانت الطريقة المستخدمة؟

(١٥-١٢) بالرجوع إلى مسألة **العروض النقدية** (١٤-١٣).

أ - جهّز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل $\overline{Y}_{i.}$. ماذا يقترح هذا الرسم بخصوص تأثير عُمْر المالك على متوسط العرض النقدي؟

ب - قدر متوسط العرض النقدي للمالكين صغار السن، استخدم 99% فترة ثقة.

جـ - ضع 99% فترة ثقة لـ $D = \mu_3 - \mu_1$ فسر تقديرك بفترة.

د - أوجد فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات المعالجات، استخدم طريقة توكي بـ 90% معامل ثقة عائلي. فسر نتائجك وقدّم تلخيصا بيانيا عن طريق إعداد رسم خط ثم ضع خطا تحت المقارنات غير المهمة. هل تتفق نتائجك مع تلك التي حصلت عليها في الجزء (أ)؟

هـ- هل ستكون طريقة بونفيروني أكثر كفاءة من طريقة توكي التي استخدمت في الفقرة (د)؟اشرح.

(١٥-١٣) بالرجوع إلى مسألة **آلات التعبئة** (١٤-١٤).

أ - جهّز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة $\overline{Y}_{i.}$ ماذا يقترح هذا الرسم بخصوص التشتت في متوسطات الكميات المعبأة للآلات الست؟

ب - ضع 95% فترة ثقة لمتوسط الكمية المعبأة للآلة .

جـ - أوجد 95% فترة ثقة لِ $D = \mu_2 - \mu_1$ فسر تقدير الفترة هذا.

د - يهتم المستشار على وجه الخصوص بمتوسط الكميات المعبأة بالآلات 1 و 4 و 5. ضع فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات المعالجات الثلاثة هذه استخدم طريقة بونفيروني بـ 90% معامل ثقة عائلي. فسّر نتائجك وجهز تلخيصا بيانيا باستخدام رسم خط لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة مع وضع خط تحت الفروق غير المعنوية. هل تتفق استنتاجاتك مع تلك التي حصلت عليها في (أ)؟

هـ- هل ستكون طريقة توكي أكثر كفاءة من طريقة بونفيروني التي استخدمت في الفقرة (د)؟ اشرح.

(١٥-١٤) بالرجوع إلى مسألة **توزيع الجوائز التشجيعية** (١٤-١٥).

أ - جهز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة $\overline{Y}_{i.}$ ماذا يقترح هذا الرسم بخصوص التشتت في متوسط الوقت المنصرم لكل من الوكلاء الخمسة؟

ب- ضع 90% فترة ثقة لمتوسط الوقت المنصرم للوكيل .

جـ- أوجد 90% فترة ثقة لِـ $D = \mu_2 - \mu_1$ فسر تقدير الفترة هذا.

د- يرغب مدير التسويق في مقارنة متوسطات الأوقات المنصرمة للوكلاء 1 و 3 و 5. أوجد فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات المعالجات الثلاثة هذه. استخدم طريقة بونفيروني بـ 90% معامل ثقة عائلي. فسر نتائجك وجهز تلخيصا بيانيا باستخدام رسم خط لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة مع وضع خط تحت الفروق غير المعنوية، هل تتفق استنتاجاتك مع تلك التي حصلت عليها في (أ)؟

هـ- هل ستكون طريقة توكي أكثر كفاءة من طريقة بونفيروني التي استخدمت في الفقرة (د)؟

(١٥-١٥) بالرجوع إلى مسائل **تحسين الإنتاجية** (١٤-١٠) و(١٥-٩).

أ - قدّر الفرق في متوسط تحسين الإنتاجية بين المصانع ذات المستوى المنخفض أو المتوسط في نفقات البحث والتطوير والمصانع ذات المستوى العالي في النفقات، استخدم 95% فترة ثقة. استخدم متوسطا غير مرجح لفئة النفقات المنخفضة والمتوسطة. فسر تقديرك هذا.

ب - تتناسب حجوم العينات لمستويات العامل الثلاثة مع حجوم المجتمع ويرغب الاقتصادي بتقدير متوسط الكسب في الإنتاجية في العام الماضي لجميع المصانع في المجتمع. قدر المتوسط الاجمالي لتحسين الانتاجية هذا بـ 95% فترة ثقة.

جـ- مستخدما طريقة شيفه، أوجد فترات الثقة للمقارنات التالية بـ 90% معامل ثقة عائلي:

$$D_1 = \mu_3 - \mu_2 \qquad D_3 = \mu_2 - \mu_1$$

$$D_2 = \mu_3 - \mu_1 \qquad L_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \mu_3$$

حلل نتائجك وقدم وصفا لاستنتاجاتك.

د - هل ستكون طريقة بونفيروني أكثر كفاءة من طريقة شيفه في الفقـرة (جـ)؟ أشرح.

(١٥-١٦) **مسألة علاج إعادج التأهيل** (١٤-١٢).

أ - قدّر المتضادة $L = (\mu_1 - \mu_2) - (\mu_2 - \mu_3)$ بـ 99% فترة ثقة. فسر تقدير الفترة هذا.

ب- قدّر المقارنات التالية باستخدام طريقة بونفيروني بـ 95% معـامل ثقـة عائلي:

$$D_1 = \mu_1 - \mu_2 \qquad D_3 = \mu_2 - \mu_3$$
$$D_2 = \mu_1 - \mu_3 \qquad L_1 = D_1 - D_3$$

حلل نتائجك وقدم وصفا لاستنتاجاتك.

جـ- هل ستكون طريقة شيفّه أكثر كفاءة من طريقة بونفيروني في الفقـرة (ب)؟ أشرح.

(١٥-١٧) بالرجوع إلى **مسألة العروض النقدية** (١٤-١٣).

أ - قدّر المتضادة $L = (\mu_1 - \mu_2) - (\mu_2 - \mu_1)$ بـ 99% فترة ثقة. فسر تقدير الفترة هذا.

ب- قدر المقارنات التالية بـــ 90% معـامل ثقـة عـائلي، مسـتخدما طريقـة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة:

$$D_1 = \mu_2 - \mu_1 \qquad D_3 = \mu_3 - \mu_1$$
$$D_2 = \mu_3 - \mu_2 \qquad L_1 = D_2 - D_3$$

فسر نتائجك.

(١٥-١٨) بـالرجوع إلى مسـألة **آلات التعبئـة** (١٤-١٤). ابتيعـت الآلات 1 و 2 جديدة منذ خمس سنوات، وابتيعت الآلات 3 و 4 بعد تجديدها منذ خمس سنوات ،بينما الآلات 5 و 6 ابتيعت جديدة السنة الماضية.

أ ـ قدّر المتضادة

$$L = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

بـ 95% فترة ثقة. فسّر تقدير الفترة هذا.

ب- قدّر المقارنات التالية بـ 90% معامل ثقة عائلي، استخدم طريقة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة:

$$D_1 = \mu_1 - \mu_2 \qquad L_2 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_5 + \mu_6}{2}$$

$$D_2 = \mu_3 - \mu_4 \qquad L_3 = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_5 + \mu_6}{4} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

$$D_3 = \mu_5 - \mu_6 \qquad L_4 = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{4} - \frac{\mu_5 + \mu_6}{2}$$

$$L_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

فسّر نتائجك. ماذا يمكن للمستشارأن يتعلمه من هذه النتائج عن الفروق بين آلات التعبئة الست.

(١٥-١٩) بالرجوع إلى مسألة **توزيع الجوائز التشجيعية** (١٤-١٥). يقوم الوكيلان 1 و2 بتوزيع البضائع ،فقط، والوكيلان 3 و 4 يقومان بتوزيع قسائم ذات قيمة مالية ويقوم الوكيل 5 بتوزيع كل من البضائع والقسائم.

أ ـ قدِّر المتضادة:

$$L = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

بـ 90% فترة ثقة، فسر تقدير الفترة هذا.

ب ـ قدِّر المقارنات التالية بـ 90% معامل ثقة عائلي. استخدم طريقة شيفّه:

$$D_1 = \mu_1 - \mu_2 \qquad L_2 = \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} - \mu_5$$

$$D_2 = \mu_3 - \mu_4 \qquad L_3 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

$$L_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \mu_5$$

فسر نتائجك.

جـ- هل ستكون طريقة بونفيروني أكثر كفاءة من طريقة شيفّه في الفقرة (ب)؟ أشرح.

د- من بين كل الجوائز التشجيعية، الموزعة، يقوم الوكيل 1 بتوزيع 25 في المئة منها، ويقوم الوكيل 2 بتوزيع 20 في المئة، ويقوم الوكيل 3 بتوزيع 20 في المئة، ويقوم الوكيل 4 بتوزيع 20 في المئة ويقوم الوكيل 5 بتوزيع 15 في المئة. قدِّر المتوسط الإجمالي للوقت المنصرم لتوزيع الجوائز بـ 90% فترة ثقة.

(١٥-٢٠) بالرجوع إلى مسائل **تحسين الإنتاجية** (١٤-١٠) و(١٥-٩).

أ ــ استخدم اختبار درجة واحدة من الحرية لتحديد ما إذا كان $\mu_3 = (\mu_1 + \mu_2)/2$ أم لا، اضبط المخاطرة α عند .05، واستخدم إحصاءة الاختبار (15.37). اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

ب ـ اختبر ما إذا كانت جميع أزواج متوسطات مستويات العامل مختلفة أم لا، استخدم اختبارات ذات درجة حرية واحدة مبنية على طريقة توكي بـ $\alpha = .05$. شكل فئات من مستويات العامل التي لاتختلف متوسطاتها.

(١٥-٢١) بالرجوع إلى مسألة **العروض النقدية** (١٤-١٣).

أ – إستخدم اختبار ذو درجة واحدة من الحرية لتحديد ما إذا كان $\mu_2 - \mu_1 = \mu_3 - \mu_2$ أم لا، اضبط المخاطرة α عند .01. واستخدم إحصاءة الاختبار (15.38). اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

ب ـ لكل زوج من أزواج متوسطات العامل اختبر ما إذا كان المتوسطان مختلفين أم لا، استخدم اختبارات ذات درجة حرية بناءً على طريقة توكي بـ $\alpha = .10$ ، شكّل مجموعات من مستويات العامل التي لاتختلف متوسطاتها.

(١٥-٢٢) بالرجوع إلى مسألة **توزيع الجوائز التشجيعية** (١٤-١٥).

أ ــ استخدم اختبار ذو درجة حرية واحدة لتحديد ما إذا كان $(\mu_1 + \mu_2)/2 = (\mu_3 + \mu_4)/2$ أم لا، اضبط المخاطرة α عند .10،

واستخدم إحصاءة الاختبار (15.37). اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

ب- لكل زوج من أزواج متوسطات العامل اختبر ما إذا كان المتوسطان مختلفين أم لا، استخدم اختبارات ذات درجة حرية واحدة مبنية على طريقة توكي بـ $\alpha = .10$ ، شكّل فئات من مستويات العامل التي لاتختلف متوسطاتها.

(١٥-٢٣) بالرجوع إلى مسألة **تركيز المحلول** (٤-١٥). افترض أن المحلل رغب في البداية باستخدام نموذج التحاين (14.2) لتحديد ما إذا كان تركيز المحلول يتأثر بمقدار الوقت الذي مضى منذ تجهيزه.

أ - اعرض نموذج تحليل التباين.

ب - جهز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقدّرة $\bar{Y}_{i.}$.
ماذا يقترح هذا الرسم حول العلاقة بين تركيز المحلول والوقت؟

جـ - أوجد جدول تحليل التباين.

د - اختبر ما إذا كانت متوسطات مستويات العامل متساوية أم لا، استخدم مستوى معنوية $\alpha = .025$ ، أعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

هـ - قم بمقارنات ثنائية لمتوسطات مستويات العامل بين جميع الفترات الزمنية المتجاورة، استخدم طريقة بونفيروني بـ 95% معامل ثقة عائلي. هل تقترح نتائجك أن علاقة الانحدار غير خطية؟ وهل تتفق نتائجك مع تلك في الفقرة (ب)؟

(١٥-٢٤) بالرجوع إلى مسألة **علاج إعادة التأهيل** (١٤-١٢). طوّر أحد المتخصصين في الإحصاء الحيوي سلما (تدريجا) لحالة اللياقة البدنية كما يلي:

حالة اللياقة البدنية	قيمة السلم (التدريج)
تحت المتوسط	83
متوسط	100
فوق المتوسط	121

أ – باستخدام سلم حالة اللياقة البدنية، قم بتوفيق نموذج الانحدار من المرتبة الأولى (2.1) لحدر عدد الأيام اللازمة للعلاج Y على حالة اللياقة البدنية X.

ب ـ أوجد الرواسب وارسمها مقابل X هل يبدو أن نموذج انحدار خطي يشكل توفيقا للبيانات؟

جـ ـ قم باختبار F لتحديد ماإذا كان هناك نقص في التوفيق لدالة انحدار خطية أم لا، استخدم $\alpha = .05$ ، أعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

د ـ هل يمكنك إجراء اختبار للنقص في توفيق دالة انحدار تربيعية هنا؟ اشرح.

(١٥ـ٢٥) بالرجوع إلى مسألة **آلات التعبئة** (١٤ـ١٤). إقترح مهندس صيانة أن الفروق في متوسطات التعبئة للآلات الست يرتبط إلى حد كبير بطول الوقت الذي مضى منذ أن تلقت الآلة آخر صيانة عامة وقد بينت تقارير الصيانة أن أطوال الأوقات (بالشهور) كانت كما يلي:

آلة التعبئة	عدد الشهور	آلة التعبئة	عدد الشهور
1	.4	4	5.3
2	3.7	5	1.4
3	6.1	6	2.1

أ ـ قم بتوفيق نموذج انحدار كثيرة حدود من الدرجة الثانية (9.1) وذلك لحدر الكمية المعبأة على عدد الشهور التي مضت منذ آخر صيانة عامة X.

ب ـ أوجد الرواسب وارسمها مقابل X. هـل يبـدو أن دالـة انحدار تربيعـة توفق البيانات؟

جـ ـ قم باختبار F لتحديد مالإذا كان يوجد نقص في توفيق دالـة الانحـدار التربيعية، استخدم $\alpha = .01$ ، أعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

د ـ اختبر مالإذا كان يمكن حـذف الحـد الـتربيعي في دالـة الاستجابة مـن النموذج، استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

تمارين

(١٥ـ٢٦) أثبت أنه عندما يكون $r = 2$ و $n_i \equiv n$ ، فـإن q المعرَّفـة في (15.27) تكـافئ $\sqrt{2}\,|t^*|$ ، حيث t^* معرفة في (1.62) .

(١٥ـ٢٧) أكمل استنباط (15.25) مبتدئا بـ (15.30).

(١٥ـ٢٨) أثبـت أنـه عندمـا يكـون $r = 2$ ، فـإن S^2 المعرفـة في (15.34a) يكـافئ $[t(1-a/2; n_T-r)]^2$

(١٥ـ٢٩) ضع الفرضيات البديلة للاختبار (15.36) في هيئة مصفوفات $C\beta = h$ كمـا في (8.66) وبيّـن أن إحصـاءة الاختبـار (8.71) تُختـزل إلى F^* المعرَّفــة في (15.38).

مشاريع

(١٥ـ٣٠) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SENIC والمشروع (١٤ـ٣٣). أوجد فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين المناطق الأربع، استخدم طريقـة توكـي بـ 90% معامل ثقة عائلي. فسر نتائجك واعـرض استنتاجاتك. جهِّـز رسـم خط لمتوسطات مستويات العامل المقدرة وضع خطاً تحت جميـع المقارنـات غير المهمة.

(١٥ـ٣١) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SMSA والمشروع (١٤ـ٣٥). أوجد فـترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين المناطق الأربع، استـخدم طريقـة توكـي بـ 90% معامل ثقة عائلي. فسِّر نتائجك واعـرض استـنتاجاتك. جهـز رسـم

خط لمتوسطات مستويات العامل المقدرة وضع خطاً تحت جميع المقارنات غير المهمة.

(١٥-٣٢) بالرجوع إلى المشروع (١٤-٣٦)(د).

أ - من أجل كل تكرار، ضع فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات المعالجات الثلاث، استخدم طريقة توكي بـ 95% معامل ثقة عائلي. ومن ثم حدد ما إذا كانت كل فترات الثقة للتكرار صحيحة إذا علمت أن $\mu_1 = 80$ و $\mu_2 = 60$ و $\mu_3 = 160$.

ب - ما هي النسبة من بين الـ 100 تكرارا التي تكون جميع فترات الثقة فيها صحيحة؟ هل هذه النسبة قريبة من التوقعات النظرية؟ ناقش.

تشخيصات وتدابير علاجية -III

عند مناقشتنا لتحليل الانحدار، أكدنا على أهمية فحص مصداقية نموذج الانحدار المدروس، وأشرنا إلى فعالية رسوم الرواسب وتشاخيص أخرى في استطلاع أي حيود كبير عن النموذج المبدئي. وفحص المصداقية لايقل أهمية في تحليل التباين عنه في تحليل الانحدار.

وسنتابع في هذا الفصل استخدام رسوم الرواسب لتشخيص صلاحية نماذج تحليل التباين، بالإضافة إلى اختبارات رسمية لتساوي تباينات الخطأ. ونناقش، أيضا، استخدام التحويلات كتدبير علاجي لتحسين مصداقية نموذج تحليل التباين، وسنتطرق إلى تأثير الحيدان عن نموذج التحاين على استقراءات التقدير والاختبار.

ولأسباب تربوية، كما في تحليل الانحدار، فقد ناقشنا طرق الاستقراء قبل مناقشة التدابير العلاجية والتشخيصية. ولكن بالطبع، فإن التسلسل الفعلي لتطوير واستخدام أي نموذج إحصائي هو بالعكس:

١ـ تفحُّص ماإذا كان النموذج المقترح مناسبا للبيانات التي لديك.

٢ـ إذا لم يكن النموذج المقترح مناسبا، قُمْ بتدابير علاجية مثل تحويل البيانات أو تعديل النموذج.

٣ـ بعد مراجعة مصداقية النموذج واستكمال أية تدابير علاجية لازمة وتقويم فعاليتها، يمكن القيام باستقراءات تستند إلى النموذج.

من غير الضروري، ومن غير الممكن عادة، أن يكون نموذج التحاين ملائما تماما. وكما سنرى لاحقا، فإن نماذج التحاين منيعة بشكل معقول ضد أنواع معينة من الحيود

عن النموذج، مثل كون حدود الخطأ غير موزعة تماما وفق التوزيع الطبيعي ولذلك، فإن الهدف الرئيس لفحص مصداقية النموذج هو اكتشاف حيود جدي عن الشروط التي يفترضها النموذج.

(١٦-١) تحليل الرواسب

يماثل تحليل الرواسب في نماذج التحاين إلى حد بعيد مايقابله من نماذج الانحدار. ولذلك، سنكتفي بمناقشة مختصرة لبعض النقاط الأساسية في استخدام تحليل الرواسب في نماذج التحاين.

الرواسب

لقد عرّفنا الرواسب e_{ij} لنموذج تحاين متوسطات الخلايا (14.2) في (14.17):

$$e_{ij} = Y_{ij} - \hat{Y}_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y}_{i.} \qquad (16.1)$$

وكما في الانحدار فإن الرواسب المعيَّرة.

$$\frac{e_{ij}}{\sqrt{MSE}} \qquad (16.2)$$

مفيدة أحيانا. وفي أحيان أخرى، كما سنرى قريبا، تكون رواسب بديلة أخرى مفيدة مثل:

$$\frac{e_{ij}}{s_i} \qquad (16.3)$$

حيث s_i انحراف العينة المعياري للمشاهدات المأخوذة عند المستوى i من مستويات العامل، كما عرفناه في (14.37).

رسوم الرواسب

تتضمن رسوم الرواسب المفيدة لنماذج تحليل التباين: (١) رسوم مقابل القيم التوفيقية، (٢) رسوم مقابل الزمن أو أي رسوم تسلسلية أخرى، (٣)رسوم نقطية و(٤)رسوم احتمال طبيعي. ولقد تطرقنا إلى جميع هذه الرسوم سابقا. وسنوضح تطبيقاتها في تقويم مصداقية نماذج تحليل التباين عن طريق مثال.

مثال. يحوي الجدول (١٦-١) الرواسب لمثال مانع الصدأ في الفصل الخامس عشر.

ولتسهيل عملية العرض، فإن المعالجات موضحة في أعمدة الجدول. ولقد حصلنا على الرواسب من البيانات في الجدول (١٥-٢)أ. و على سبيل المثال، فإن الراسب للوحدة التجريبية الأولى التي عوجلت بمانع الصدأ A هو:

$$e_{11} = Y_{11} - \hat{Y}_{11} = Y_{11} - \overline{Y}_{1.} = 43.9 - 43.14 = .76$$

ويحوي الشكل (١٦-١)أ رسما للرواسب مقابل القيم التوفيقية. ويختلف هذا الرسم الذي جُهِّز بواسطة برنامج الحاسب الآلي مينيتاب، في مظهره عن الرسوم المشابهة في تحليل الانحدار، وذلك لأن القيم التوفيقية $\hat{Y}_{ij}$ في نموذج التحاين تبقى نفسها لجميع المشاهدات الخاصة بمستوى عامل معطى. تذكر من (14.15) أن $\hat{Y}_{ij} = \overline{Y}_{i.}$.

ويحوي الشكل (١٦-١)ب على رسم نقطي للرواسب لكل مستوى عامل. وهذه الرسوم مشابهة لرسوم الرواسب مقابل القيم التوفيقية في (١٦-١)أ، فيما عدا أن محور الرواسب هنا هو المحور الأفقي، ومن فوائد رسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية في الشكل (١٦-١)أ تسهيل تقويم العلاقة بين مقادير تباينات الخطأ ومتوسطات مستويات العامل ـ ومن مساوئه أنه قد تكون بعض متوسطات مستويات العامل بعيدة بعضها عن بعض مما قد يجعل مقارنة مستويات العامل أكثر صعوبة. وقد عوجلت هذه الصعوبة في الشكل (١٦-١)ب إذ أمكن وضع الرسوم النقطية قريبة بعضها من بعض مما سهل المقارنة بين مستويات العامل.

ويحوي الشكل (١٦-١)جـ رسم احتمال طبيعي للرواسب. وهذا الرسم هو بالضبط الرسم نفسه الذي رأيناه في نماذج الانحدار.

لم نقدم أي رسوم تسلسلية للرواسب هنا، وذلك لأن بيانات مثال مانع الصدأ لم ترتب وفقا للزمن أو وفق تسلسل منطقي آخر.

وكما سنرى تقترح جميع الرسوم في الشكل (١٦-١)، أن نموذج التحاين مناسب لبيانات مانع الصدأ.

جدول (١٦-١) الرواسب لمثال مانع الصدأ

j	A $i=1$	B $i=2$	C $i=3$	D $i=4$
	الصنف			
1	.76	.36	.45	-4.27
2	-4.14	-2.34	1.35	4.73
3	3.56	3.26	.55	.23
4	.66	1.16	-1.55	.03
5	1.06	-1.74	2.05	-1.17
6	4.56	2.96	.15	-.17
7	.46	-3.34	2.65	2.73
8	-4.24	-1.34	-2.75	-1.77
9	.46	1.36	-4.15	.43
10	-3.14	-.34	1.25	-.77

تشخيص الحيود عن نموذج تحاين

سنناقش الآن كيف يمكن أن تكون رسوم الرواسب مفيدة في تشخيص حالات الحيود التالية عن نموذج التحاين (14.2):

١ـ عدم ثبات تباين الخطأ.

٢ـ عدم استقلالية حدود الخطأ.

٣ـ القاصيات.

٤ـ حذف متغيرات مستقلة مهمة.

٥ـ عدم طبيعية حدود الخطأ.

عدم ثبات تباين الخطأ. يتطلب نموذج التحاين (14.2) أن يكون لحدود الخطأ ε_{ij} تباين ثابت لكل مستويات العامل. وأفضل طريقة لدراسة ملاءمة هذا الفرض عندما لاتكون حجوم العينات كبيرة جدا هي عن طريق رسوم الرواسب في مقابل القيم التوفيقية، أو من الرسوم النقطية للرواسب. وعندما يكون تباين الخطأ ثابتا، يجب أن تبين رسوم الرواسب القدْر نفسه من تبعثر الرواسب حول الصفر، وذلك لكل مستوى عامل. وهذا ماحصل في مثال مانع الصدأ في الشكل (١٦-١)أ و(١٦-١)ب.

ويبين الشكل (١٦-٢) نموذج لرسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية عندما

لايكون لحدود الخطأ تباين ثابت. ويصور هذا الرسم حالة تكون فيها الحدود الخطأ للمستوى الثالث للعامل تباين أكبر من تباين حدود الخطأ لمستويي العامل الآخرين.

شكل (١٦-١) رسوم رواسب تشخيصية ـ مثال مانع الصدأ

(آ) رسم الرواسب مقابل $\hat{Y}$

الراسب

3.0

0.0

-3.0

40 50 60 70 80 90 Y قبّعة

(ب) رسوم رواسب نقطية

الصنف A

الصنف B

الصنف C

الصنف D

-4.0 -2.0 0.0 2.0 4.0 6.0

(جـ) رسم احتمال طبيعي

الراسب

3.0

0.0

-3.0

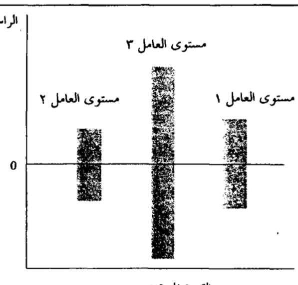
-4.0 -2.0 0.0 2.0 4.0 القيمة المتوقعة

وعندما تكون حجوم العينات لمستويات العامل المختلفة كبيرة، فإن رسم المدرج التكراري للرواسب لكل معالجة ـ بحيث تُرتّب عموديا ويُستخدم سلّم القياس نفسه،

مثل الرسم النقطي في الشكل (١٦-١)ب ــ تُعتبر طريقة فعَّالة لفحص ثبات تباين حدود الخطأ، بالإضافة إلى تقويم ما إذا كانت حدود الخطأ موزعة طبيعيا.

ولقد تم تطوير العديد من الاختبارات الإحصائية لفحص تساوي r من التباينات بشكل رسمي، وسنناقش اثنين من هذه الاختبارات في الفقرة (١٦-٢).

شكل (١٦-٢) نموذج لرسم رواسب مقابل القيم التوفيقية عندما لايكون لحدود الخطأ تباين ثابت لكل مستويات العامل

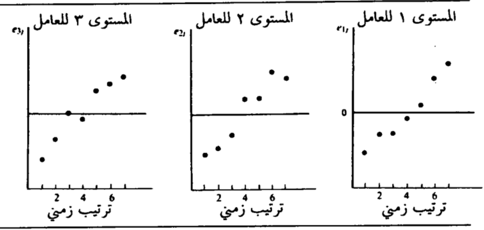


عدم استقلالية حدود الخطأ. ينبغي القيام برسم تسلسلي للرواسب، حيثما كانت البيانات مجموعة وفق تسلسل زمني، وذلك لفحص ماإذا كانت حدود الخطأ مرتبطة ارتباط تسلسل. ويحوي الشكل (١٦-٣) الرواسب لتجربة تتناول تفاعل مجموعات. وقد تم تطبيق ثلاث معالجات مختلفة، وسُجل تفاعل المجموعات على أشرطة فيديو. وكُررت كل معالجة سبع مرات. وقاس المجرب بعد ذلك عدد التفاعلات من خلال عرض الأشرطة وفق ترتيب عشوائي. ويقترح الشكل (١٦-٣) بشكل قوي أن المجرب بدأ يتبين عددا أكبر من التفاعلات مع اكتسابه المزيد من الخبرة من مشاهدة الأشرطة، وكنتيجة لذلك، فإن الرواسب في الشكل (١٦-٣) تبدو مرتبطة تسلسليا. وفي هذه

الحالة، فإن إضافة حد خطي إلى النموذج يمثل تأثير الزمن، قد يكون كافيا لضمان استقلالية حدود الخطأ في النموذج المعدل.

وقد تؤدي التأثيرات المتصلة بالزمن إلى زيادة أو تخفيض تباين الخطأ مع الزمن. فعلى سبيل المثال، يمكن لمجرب أن يأخذ قياسات أكثر دقة مع مرور الزمن. ويصور الشكل (١٦-٤) رسوما تسلسلية للرواسب بحيث يتناقص تباين الخطأ مع مرور الزمن.

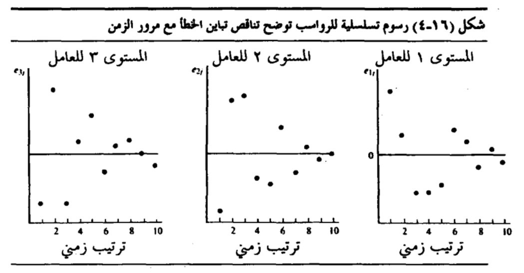
شكل (١٦-٣) رسوم تسلسلية للرواسب لدراسة تفاعل المجموعات توضح التأثير المتصل بالزمن



وعندما تكون البيانات مرتبة وفق تسلسل منطقي آخر كتسلسل جغرافي مثلاً، فإن رسم الرواسب مقابل هذا الترتيب يساعد على التحقق من كون حدود الخطأ مرتبطة تسلسليا وفق ذلك الترتيب أم لا.

قيم قاصية. مما يسهل اكتشاف القيم القاصية استخدام رسوم الرواسب مقابل القيم التوفيقية، والرسوم النقطية للرواسب ورسوم الصندوق، ورسوم الجذع والورقة. وتبين هذه الرسوم بسهولة أي مشاهدة قاصية، أي المشاهدة التي تختلف عن قيمتها التوفيقية اختلافا أكبر بكثير من بقية المشاهدات. ومن الحكمة، كما ذكرنا في الفصل الرابع، فإنه من الحكمة نبذ المشاهدات القاصية، فقط، في حالة كونها نتيجة لأسباب محددة مثل سوء استخدام الأجهزة أو خطأ فاضح في قياسات المشاهد، أو خطأ في التسجيل.

شكل (١٦-٤) رسوم تسلسلية للرواسب توضح تناقص تباين الخطأ مع مرور الزمن



حذف متغيرات مستقلة مهمة. يمكن، أيضا، استخدام تحليل الرواسب لدراسة ما إذا كان نموذج التحاين وحيد العامل نموذجا ملائما. ففي تجربة للتعليم تتضمن ثلاث معالجات حوافز، حصلنا على الرواسب الموضحة في الشكل (١٦-٥). ولا يفصح رسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية في الشكل (١٦-٥) بصورة إجمالية عن أي نمطية غير عادية. ومع ذلك، تساءل المجرب ما إذا كانت تأثيرات المعالجات تختلف وفقا لجنس الشخص. ويوضح الشكل (١٦-٥) رواسب الذكور بمربع، بينما يوضح رواسب الإناث بنقطة. ومن النتائج في شكل (١٦-٥) يتضح وبقوة أن تأثير المعالجات يختلف وفقا للجنس وذلك من أجل كلٍ من معالجات الحوافز المدروسة. وبالتالي، سيكون من المفيد أكثر أن نستخدم نموذجا متعدد العوامل يميز كلاً من المعالجة المحفِّزة والجنس كمتغيرين مستقلين.

و نلاحظ أن تحليل الرواسب هنا لايرفض النموذج وحيد العامل الأصلي. ولكن تحليل الرواسب يشير إلى أن النموذج الأصلي يتجاهل فروقا في تأثيرات المعالجات ربما يكون من المهم ملاحظتها. وبما أن هناك في العادة العديد من المتغيرات المستقلة التي يكون لها بعض التأثير على المتغير التابع، فعلى المحلل أن يتناول في تحليل الرواسب تلك المتغيرات المستقلة التي يكون لها على الأرجح تأثير مهم على المتغير التابع.

حدود خطأ غير طبيعية. يمكن دراسة عدم طبيعية حدود الخطأ من المدرجات التكرارية ورسوم النقط ورسوم الصندوق ورسوم الاحتمال الطبيعي للرواسب. وبالإضافة إلى ذلك، يمكن القيام بمقارنة التكرارات الملحوظة مع التكرارات المتوقعة لو كانت الرواسب تتبع التوزيع الطبيعي، وعندها يمكن القيام باختبارات كاي مربع لجودة التوفيق، أو أية اختبارات مشابهة. والمناقشة في الفصل الرابع حول هذه الطرق الخاصة بتقويم طبيعة حدود الخطأ قابلة للتطبيق هنا تماما.

وعندما تكون حجوم العينات لمستويات العامل كبيرة، فيمكن دراسة خاصة الطبيعية لكل معالجة على حدة. أما عندما تكون حجوم العينات لمستويات العامل صغيرة، فيمكن للمرء أن يضم الرواسب e_{ij} لجميع المعالجات في مجموعة واحدة، شريطة أن يكون هناك دليل واضح على عدم وجود فروق في تباينات الخطأ للمعالجات المدروسة. ولقد فعلنا هذا في مثال مانع الصدأ في الشكل (١٦-١)جـ. حيث لا يبيّن هذا الشكل أي حيود كبير عن فرض الطبيعية، والنمط الذي تتبعه النقاط هو نمط خطي إلى حد مقبول. باستثناء ماكان منها في الذيلين ـ ومعامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية هو 0.987 هو. مما يدعم، أيضا، معقولية فرض الطبيعية.

شكل (١٦-٥) رسم للرواسب مقابل القيم التوفيقية موضحا حذف متغير مستقل مهم

وعندما تكون حجوم العينات لمستويات العامل صغيرة، ويتوفر دليل على أن تباينات حدود الخطأ لمستويات العامل المختلفة غير متساوية، فينبغي استخدام الرواسب المعيّرة (16.3) قبل ضم جميع الرواسب لدراسة طبيعتها، وإلا فقد يكون هناك ما يشير إلى دليل على عدم طبيعية الرواسب، لا لشيء إلا لأن تباينات حدود الخطأ غير متساوية.

ملاحظة

كما أشرنا في نماذج الانحدار، فإن الرواسب e_{ij} ليست متغيرات عشوائية مستقلة، وهي في نموذج التحاين (14.2) خاضعة للقيود المذكورة في (14.18). وتبعا لذلك فإن الاختبارات الإحصائية التي تتطلب أن تكون المشاهدات مستقلة لن تكون صالحة تماما للرواسب. ولكن، على أية حال، لو كان عدد الرواسب لكل مستوى عامل غير صغير فسيكون تأثير الارتباطات بسيطا. ولقد ذكرنا سابقا أن الرسوم البيانية للرواسب أقل خضوعا لتأثيرات الارتباط من الاختبارات الإحصائية، ذلك لأن الرسوم البيانية تتضمن الرواسب بمفردها ولاتتضمن دوال في الرواسب.

(١٦-٢) اختبارات لتساوي التباينات

تتوفر عدة اختبارات رسمية لدراسة مالإذا كان لـ r من المجتمعات تباينات متساوية أم لا، وهذا مما يتطلبه نموذج التحاين. وسندرس اثنين من هذه الاختبارات هما :اختبار بارتلت واختبار هارتلي. ويفترض كلاهما أن كلاً من المجتمعات الـ r طبيعية. ويفترض كل من الاختبارين، أيضا، أن لدينا عينات عشوائية مستقلة من كل مجتمع. واختبار بارتلت هو اختبار متعدد الأغراض ويمكن استخدامه سواء كانت حجوم العينات متساوية أم غير متساوية، بينما يُطبَّق اختبار هارتلي عندما تكون حجوم العينات متساوية، وهو مصمم بحيث يكون حساسا ضد فروق كبيرة بين أكبر وأصغر تباينين من تباينات المجتمعات.

اختبار بارتلت (*Bartlett*)

الفكرة الأساسية لاختبار بارتلت بسيطة. لتكن $s_1^2,\ldots,s_r^2$ تباينات عينة من r من المجتمعات الطبيعية، ولتكن df_i درجات الحرية المرتبطة بتباين العينة s_i^2 . فالمتوسط

الحسابي المرجح لتباينات العينات، مستخدمين درجات الحرية المصاحبة df_i كأوزان.
هو متوسط مربعات الخطأ:

$$MSE = \frac{1}{df_T} \sum_{i=1}^{r} df_i s_i^2 \qquad (16.4)$$

حيث:

$$df_T = \sum_{i=1}^{r} df_i \qquad (16.4a)$$

وبطريقة مشابهة، فإن الوسط الهندسي المرجح للتباينات s_i^2 ونرمز له بـ $GMSE$ هو:

$$GMSE = \left[(s_1^2)^{df_1} (s_2^2)^{df_2} \ldots (s_r^2)^{df_r} \right]^{1/df_T} \qquad (16.5)$$

و يمكن اثبات أنه لأي مجموعة معطاة من قيم s_i^2، تصح العلاقة التالية بين هذين المتوسطين:

$$GMSE \leq MSE \qquad (16.6)$$

ويكون هذان المتوسطان متساويين عندما تكون الـ s_i^2 جميعها متساوية، وكلما زاد تشتت الـ s_i^2 فيما بينها، كلما تباعد هذان المتوسطان إحداهما عن الآخر. وبالتالي إذا كانت النسبة $MSE/GMSE$ قريبة من 1، فهذا دليل على أن تباينات المجتمعات متساوية. بينما إذا كانت النسبة $MSE/GMSE$ كبيرة، فهذا مؤشر إلى أن تباينات المجتمعات غير متساوية. وسنحصل على الاستنتاجات نفسها لو أننا اعتبرنا:

$$\log GMSE - \log (MSE / GMSE) = \log MSE$$

وقد بيّن بارتلت أن دالة في $\log\ GMSE - \log MSE$، في حالة حجوم كبرى للعينات، ستتبع تقريبا توزيع χ^2 بـ r-1 من درجات الحرية، وذلك عند تساوي تباينات المجتمعات. وإحصاءة الاختبار هي:

$$B = \frac{df_T}{C} (\log_e MSE - \log_e GMSE) \qquad (16.7)$$

حيث

$$C = 1 + \frac{1}{3(r-1)} \left[\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{df_i} \right) - \frac{1}{df_T} \right] \qquad (16.7a)$$

ويكون الحد C دائما أكبر من 1.

وتختزل إحصاءة الاختبار (16.7) إلى:

$$B=\frac{1}{C}\left[(df_T)\log_e MSE-\sum_{i=1}^{r}(df_i)\log_e s_i^2\right] \qquad (16.8)$$

وللتقرير بين:

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=...=\sigma_r^2 \qquad (16.9a)$$

H_a: ليست جميع الـ σ_i^2 متساوية

نحسب إحصاءة الاختبار B. وبما أن B تتوزع تقريبا وفق χ^2 بـ $r - 1$ درجة حرية عندما تكون H_0 صحيحة. وأن القيم الكبيرة لـ B، كما رأينا، تؤدي إلى استنتاج H_a، وقاعدة القرار المناسبة التي تضبط مخاطرة الخطأ من النوع I عند القيمة α هي:

إذا كان $B \le \chi^2(1-\alpha; r-1)$ استنتج H_0 (16.9b)

إذا كان $B > \chi^2(1-\alpha; r-1)$ استنتج H_a

حيث $\chi^2(1-\alpha; r-1)$ هو المئين $100(1-\alpha)$ لتوزيع χ^2 بـ $r - 1$، درجة حرية. ويعطي الجدول $A.3$ مئينات لتوزيع χ^2. ويمكن اعتبار التقريب χ^2 مناسبا عندما تبلغ جميع درجات الحرية df_i أربعا أو أكثر. وعند استخدام اختبار بارتلت في نموذج تحليل التباين وحيد العامل (14.2)، يكون:

$$df_i=n_i-1 \qquad df_T=\sum_{i=1}^{r}(n_i-1)=n_T-r$$

مثال. يحوي الجدول (١٦-٢) بيانات عن الوقت اللازم لإكمال عملية إنتاج معينة في كل فترة من فترات العمل الثلاث في مصنع ما. ونُفذت العملية وفق فترة العمل 1 عشرين مرة. ووفق الفترة الثانية 17 مرة، ووفق الفترة الثالثة 21 مرة. وتم التحقق من أن توزيع المجتمعات الثلاث قريب من التوزيع الطبيعي. ونرغب الآن في استخدام اختبار بارتلت لتحديد ماإذا كانت تباينات فترات العمل σ_i^2 هي نفسها للفترات الثلاث أم لا.

ويوضح الجدول (١٦-٢) الحسابات اللازمة لاختبار بارتلت. وبحساب C من (16.7a) و B من (16.8) نحصل على:

$$C=1+\frac{1}{3(3-1)}\left[\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{16}+\frac{1}{20}\right)-\frac{1}{55}\right]=1.02449$$

و:

$$B=\frac{1}{1.02449}\left[55(6.18631)-338.32164\right]=\frac{1.92541}{1.02449}=1.8794$$

افترض أننا نريد ضبط مخاطرة الخطأ من النوع I عند $\alpha = .05$، فسنحتاج عندئذ لـ $\chi^2(.95;3\text{-}1)$ ونجد من الجدول A.3 أن $\chi^2(.95;3\text{-}1)$ وبذلك تكون قاعدة القرار كما يلي:

إذا كان $B \leq 5.99$ استنتج H_0

إذا كان $B > 5.99$ استنتج H_a

وبما أن $B = 1.88 \leq 5.99$ نستنتج H_0 أي أن تباينات المجتمعات الثلاثة متساوية.

والقيمة ـP للاختبار هي $= P\{\chi^2(2) > 1.8794\} = .39$.

جدول (١٦-٢) الحسابات اللازمة لاختبار بارتليت لتساوي تباينات المجتمعات الثلاثة

$(df_i)\log_e s_i^2$	$\log_e s_i^2$	$(df_i)s_i^2$	$df_i = n_i - 1$	s_i^2	مجتمع i
114.53732	6.02828	7,885	19	415	1
104.77152	6.54822	11,168	16	698	2
119.01280	5.95064	7,680	20	384	3
338.32164		26,733	$df_T = 55$		المجموع

$MSE = 26,733 \div 55 = 486.05$

$\log_e MSE = 6.18631$

ملاحظة

في المثال السابق، كان بإمكاننا تجنب حساب المقام C. فحتى قبل القسمة على C يمكن رؤية أن البسط في إحصاءة الاختبار 1.92541، يقع تحت القيمة الحرجة 5.99. وبما أن $C > 1$ دائماً فإن تأثير القسمة على C هو أن يجعل إحصاءة الاختبار B أصغر. وهكذا يمكن للمرء حساب البسط في B أولاً، ويحسب المقام C، فقط، في حالة أن بإمكانه التأثير على الناتج.

تحويل بوكس Box. كما ذكرنا سابقا، ينبغي عدم استخدام كاي مربع كتقريب لتوزيع إحصاءة اختبار بارتلت (16.7) تحت فرض تساوي تباينات المجتمع إذا كان أي

من درجات الحرية أقل من أربعة. ويمكن استخدام تقريب طوّره بوكس عندما تكون بعض درجات الحرية df_i صغيرة. وهو كذلك مناسب لأعداد أكبر من درجات الحرية. وهذا التقريب يستخدم التوزيع F. ومبني على إحصاءة اختبار بارتليت المعدلة B':

$$B' = \frac{f_2 BC}{f_1(A - BC)} \quad (16.10)$$

حيث:

$$f_1 = r - 1 \quad (16.40a)$$

$$f_2 = \frac{r+1}{(C-1)^2} \quad (16.10b)$$

$$A = \frac{f_2}{2 - C + \frac{2}{f_2}} \quad (16.10c)$$

ولاختبار الفرضيات البديلة في (16.9a)، تكون قاعدة القرار المناسبة لضبط مخاطرة الخطأ من النوع I عند α هي:

$$\text{إذا كان } B' \leq F(1 - \alpha; f_1, f_2) \text{ استنتج } H_0 \quad (16.11)$$

$$\text{إذا كان } B' > F(1 - \alpha; f_1, f_2) \text{ استنتج } H_a$$

حيث $F(1 - \alpha; f_1, f_2)$ هو المئين $100(1 - \alpha)$ للتوزيع F بدرجات حرية f_1 و f_2. ويعطي الجدول $A.4$ مئينات التوزيع F. وسوف لاتكون قيمة f_2، في العادة، عددا صحيحا مما يستوجب القيام باستيفاء في الجدول F. وكما يوضح المثال التالي ينبغي استخدام الاستيفاء العكسي.

مثال. سنستخدم مرة أخرى المثال في الجدول (١٦-٢). فقد وجدنا سابقا:

$$C = 1.02449 \qquad B = 1.8794$$

ونحتاج الآن لـ:

$$f_1 = 3 - 1 = 2$$

$$f_2 = \frac{3+1}{(1.02449 - 1.0)^2} = 6{,}669.3$$

$$A = \frac{6{,}669.3}{2 - 1.02449 + \frac{2}{6{,}669.3}} = 6{,}834.63$$

$$B' = \frac{6,669.3(1.8794)(1.02449)}{2[6,834.63 - 1.8794(1.02449)]} = .94$$

ولضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = .05$ ، نحتاج لقيمة $F(.95; 2, 6; 669.3)$.

ومن الجدول $A.4$ نجد أن:

$$F(.95; 2, 120) = 3.07 \qquad F(.95;2, \infty) = 3.00$$

والاستيفاء العكسي مشابه للاستيفاء الخطي فيما عدا أننا نستخدم القيم المعكوسة لتحديد الكسر من الفرق بين 3.00 و 3.07 وذلك كما يلي:

$$F(.95;\ 2; 6,669.3) = 3.07 + \frac{\dfrac{1}{6,669.3} - \dfrac{1}{120}}{\dfrac{1}{\infty} - \dfrac{1}{120}}(3.00 - 3.07) = 3.001$$

وبالتالي تكون قاعدة القرار:

إذا كان $B' \leq 3.001$ استنتج H_0

إذا كان $B' \leq 3.001$ استنتج H_a

وبما أن $3.001 \leq .94 = B'$ ، فنستنتج H_0، أي أن تباينات المجتمعات الثلاثة متساوية. وهذا هو القرار نفسه الذي حصلنا عليه من إحصاءة اختبار بارتليت والتقريب كاي مربع والقيمة ـP لاختبار بارتلت المعدل هي $p\{F(2, 6,669.3) > .94\} = .39$ وهي القيمة نفسها التي حصلنا عليها من إحصاءة اختبار بارتلت وكاي مربع التقريبي.

تعليقات

١ـ اختبار بارتلت حساس تماما لأي حيود عن شروط الطبيعية، بمعنى أنه إذا كانت المجتمعات في الواقع غير طبيعية، فإن مستوى المعنوية الفعلي يمكن أن يختلف بشكل كبير عن المستوى المحدد. وبالتالي إذا كانت المجتمعات تحيد بشكل كبير عن الطبيعية، فإنه لايوصى باستخدام اختبار بارتلت لاختبار تساوي التباينات. وبدلاً عنه ينبغي استخدام اختبار لامعلمي منيع. ويذكر المرجع (16.2) عديدا من هذه الاختبارات.

٢ـ إن اختبار F لتساوي متوسطات مستويات عامل، وكما سنرى من الفقرة

(١٦-٤)، لايتأثر كثيرا بعدم تساوي التباينات عندما تكون حجوم العينات في مستويات العامل متساوية تقريبا، وذلك طالما كانت الفروق بين التباينات غير كبيرة بشكل غير اعتيادي. ولذلك إذا كانت المجتمعات طبيعية بشكل معقول وبحيث يمكن استخدام اختبار بارتلت وكانت حجوم العينات لاتختلف اختلافا شديدا، فإن استخدام قيمة صغيرة لمستوى المعنوية α هو أمر مبرر، عند اختبار تساوي التباينات لغرض تحديد مصداقية نموذج تحاين طالما أنه يهمنا، فقط، اكتشاف الفروق الكبيرة بين التباينات.

اختبار هارتلي

إذا كان لكل من تباينات العينة s_i^2 وعدتها r العدد نفسه من درجات الحرية أي أن $df_i \equiv df$، فهناك اختبار بسيط يُعزى لهارتلي للتقرير فيما بين:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_r^2 \tag{16.12}$$

H_a: ليست جميع الـ σ_i^2 متساوية

وهذا الاختبار يعتمد بشكل تام على أكبر تباين عينة ونرمز له بـ $\max(s_i^2)$ وأصغر تباين عينة ونرمز له بـ $\min(s_i^2)$ وتكون إحصاءة الاختبار:

$$H = \frac{\max(s_i^2)}{\min(s_i^2)} \tag{16.13}$$

ومن الواضح أن قيم H القريبة من 1 تدعم H_0 ، بينما قيم H الكبيرة تدعم H_a. ولقد تمت جدولة توزيع H عندما تكون H_0 صحيحة، ويعطي الجدول أ-١٢ بعض مئينات مختارة لتوزيع H. ويعتمد توزيع H على عدد المجتمعات r، وعدد درجات الحرية المشترك df. وكما ذكرنا سابقا، فإن اختبار هارتلي، تماما مثل اختبار بارتليت، يفترض أن المجتمعات طبيعية.

وتكون قاعدة القرار المناسبة لضبط مخاطرة الخطأ من النوع الأول عند α هي:

$$\begin{aligned} &\text{إذا كان } H \le H(1-\alpha; r, df) \text{ استنتج } H_0 \\ &\text{إذا كان } H > H(1-\alpha; r, df) \text{ استنتج } H_a \end{aligned} \tag{16.14}$$

حيث $H(1-\alpha; r, df)$ هو المئين $100(1-\alpha)$ لتوزيع H عندما تكون H_0 صحيحة لـ r

من المجتمعات ودرجات حرية df لكل تباين عينة.

وعندما يُستخدم اختبار هارتلي في نموذج التحاين وحيد العامل (14.2) مع حجوم عينة متساوية $n_i \equiv n$ يكون $df = n - 1$.

مثال. في دراسة لجاذبية أربعة أنواع من اعلانات التلفاز التجارية، جُمعت 10 مشاهدات لكل إعلان، وكانت تباينات العينات كما يلي:

$$s_1^2 = 293 \qquad s_2^2 = 146 \qquad s_3^2 = 985 \qquad s_4^2 = 528$$

وقبل الشروع في تحليل التباين، فقد تقرر أن كل المجتمعات قريبة من الطبيعية مما يسمح باستخدام اختبار هارتلي للتحقق مما إذا كانت تباينات المعالجات الأربع متساوية أم لا:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2$$

H_a: ليست جميع الـ σ_i^2 متساوية

ويضبط مستوى المعنوية عند $a = .05$ وللقيم $r = 4$ و $df = n - 1 = 9$ نحتاج من الجدول $A.12$ للقيمة $H(.95; 4, 9) = 6.31$. وبالتالي تكون قاعدة القرار المناسبة:

إذا كان $H \leq 6.31$ استنتج H_0

إذا كان $H > 6.31$ استنتج H_a

ولدينا $max(s_i^2) = 985$ و $min(s_i^2) = 146$ وبالتالي:

$$H = \frac{985}{146} = 6.75$$

وبما أن $H = 6.75 > 6.31$، فنستنتج H_a، أي أن تباينات المعالجات الأربع غير متساوية.

تعليقات

١- يتطلب اختبار هارتلي أن تكون حجوم العينات متساوية. أما إذا كانت حجوم العينات غير متساوية ولكنها لاتختلف بشكل كبير فلا يزال بالإمكان استخدام اختبار هارتلي كاختبار تقريبي. ولهذا الغرض يُستخدم متوسط عدد درجات الحرية لدخول الجدول $A.12$.

٢ـ اختبار هارتلي، مثله مثل اختبار بارتلت، بالغ الحساسية للحيود عن فرض طبيعية المجتمعات ويجب عدم استخدامه في حالة حيود كبيرة عن هذا الفرض.

٣ـ يمكن تبرير استخدام قيم صغيرة لمستوى المعنوية α عند استخدام اختبار هارتلي لتحديد مصداقية نموذج تحاين بالنسبة لتساوي تباينات المعالجات، وللأسباب نفسها التي ذُكرت في اختبار بارتلت.

(٣ـ١٦) تحويلات

عندما تشير رسوم الرواسب أو أية تشخيصات أخرى إلى أن نموذج تحاين غير ملائم للبيانات التي لدينا، فهناك عدد من الاجراءات التصحيحية التي يمكن أن نختار منها. وأحدها هو تعديل النموذج، ومن مساوىء هذا الأسلوب أنه قد يؤدي أحيانا إلى تحليل معقد نوعا ما. والأسلوب الآخر هو استخدام تحويلات على البيانات، والأسلوب الثالث المفيد عندما تكون الصعوبة الأساسية هي الحيود الكبير عن الطبيعية هو استخدام اختبارات لامعلمية كاختبار الوسيط أو اختبار كروسكال ـ والاس المبني على الرتب (سيُناقش في الفصل ١٧).

و استخدام التحويلات هو الموضوع الأساس في هذه الفقرة. وبما أننا ناقشنا التحويلات في الفصل الرابع في تحليل الانحدار، فإن مناقشتنا له هنا ستكون موجزة.

تحويلات لتثبيت التباينات

يوجد العديد من الحالات التي تكون فيها تباينات حدود الخطأ غير ثابتة، وكل من هذه الحالات يتطلب تحويلا مختلفا لتثبيت التباين.

التباين متناسب مع μ_{ij}. عندما يتغير تباين حدود الخطأ، لأي مستوى عامل، (ويُرمز له بـ σ_i^2) بشكل متناسب مع متوسط مستوى العامل μ_i فستنحو إحصاءات العينة $s_i^2/\overline{Y}_{i.}$ إلى أن تكون ثابتة. حيث s_i^2 هو تباين العينة لمشاهدات المستوى i للعامل، كما عُرف في (14.37). ونتعرض لمثل هذه الحالة، غالبا، عندما يكون المتغير المشاهَد Y هو عملية تعداد أو عدد، مثل عدد المحاولات لشخص ما قبل أن يحصل على الحل الصحيح. وفي مثل هذه الحالة يكون تحويل الجذر التربيعي مفيدا لتثبيت التباينات:

إذا كان σ_i^2 يتناسب مع μ_i :

$$Y'=\sqrt{Y} \quad \text{أو} \quad Y'=\sqrt{Y}+\sqrt{Y+1} \qquad (16.15)$$

الانحراف المعياري متناسب مع μ_{ij}. عندما يكون الانحراف المعياري لحدود الخطأ لأي مستوى عامل متناسبا مع المتوسط، تنحو إحصاءات العينة $s_i/\overline{Y}_{i.}$ إلى أن تكون ثابتة. وفي هذه الحالة، فإن التحويل المفيد لتثبيت التباينات هو التحويل اللوغارتيمي:

(16.16) إذا كان σ_i متناسباً مع μ_i: $Y' = \log Y$

الانحراف المعياري متناسب مع μ_i^2 . عندما يكون الانحراف المعياري لحد الخطأ متناسبا مع مربع متوسط مستوى العامل، ينحو $s_i/\overline{Y}_i^2$ إلى أن يكون ثابتا. وفي هذه الحالة، فإن التحويل الملائم هو تحويل المقلوب:

(16.17) إذا كان σ_i متناسباً مع μ_i^2: $Y' = 1/Y$

المتغير التابع نسبة. يكون المتغير المشاهد Y_{ij} أحيانا، عبارة عن نسبة. فعلى سبيل المثال، قد تكون المعالجات طرق تدريب مختلفة ووحدة المشاهدة فصل تدريب في الشركة، والمتغير المشاهد Y_{ij} هو نسبة المستخدمين من الفصل j لطريقة التدريب i الذين انتفعوا بشكل كبير من التدريب. لاحظ هنا أن n_i تعني عدد الفصول التي تلقت طريقة التدريب i وليس عدد الطلاب.

ومن المعروف تماما أنه في حالة ذي الحدين، يعتمد تباين نسبة العينة على النسبة الحقيقية. وعندما يبقى عدد الحالات الذي تبنى عليه كل نسبة عينة بدون تغيير، فإن التباين يكون.

$$\sigma^2\{p_{ij}\} = \frac{\pi_i(1-\pi_i)}{m} \qquad (16.18)$$

حيث تدل π_i على نسبة المجتمع للمعالجة i و m هو عدد الحالات المشترك الذي تُبنى عليه كل نسبة عينة، وبما أن $\sigma^2\{P_{ij}\}$ يعتمد على نسبة المعالجة π_i، فإن تباينات حدود الخطأ لاتكون ثابتة إذا كانت النسب π_i مختلفة. والتحويل الملائم في هذه الحالة هو تحويل قوس الجيب:

(16.19) إذا كانت المشاهدة نسبة: $Y' = 2\arcsin\sqrt{Y}$

وعندما تبنى النسب p_{ij} على أعداد مختلفة من الحالات (مثلاً، في مثالنا التوضيحي السابق. قد توجد أعداد مختلفة من المستخدمين في كل فصل تدريبي)، فينبغي استخدام التحويل (16.19) بالإضافة إلى تحليل المربعات الدنيا المرجحة كما وُصفت في الفقرة (١١-٨).

مثال. دل إختبار هارتلي، في مثال الاعلانات التجارية، على أن تباينات الخطأ للإعلانات الأربعة غير متساوية. ولمعرفة التحويل الأفضل لتثبيت التباينات، نحتاج لفحص العلاقة بين تباينات العينة s_i^2 ومتوسطات مستويات العامل المقدرة $\overline{Y}_{i.}$ والبيانات بعد تلخيصها (لم تعط المشاهدات الأصلية) هي:

i	1	2	3	4
s_i^2	293	146	985	528
$\overline{Y}_{i.}$	65.2	31.9	211.8	117.4

ونحسب الآن النسب $s_i^2/\overline{Y}_{i.}$ و $s_i/\overline{Y}_{i.}$ و $s_i/\overline{Y}_{i.}^2$، والنتائج كما يلي:

i	$\frac{s_i^2}{\overline{Y}_{i.}}$	$\frac{s_i}{\overline{Y}_{i.}}$	$\frac{s_i}{\overline{Y}_{i.}^2}$
1	4.5	.26	.0040
2	4.6	.38	.0119
3	4.7	.15	.0007
4	4.5	.20	.0017

ويبدو أن العلاقة $s_i^2/\overline{Y}_{i.}$ هي العلاقة الأكثر ثباتا، ولذلك فقد يكون تحويل الجذر التربيعي (16.15) هو التحويل المفيد لتثبيت تباينات الخطأ هنا.

تحويلات لتصحيح نقص الطبيعية

عندما تتوزع حدود الخطأ وفق التوزيع الطبيعي ولكن بتباينات غير متساوية، فإن تحويل البيانات لتثبيت التباينات سيدمّر الطبيعية. ولكن، لحسن الحظ، في التطبيقات العملية يسير نقص الطبيعية وعدم تساوي التباينات جنبا إلى جنب. وبالإضافة إلى ذلك ،فإن التحويل الذي يساعد في تصحيح نقص تساوي التباينات يكون عادة فعالا، أيضا، في جعل توزيع حدود الخطأ يقترب من التوزيع الطبيعي. ولكن من الحكمة كما ذكرنا في الفصل الرابع فحص الرواسب عند التحويل للتأكد من أنه كان فاعلاً في تثبيت التباينات وجعل توزيع حدود الخطأ طبيعياً بشكل معقول.

تعليقات

١- عند الحاجة إلى تحويل البيانات، يمكن للمرء أن يعمل بشكل تام مع البيانات المحولة لاختبار تساوي متوسطات مستويات العامل. ولكن من جهة أخرى، فإنه غالبا مايفضل عند تقدير تأثيرات مستويات العامل أن تغير فترة الثقة المبنية على المتغير المحوَّل إلى فترة الثقة المبنية على المتغير الأصلي وذلك لتسهيل عملية الفهم لدلالة النتائج.

٢- تم الحصول على التحويلات المقترحة سابقا عن طريق المناقشة التالية. افترض أن Y متغير عشوائي بمتوسط μ وتباين σ_Y^2 هو دالّة في μ، وليكن $\sigma_Y^2 = g(\mu)$. ومن أجل تحويل ما لِـ Y وليكن $Y' = h(Y)$، مستخدمين مفكوك متسلسلة تايلور، يمكن إثبات أن:

$$\sigma_{Y'}^2 \cong [h'(\mu)]^2\, g(\mu) \tag{16.20}$$

حيث $h'(\mu)$ هي المشتقة الأولى لـ $h(Y)$ عند μ. ونحن نبحث عن ذلك التحويل h بحيث يكون $\sigma_{Y'}^2$ ثابت، وللسهولة ليكن 1 وبالتالي نرغب بما يلي:

$$[h'(\mu)]^2 g(\mu) = 1$$

أو:

$$h'(\mu) = \frac{1}{\sqrt{g(\mu)}} \tag{16.21}$$

المعادلة (16.21) هي معادلة تفاضلية وحلها هو (مع إهمال الثابت الكيفي):

$$h(\mu) = \frac{d\mu}{\sqrt{g(\mu)}} \tag{16.22}$$

ولتوضيح استخدام (16.22)، افترض أن σ_Y^2 متناسبة مع μ، ولتكن $\sigma_Y^2 = k\mu = g(\mu)$ ، فنحصل من (16.22) على:

$$h(\mu) = \int \frac{d\mu}{\sqrt{g(\mu)}} = \frac{2}{\sqrt{k}}\sqrt{\mu}$$

وهكذا، فإن تحويل الجذر التربيعي $Y' = \sqrt{Y}$ سيؤدي إلى تباين ثابت لـِ Y'، و $Y' = (2/\sqrt{k})\sqrt{Y}$ سيؤدي إلى تباين ثابت يساوي 1.

وتبين المعادلة (16.20) بشكل واضح أن التحويل الذي تم الحصول عليه بهذه الطريقة يثبّت التباين بشكل تقريبي، فقط. ولذلك فمن المهم فحص الرواسب للمتغير بعد التحويل للوقوف على مدى فعالية التحويل في تثبيت التباينات بالفعل.

(١٦-٤) تأثيرات الحيود عن النموذج

لقد تطرقنا في الفقرات السابقة لمدى فائدة تحليل الرواسب وتقنيات تشخيصية أخرى في تقويم مصداقية نموذج تحاين للبيانات التي لدينا. وقد ناقشنا استخدام التحويلات لتثبيت التباينات بصورة رئيسة، ولكن، أيضا، وكنتيجة جانبية لذلك، الحصول على توزيعات للخطأ تكون قريبة من التوزيع الطبيعي. والسؤال الذي يبرز الآن هو ماهي تأثيرات أية حيود متبقية عن النموذج على الاستقراءات التي نقوم بها. لقد قام شيفّه (المرجع 16.3) بمراجعة شاملة للعديد من الدراسات التي تبحث في هذه التأثيرات وسنلخص هنا النتائج.

عدم الطبيعية

لايشكل نقص الطبيعية، في نموذج التحاين المثبت. أمرا مهما طالما كان الحيود عن الطبيعية غير مفرط. ويمكن التنويه في هذا المجال إلى أن تفرطح توزيع الخطأ (سواء أكان أكثر تفرطحا من التوزيع الطبيعي أم أقل) أكثر أهمية من التواء توزيع الخطأ من حيث التأثير على الاستقراءات. وتكون التقديرات النقطية لمتوسطات مستويات العامل وللمقارنات غير منحازة سواء كانت المجتمعات طبيعية أم لا. ولكن اختبار F لتساوى متوسطات مستويات العامل يتأثر قليلاً بنقص الطبيعية سواء في مستوى المعنوية أو في قوة الاختبار. وهكذا يكون الاختبار F منيعا إزاء الحيود عن الطبيعية. فعلى سبيل المثال، قد يكون مستوى المعنوية المحدد هو .05 ، ولكن مستوى المعنوية الفعلي في حالة توزيع غير طبيعي للخطأ قد يكون .04 أو .065 وبصورة تقليدية يكون مستوى المعنوية الذي نحصل عليه في حال عدم الطبيعية أكبر بقليل من المستوى المحدد، بينما تكون قوة الاختبار أقل بشكل بسيط من القيمة المحسوبة. وكذلك فإن تقديرات الفترة المنفردة لمتوسطات مستويات العامل وللمتضادات، وطريقة شيفّه للمقارنات المتعددة،

لا تتأثر ،أيضا، بشكل كبير بالنقص في الطبيعية طالما كانت حجوم العينات غير مفرطة في صغرها.

وبالنسبة لنموذج التحاين II العشوائي (الذي سيُناقش في الفصل التالي) يكون للنقص في الطبيعية تبعات أكثر خطورة. وهنا ستكون تقديرات مركبات التباين غير منحازة، ولكن معامل الثقة الفعلي لتقديرات الفترة يمكن أن يختلف بشكل كبير عن القيمة المحددة له.

عدم تساوي تباينات الخطأ

عندما تكون تباينات الخطأ غير متساوية، فإن اختبار F لتساوي متوسطات مستويات العامل في نموذج التحاين المثبت يتأثر تأثرا طفيفا، فقط، إذا كانت حجوم العينات لجميع مستويات العامل إما متساوية أو لاتختلف اختلافا كبيرا. وعلى وجه التحديد، فإن عدم تساوي تباينات الخطأ يرفع مستوى المعنوية بشكل بسيط فوق المستوى المحدد. وبصورة مماثلة، فإن طريقة شيفّه للمقارنات المتعددة المبنية على الاختبار F، لاتتأثر تأثرا كبيرا بعدم تساوي تباينات العينة عندما تكون حجوم العينات متساوية أو متساوية تقريبا. وهكذا، فإن الاختبار F والتحاليل ذات الصلة، منيعة إزاء عدم تساوي التباينات، وذلك عندما تكون حجوم العينات تقريبا متساوية. ومن جهة أخرى، قد تتأثر مقارنات بمفردها بين متوسطات مستويات العامل تأثرا كبيرا لعدم تساوي التباينات، وبحيث يمكن أن تختلف معاملات الثقة المحددة والفعلية بشكل ملحوظ في مثل هذه الحالات.

ولايؤدي استخدام حجوم عينات متساوية لكل مستويات العامل إلى تقليص تأثيرات عدم تساوي التباينات على استقراءات من التوزيع فحسب، بل يبسّط، أيضا، الاجراءات الحسابية. وهكذا، فإن البساطة والمناعة تسيران، هنا على الأقل، جنبا إلى جنب.

وفي نموذج التحاين العشوائي، يمكن أن يكون لعدم تساوي تباينات الخطأ آثار واضحة على استقراءات تتعلق بمركبات التباين حتى لو كانت حجوم العينات متساوية.

عدم استقلالية حدود الخطأ

يمكن أن يكون للنقص في استقلالية حدود الخطأ آثار خطيرة على الاستقراءات في تحليل التباين، وذلك لكل من نماذج التحاين المثبتة والعشوائية. وبما أنه من الصعب، غالبا، تصحيح هذا الخلل، فمن المهم تلافيه منذ البداية كلما أمكن ذلك. واستخدام التعشية في تلك المراحل من الدراسة التي يُتوقع أن تقود إلى حدود خطأ مرتبطة، يمكن أن يشكل سياسة الضمان الأكثر أهمية. وعلى أي حال يمكن أن تكون التعشية غير ممكنة في حالة بيانات المشاهدة. وفي هذه الحالة عند وجود حدود خطأ مرتبطة يمكن للمرء أن يعدل النموذج. فعلى سبيل المثال، في مناقشتنا السابقة المبنية على الشكل (١٦-٣)، ذكرنا أن إدخال حد خطي في النموذج خاص بتأثير تعلّم المحلل يمكن أن يؤدي إلى إزالة الارتباط في حدود الخطأ. ويمكن أن يكون تعديل النموذج، بسبب وجود حدود خطأ مرتبطة، ضروريا، أيضا، في الدراسات التجريبية. في أحد الحالات، طلبت المجربة من 10 أشخاص إعطاء درجات تصنيف لأربعة أنواع جديدة من نكهات شراب فاكهة، وكذلك للنكهة القياسية، وذلك على سلّم قياس يتراوح بين 0 و100. وقد طبقت نموذج تحليل التباين وحيد العامل ولكنها وجدت درجات ارتباط أعلى بين الرواسب لكل شخص. وتبعا لذلك، فقد عدلت نموذجها إلى نموذج تصميم قياسات متكررة (الفصل ٢٨). وهذه النماذج مصممة للحالات التي يُعطى فيها العنصر التجريبي نفسه كلاً من المعالجات المختلفة ويتوقع أن توجد اختلافات بين العناصر.

مراجع ورد ذكرها

[16.1] *MINITAB Reference Manual, Release* 7. State College, Pa.: Minitab, Inc., 1989.

[16.2] Glaser, R. E. "Bartlett's Test of Homogeneity of Variances." In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 1, ed. S. Kotz and N. L. Johnson. New York: John Wiley & Sons, 1982, pp. 189 - 91.

[16.3] Scheffé, H. *The analysis of Variance*. New York: John Wiley & Sons, 1959.

مسائل

(١٦-١) بالرجوع إلى الأشكال (١٦-٣) و (١٦-٤)، ما هي الملامح في الرسوم التسلسلية للرواسب التي تمكنك من تشخيص أن تباين الخطأ يتغير فوق الزمن في واحدة من حالتين، بينما يكون للتأثير في الحالة الأخرى، طبيعة مختلفة؟ وهل يمكنك القيام بتشخيص تأثيرات الزمن من رسم نقطي للرواسب؟

(١٦-٢) اقترح أحد طلاب فصل رسم انحرافات المشاهدات Y_{ij} حول المتوسط الإجمالي المقدَّر $\bar{Y}$، وذلك للمساعدة في تقويم مصداقية نموذج التحاين (14.2). هل ستساعد هذه الانحرافات في دراسة استقلال حدود الخطأ وفي ثبات تباين حدود الخطأ؟ وفي طبيعية حدود الخطأ؟ ناقش.

(١٦-٣) عرض أحد المستشارين وهو يناقش تطبيقات التحاين مايلي: "في بعض الأحيان أجد أن تأثيرات المعالجات في التجربة لاتتضح من خلال الفروق بين متوسطات المعالجات. ولذلك فمن المهم مقارنة رسوم الرواسب للمعالجات". وقال أحد الحاضرين لاحقاً "لا أظن أنني فهمت الإشارة إلى رسوم الرواسب: اشرح.

(١٦-٤) بالرجوع إلى مسألة **تحسين الإنتاج** (١٤-١٠)، كانت الرواسب كما يلي:

i	1	2	3	4	5	6
منخفض	.72	1.32	-.08	-1.08	.02	-.28
معتدل	-1.43	-.03	1.27	.47	-.33	-.43
مرتفع	-.70	.50	.90	-1.40	.40	.30

i	7	8	9	10	11	12
منخفض	-.58	.82	-.88			
معتدل	.77	-.23	.17	.57	-1.03	.27
مرتفع						

أ ـ جهِّز رسوم راسب نقطية مصطفّة لكل مستوى عـامل. مـا هـي أنـواع الحيود عن نموذج التحاين (14.2) التي يمكن دراستها من هذه الرسـوم؟ وماهي استنتاجاتك؟

ب ـ جهِّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبـدو فـرض الطبيعية ملائما هنا؟.

جـ ـ يرغب الاقتصادي في بحـث مـا إذا كـان موقـع الإدارة العامـة للشـركة مرتبط بتحسين الانتاجية. ومواقع الادارات العامة كما يلي (أوروبا E، أمريكا U).

					j							
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i
			U	U	U	U	E	E	E	E	U	1
E	E	E	U	U	U	U	U	E	E	E	E	2
						E	U	U	E	U	E	3

جهِّز رسوما نقطية للرواسب توضح فيها مقر الإدارة العامة. وهل يبدو أنه من الممكن تحسين نموذج التحاين بإضافة موقع الادارة العامة كعامل ثان؟ اشرح.

(١٦ـ٥) بالرجوع إلى مسألة **لون الاستبيان** (١٤ـ١١)، كانت الرواسب كما يلي:

		j			
5	4	3	2	1	i
5.6	-2.4	1.6	-3.4	-1.4	1
-.6	1.4	-4.6	-.6	4.4	2
0.0	1.0	-1.0	-3.0	3.0	3

أ ـ جهِّز رسوم راسب نقطيـة مصطفـة لكـل لـون، مـاهي الحيـود عـن نمـوذج التحاين (14.2) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم؟ وماهي استنتاجاتك؟

ب ـ جهِّـز رسـم احتمـال طبيعـي للرواسـب. أوجـد معـامل الارتبـاط بـين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعيـة. هـل يبـدو فـرض الطبيعية ملائما هنا؟.

جـ ـ المشاهدات في كل مستوى عامل مرتبة جغرافيا. جهِّز رسوم تسلسلية للرواسب. ماذا يمكن دراسته من هذه الرسوم؟ وماهي استنتاجاتك؟

د ـ احسب الرواسب المعيّرة (16.2) أوجد الفترات المتمركزة التي يجب أن يقع فيها تقريبا 50 في المئة و 90 في المئة من الرواسب المعيّرة لو كانت حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي بتباين ثابت. ما هي النسب الفعلية للرواسب داخل هذه الفترات؟ وهل هذه النتائج متسقة مع تلك في الفقرة (ب)؟.

(١٦-٦) بالرجوع إلى مسألة **علاج إعادة التأهيل** (١٤-١٢).

أ ـ احسب الرواسب وجهِّز رسوم راسب نقطية مصطفّة لكل مستوى عامل. ماهي الحيود عن نموذج التحاين (14.2) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم؟ وماهي استنتاجاتك؟

ب ـ جهِّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية و هل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟.

جـ ـ المشاهدات في كل مستوى عامل مرتبة حسب الزمن. جهز رسوما تسلسلية للرواسب وحللها. ماذا وجدت؟

د ـ احسب الرواسب المعيّرة (16.2).أوجد الفترات المتمركزة التي يجب أن يقع فيها تقريبا 50 في المئة من الرواسب المعيّرة لو كانت حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي بتباين ثابت. ماهي النسب الفعلية للرواسب داخل هذه الفترات؟ وهل هذه النتائج متسقة مع تلك في الفقرة (ب)؟

(١٦-٧) بالرجوع إلى مسألة **العروض النقدية** (١٤-١٣):

أ ـ أوجد الرواسب وجهز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل مستوى عامل ـ ما هي أنواع الحيود عن نموذج التحاين (14.2) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم؟ ماهي استنتاجاتك؟.

ب ـ جهِّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل ارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟

جـ ـ المشاهدات في كل مستوى عامل مرتبة حسب الزمن. جهز رسوما تسلسلية للرواسب وحللها. ماهي استنتاجاتك؟.

د ـ تم إبلاغ أحد المدراء التنفيذيين في منظمة المستهلكين بأن تجار السيارات المستعملة في المنطقة اتجهوا إلى تقديم عروض نقدية أقل خلال إجازة نهاية الاسبوع (مساء الجمعة وحتى غاية الأحد) منها في الأوقات الأخرى. وأزمنة تقديم العروض هي كما يلي: (عطلة نهاية الأسبوع: W، أي وقت آخر: O):

						j						
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i
W	W	O	W	O	W	O	W	O	W	O	O	1
O	W	W	O	O	W	O	W	O	W	W	O	2
W	O	W	W	W	O	O	O	W	O	W	O	3

جهِّز رسوما نقطية توضح فيها وقت تقديم العرض. وهل يبدو أنه من الممكن تحسين نموذج التحاين (14.2) بإضافة وقت تقديم العرض كعامل ثان؟ اشرح.

(١٦-٨) بالرجوع إلى مسألة **آلات التعبئة** (١٤-١٤):

أ ـ احسب الرواسب وجهز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل آلة. ما هي أنواع الحيود عن نموذج التحاين (14.2) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم؟ ماهي استنتاجاتك؟

ب ـ جهِّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟.

جـ ـ المشاهدات في كل مستوى عامل مرتبة حسب الزمن. جهِّز رسوما تسلسلية للرواسب وحللها. ماهي استنتاجاتك؟.

(١٦-٩) بالرجوع إلى مسألة **توزيع الجوائز التشجيعية** (١٤-١٥):

أ - أوجد الرواسب وجهِّز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل وكيل. ما هي أنواع الحيود عن نموذج التحاين (14.2) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم؟ ماهي استنتاجاتك؟.

ب - جهِّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟

جـ - المشاهدات في كل مستوى عامل مرتبة حسب الزمن. جهِّز رسوما تسلسلية للرواسب وحللها. ما هي استنتاجاتك؟

(١٦-١٠) **لعبة حاسوبية.** تسابقت أربع فرق في 20 محاولة للعبة تجارية مبرمجة بالحاسب الآلي. وتضمنت كل محاولة لعبة جديدة، وكان هدف كل فريق أن يجعل ربحه أكبر مايمكن في المحاولة المعطاة. وقام باحث بتوفيق نموذج التحاين (14.2) لتحديد ماإذا كانت متوسطات الأرباح للفرق الأربع هي نفسها وحصل على الرواسب التالية:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i
-.26	.10	-.08	.28	.65	.83	.47	.10	.28	.10	1
.03	-.29	-.46	-.29	-.62	-.95	-1.28	-1.12	-1.44	-1.44	2
.09	-.14	.00	-.14	-.36	-.25	-.59	-.81	-.70	-.93	3
.25	.38	.11	-.02	-.29	-.15	-.02	.25	.11	-.15	4

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	i
.28	.28	.10	.10	-.08	-.45	-.63	-1.00	-.63	-.45	1
1.51	1.18	1.02	.85	1.02	.85	.69	.36	.20	.20	2
.65	.43	.54	.54	.43	.20	.09	.31	.43	.20	3
.38	.25	.11	.25	-.15	-.15	-.42	-.29	-.42	-.02	4

(الأعمدة في الجدولين تحت العنوان j)

الرواسب لكل فريق معطاة حسب الترتيب الزمني. جهِّز رسوم رواسب مناسبة

لدراسة ما إذا كانت حدود الخطأ مستقلة من محاولة لأخرى لكل فريق. ماهي استنتاجاتك؟.

(١٦-١١) **خدمة طائرة مروحية.** قام أحد محللي العمليات في قسم الشرطة بدراسة عدد مرات استخدام طائرة الطوارىء المروحية خلال فترة 20 يوما لكل فترة من فترات اليوم (الوردية ١: ٢ ص - ٨ ص، الوردية ٢: ٨ ص - ٢م، الوردية ٣: ٢م - ٨م الوردية ٤: ٨ م - ٢ ص). وكانت البيانات كما يلي (بالترتيب الزمني).

										j										
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i
6	1	4	0	5	4	7	4	5	2	1	7	5	2	3	6	4	5	3	4	1
0	2	2	1	3	1	0	1	1	0	0	1	3	0	1	2	3	0	2	0	2
4	2	0	3	1	0	4	2	3	1	0	2	4	3	1	4	3	0	1	2	3
3	2	5	1	4	3	3	2	0	1	3	7	5	3	5	6	4	4	2	5	4

وبما أن البيانات هنا هي بيانات عدّ، فقد كان المحلل قلقا بشأن فرضيات الطبيعية وتساوي التباينات في نموذج التحاين (14.2).

أ - جهّز رسوم رواسب مناسبة لدراسة ما إذا كانت تباينات الخطأ متساوية للورديات الأربع. ماهي استنتاجاتك؟

ب - احسب $\bar{Y}_{i.}$ و s_i لكل وردية. تفحّص ماإذا كانت أي من العلاقات (16.15) أو (16.16) أو (16.17) هي الأكثر ملاءمة هنا. ماذا تستنتج؟.

جـ - أوجد الرواسب المعيّرة (16.3) وجهّز رسم احتمال طبيعي. أوجد ،أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو فرض الطبيعية معقولاً هنا؟.

د - قرر المحلل أن يطبق تحويل الجذر التربيعي (16.15) أوجد البيانات المحوّلة $Y'=\sqrt{Y}$ ومن ثَمَّ احسب الرواسب.

هـ - جهّز رسوما مناسبة للرواسب التي حصلت عليها في الجزء (د) وذلك لدراسة تساوي تباينات الخطأ للورديات الأربع وأوجد رسم احتمال طبيعي ومعامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. ماهي استنتاجاتك؟.

(١٦-١٢) **سرعات اللف.** في تجربة لدراسة تأثير سرعة لف الخيط (١ بطيء، ٢ طبيعي، ٣ سريع، ٤ أقصى سرعة) على مكب طوله ٧٦ ياردة، وتمَّ القيام بـ 16 تكرارا ويتضمن كل تكرار 10000 مكب وذلك عند كل سرعة من سرعات اللف الأربع ـ والمتغير المستقل هنا هو عدد مرات انقطاع الخيط أثناء عملية الإنتاج.،النتائج (مرتبة حسب الزمن) هي كما يلي:

							j									
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i
4	3	2	4	4	2	4	5	6	3	4	4	3	2	3	4	1
6	7	4	6	8	3	9	5	5	9	2	7	6	4	6	7	2
14	10	13	6	11	12	6	7	17	12	9	10	12	14	6	12	3
23	9	19	16	21	18	24	11	25	16	11	13	20	7	15	17	4

بما أن البيانات هنا هي بيانات عدّ، فقد كان الباحث قلقا بشأن افتراضات الطبيعية وتساوي التباينات لنموذج التحاين (14.2).

أ ـ جهّز رسوم رواسب مناسبة لدراسة ما إذا كانت تباينات الخطأ متساوية من أجل السرعات الأربع. ماهي استنتاجاتك؟

ب ـ احسب $\overline{Y}_{i.}$ و s_i لكل سرعة لف. تفحّص ماإذا كانت أي من العلاقات (16.15) أو (16.16) أو (16.17) هي الأكثر ملاءمة هنا. ماذا تستنتج؟.

جـ ـ أوجد الرواسب المعيّرة (16.3) وجهز رسم احتمال طبيعي. أوجد ،أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو فرض الطبيعة معقولاً هنا؟.

د ـ قرر الباحث أن يطبق التحويل اللوغارتيمي (16.16) ، أوجد البيانات المحولة $Y' = \log_{10} Y$ ومن ثم أحسب الرواسب.

هـ ـ جهِّز رسوما مناسبة للرواسب التي حصلت عليها في الجزء (د)، وذلك لدراسة تساوي تباينات الخطأ لسرعات اللف الأربع. وجهز ،أيضا، رسم احتمال طبيعي. أوجد معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. ماهي استنتاجاتك؟.

(١٦-١٣) استخدم الاستيفاء العكسي لايجاد المئينات التالية:

أ - $F(.95\,;3\,,360)$

ب - $F(.99\,;200,4)$

جـ - $F(.90\,;400\,,500)$

(١٦-١٤) بالرجوع إلى مسألة **تحسين الإنتاجية** (١٤-١)، فيما يلي بعض النتائج الحسابية الإضافية:

i	1	2	3
s_i	.8136	.7572	.8672

افترض أن حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي تقريبا.

أ - تفحّص ماإذا كانت تباينات خطأ المعالجات متساوية أم لا باستخدام اختبار بارتليت، استخدم $\alpha = .05$. أذكر الفرضيات البديلة وقاعدة القرار والنتيجة، ماهي القيمة -P للاختبار؟

ب - هل ستتوصل إلى القرار نفسه الذي حصلت عليه في (أ) لو أنك استخدمت اختبار بارتليت المعدل؟.

جـ - هل ستكون الاختبارات في (أ) و (ب) مناسبة لو أن توزيع حدود الخطأ كان بعيدا جدا عن الطبيعية؟

(١٦-١٥) بالرجوع إلى مسألة **علاج إعادة التأهيل** (١٤-١٢) افترض أن حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي تقريبا.

أ - تفحّص ماإذا كانت تباينات خطأ المعالجات متساوية أم لا باستخدام اختبار بارتليت، استخدم $\alpha = 0.10$. اذكر الفرضيات البديلة وقاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

ب - هل ستتوصل إلى القرار نفسه الذي حصلت عليه في الجزء (أ) لو أنك استخدمت اختبار بارتليت المعّدل؟

جـ - هل ستكون الاختبارات في(أ) و(ب) مناسبة لو أن توزيع حدود الخطأ كان بعيدا جدا عن الطبيعية؟.

(١٦-١٦) بالرجوع إلى مسألة **العروض النقدية** (١٤-١٣). افترض أن حدود الخطأ تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي.

أ - تفحّص ماإذاكانت تباينات خطأ المعالجات متساوية أم لا باستخدام اختبار بارتلت، استخدم $\alpha = .01$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

ب - هل ستتوصل إلى القرار نفسه الذي حصلت عليه في (أ) لو أنك استخدمت اختبار هارتلي؟

(١٦-١٧) بالرجوع إلى مسألة **آلات التعبئة** (١٤-١٤). افترض أن حدود الخطأ تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي.

أ - تفحّص باستخدام اختبار بارتليت ماإذا كانت تباينات خطأ المعالجات متساوية أم لا، استخدم $\alpha = .01$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

ب - هل ستتوصل إلى القرار نفسه الذي حصلت عليه في (أ) لو أنك استخدمت اختبار هارتلي؟

(١٦-١٨) بالرجوع إلى مسألة **خدمة الطائرة المروحية** (١٦-١١). افترض أن حدود الخطأ تتبع تقريبا التوزيع الطبيعي.

أ - بالنسبة للبيانات غير المحوّلة، استخدم اختبار بارتليت لاختبار ماإذا كانت تباينات معالجات الخطأ متساوية أم لا، استخدم $\alpha = .10$. ما هي القيمة -P للاختبار؟ هل نتائجك متسقة مع التشخيصات في (١٦-١١)أ؟.

ب - أعد اختبار بارتليت للبيانات المحوَّلة في المسألة (١٦-١١)د. ما هي استنتاجاتك الآن؟

(١٦-١٩) بالرجوع إلى مسألة **سرعات اللف** (١٦-١٢). افترض أن حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي تقريبا.

أ ـ بالنسبة للبيانات غير المحولة، استخدم اختبار هارتلي لاختبار ما إذا كانت تباينات معالجات الخطأ متساوية أم لا، استخدم $\alpha = .05$. ما هي القيمة ـP للاختبار؟ هل نتائجك متسقة مع التشخيصات في (١٦-١٢)أ؟.

ب ـ أعد اختبار هارتلي للبيانات المحوّلة في المسألة (١٦ـ١٢)د . ما هي استنتاجاتك الآن؟.

تمارين

(١٦-٢٠) بالرجوع إلى الشكل (١٦-٣). عدّل نموذج التحاين (14.2) بحيث يتضمن حد إتجاه خطي لتأثيرات الزمن. هل هذا النموذج المعدّل لايزال نموذج تحاين؟ لايزال نموذجا خطيا؟.

(١٦-٢١) (تحتاج حساب التفاضل) استخدم (16.22) لإيجاد التحويل المناسب عندما يكون: (١) $\sigma_i = k\mu_i$ ، (٢) $\sigma_i = k\mu_i^2$.

مشاريع

(١٦-٢٢) بالرجوع إلى مجموعة البيانات **SENIC** وإلى المشروع (١٤-٣٣):

أ ـ أوجد الرواسب وجهّز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل منطقة. هل تقترح رسومك وجود أية حيود خطيرة عن نموذج التحاين (14.2)؟

ب ـ جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب وأوجد معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو افتراض الطبيعية معقولاً هنا؟

جـ ـ افترض أن حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي تقريبا. تفحّص باستخدام اختبار بارتليت ماإذا كانت تباينات خطأ المناطق الجغرافية متسوية أم لا، استخدم $\alpha = .05$. اذكر الفرضيات البديلة وقاعدة القرار والنتيجة . ما هي القيمة ـP للاختبار؟

(١٦-٢٣) بالرجوع إلى مجموعة البيانات **SENIC**. يراد اختبار ماإذا كان متوسط طول الإقامة (المتغير 2) هو نفسه في المناطق الجغرافية الأربع (المتغير 9) أم لا. ولكن هناك قلق بشأن فرضيات الطبيعية وتساوي التباينات في نموذج التحاين (14.2).

أ ـ أوجد الرواسب وارسمها مقابل القيم التوفيقية وذلك لدراسة ماإذا كانت تباينات الخطأ متساوية للمناطق الجغرافية الأربع أم لا. ماهي استنتاجاتك؟

ب ـ احسب $\bar{Y}_i$ و s_i لكل منطقة جغرافية وتفحّص ما إذا كانت أي من العلاقات (16.15) أو (16.16) أو (16.17) هي الأكثر ملاءمة هنا. ماذا تستنتج؟.

جـ ـ استخدم التحويل العكسي (16.17) للحصول على البيانات المحوّلة $Y' = 1 / Y$.

د ـ أوجد الرواسب عند توفيق نموذج التحاين (14.2) للبيانات المحولة. ارسم هذه الرواسب مقابل القيم التوفيقية لدراسة تساوي تباينات الخطأ للمناطق الجغرافية الأربع. وجهّز كذلك رسم احتمال طبيعي للرواسب وأوجد معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. ماهي استنتاجاتك؟

هـ ـ افترض أن حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي تقريبا. تفحّص باستخدام اختبار بارتليت ماإذا كانت تباينات خطأ المناطق الجغرافية متساوية أم لا، استخدم $\alpha = .10$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟.

و ـ افترض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب للبيانات المحوّلة Y'. اختبر ما إذا كان متوسط طول الإقامة هو نفسه في المناطق الجغرافية الأربع أم لا. اضبط المخاطرة α عند .01. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة . ما هي القيمة ـP للاختبار؟

(١٦-٢٤) بالرجوع إلى مجموعة البيانات **SMSA** والمشروع (١٤-٣٥):

أ - أوجد الرواسب وجهّز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل منطقة. هل تقترح رسومك وجود أية حيود خطيرة عن نموذج التحاين (14.2).

ب - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب و أوجد معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. وهل يبدو افتراض الطبيعية معقولاً هنا؟

جـ - افترض أن حدود الخطأ تتبع التوزيع الطبيعي تقريباً. تفحّص باستخدام اختبار بارتليت ماإذا كانت تباينات خطأ المناطق الجغرافية متساوية أم لا، استخدم $\alpha = .01$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

تخطيط حجوم العينات، اختبارات لامعلمية ونموذج تحاين عشوائي

سنناقش في هذا الفصل التخطيط لحجوم عينات خاصة بدراسات تحليل التباين، مما يُعتبر جزءا لايتجزأ من مثل هذه الدراسات. وسنناقش، أيضا، اختبارات بديلة للاختبار F لتقرير ماإذا كانت متوسطات المعالجات متساوية أم لا. وأخيرا سنقدم نموذج التحاين II لدراسات تحليل تباين وحيدة العامل، وهو النموذج المناسب عندما تكون مستويات المعالجات عينة عشوائية من مجتمع أكبر من المستويات.

(١٧-١) التخطيط لحجوم العينات بأسلوب القوة

تصميم دراسات تحاين

من المهم تخطيط حجوم العينات في دراسات تحليل التباين، كما هو الحال في الدراسات الأخرى، وذلك وصولاً إلى الحماية المطلوبة ضد الوقوع في الأخطاء من النوع I و II، أو وصولاً إلى دقة كافية للتقديرات المهمة كي تكون تقديرات مفيدة. وهذا التخطيط ضروري للتأكد من أن حجوم العينات كبيرة بالقدر الكافي لاكتشاف فروق مهمة باحتمال عالٍ. وفي الوقت نفسه، يجب ألا تكون حجوم العينات كبيرة جدا إلى الحد الذي تصبح معه تكلفة الدراسة باهظة وتُسفر باحتمال عال عن أهمية إحصائية لفروق ثانوية. ولذلك يُعتبر تخطيط حجوم العينات جزءا لايتجزأ من التصميم لدراسة تحليل تباين.

وبصورة عامة، سنفترض في هذه المناقشة أن حجوم العينات متساوية لمستويات

العامل كافة، مما يعكس أن لها جميعا الأهمية نفسها تقريبا. وفي الحقيقة إذا كان الاهتمام الرئيس منصبا على المقارنات الثنائية لجميع مستويات العامل، فيمكن إثبات أن تساوي حجوم العينات يجعل دقة المقارنات المختلفة أكبر مايمكن. وسبب آخر لتساوي حجوم العينات هو أن حيودا معينا عن نموذج التحاين المفترض، كما ذكرنا في الفقرة ١٦ـ٤، لن يكون مزعجا إذا كان لجميع مستويات العامل حجم العينة نفسه. وعلى أية حال، ستكون هناك أحايين يصبح عدم تساوي حجوم العينات فيها مناسبا، وعلى سبيل المثال، عند مقارنة أربع معالجات مع معالجة حيادية، فقد يكون من المنطقي جعل حجم العينة للمعالجة الحيادية أكبر. وسنعلّق فيما بعد على تخطيط حجوم العينات في مثل هذه الحالة.

ويمكن تخطيط حجوم العينات من خلال التحكّم: (١) بمجازفة ارتكاب أخطاء من النوع I ومن النوع II، (٢) بعرض فترات الثقة المطلوبة أو (٣) بمركب من هذين الأسلوبين. وفي هذه الفقرة، سنعتبر تخطيط حجوم عينات بأسلوب القوة، وهو أسلوب يسمح بالتحكم في مجازفة ارتكاب أخطاء من النوع I ومن النوع II، وسنحتاج من البداية لاعتبار قوة اختبار F.

قوة اختبار F

تشير قوة اختبار F إلى احتمال أن تؤدي قاعدة القرار إلى النتيجة H_a عندما تكون H_a صحيحة بالفعل. وعلى وجه التحديد تُعطى القوة بالعبارة التالية:

$$\text{القوة} = P[F^* > F(1-\alpha; r-1, n_T-r) \mid \Phi] \qquad (17.1)$$

حيث Φ هي معلمة اللامركزية، أي مقياس لمدى عدم تساوي المتوسطات μ_i:

$$\Phi = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\sum n_i(\mu_i - \mu_.)^2}{r}} \qquad (17.1a)$$

و:

$$\mu_. = \frac{\sum n_i \mu_i}{n_T} \qquad (17.1b)$$

وعندما يكون لجميع عينات مستويات العامل حجوم متساوية n، تصبح المعلمة

Φ كالتالي:

$$\Phi = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{r}\sum(\mu_i - \mu_.)^2} \quad , \quad n_i \equiv n \quad , \qquad (17.2)$$

حيث:

$$\mu_. = \frac{\sum \mu_i}{r} \qquad (17.2a)$$

ولتحديد احتمالات القوة، يجب أن نستفيد من توزيع F اللامركزي وهو توزيع المعاينة لـ F^* عندما تكون H_a صحيحة. والحسابات الناتجة معقدة تماما، ولكن تمَّ تجهيز رسوم بيانية لجعل تحديد احتمالات القوة بسيطة نسبيا. ويحوي الجدول $A..8$ رسوم بيرسون ـ هارتلي البيانية لقوة الاختبار F. ويعتمد المنحني المناسب للإفادة منه على عدد مستويات العامل، وعلى حجوم العينات ومستوى المعنوية المستخدم في قاعدة القرار، وتُستخدم رسوم بيرسون وهارتلي البيانية كما يلي:

١ـ تشير كل صفحة إلى قيمة مختلفة لِـ ν_1 أي عدد درجات الحرية للبسط في F^*. وفي نموذج التحاين (14-2) لدينا $\nu_1 = r - 1$، أي عدد مستويات العامل مطروحا منه واحد. ويحوي الجدول $A.8$ رسوما لقيم $\nu_1 = 2,3,4,5,6$ كما هو مبين في الزاوية اليسرى العليا من كل رسم بياني.

٢ ـ تمَّ استخدام مستويين للمعنوية، ونرمز لهما بـ $\alpha = .05$ و $\alpha = .01$. ويوجد تدريجان لـ X وذلك وفقا لمستوى المعنوية المستخدم. وبالإضافة إلى ذلك، فإن المجموعة اليسرى من المنحنيات في كل رسم تشير إلى $\alpha = .05$، بينما تشير المجموعة اليمنى إلى $\alpha = .01$.

٣ ـ وتوجد مجموعة منفصلة من المنحنيات لقيم مختلفة لـ ν_2، أي لدرجات حرية المقام في F^*. وفي نموذج التحاين (14.2) ، فإن $\nu_2 = n_T - r$. وفي أعلى الرسم فُهرِسَت المنحنيات وفقاً لقيم ν_2، وبما أن قيما مختارة، فقط، لِـ ν_2 قد استُخدمت في هذه الرسوم، فسنحتاج إلى القيام بعملية استيفاء من أجل قيم وسيطة لِـ ν_2.

٤ ـ ويمثل المحور X المعلمة Φ، أي معلمة اللامركزية كما هي معرَّفة في (17-1a).

٥ ـ ويعطي المحور Y القوة β - 1، حيث β هي مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع II.

أمثلة

١ ـ اعتبر الحالة عندما تكون $\nu_1 = 2$، $\nu_2 = 10$، $\Phi = 3$ و $\alpha = .05$. فنجد عندئذ من الجدول 8 . A في ملحق الجداول أن القوة $1\text{-}\beta = .983$.

٢ ـ افترض في مثال شركة كنتون للأغذية في الفصل ١٤ أن المحللة ترغب في معرفة قوة قاعدة القرار المذكورة في الفقرة ١٤-٨، عندما تكون هناك فروق جوهرية بين متوسطات مستويات العامل. وترغب على وجه التحديد بأن تأخذ في اعتبارها الحالة التي تكون فيها $\mu_1 = 12.5$، $\mu_2 = 13$، $\mu_3 = 18$ و $\mu_4 = 21$ ، فيكون المتوسط المرجح في (17-1b) كما يلي:

$$\mu = \frac{2(12.5)+3(13)+3(18)+2(21)}{10} = 16$$

وهكذا تتحدد قيمة Φ كما يلي:

$$\Phi = \frac{1}{\sigma}\left[\frac{2(-3.5)^2+3(-3)^2+3(2)^2+2(5)^2}{4}\right]^{1/2}$$
$$= \frac{1}{\sigma}(5.33)$$

لاحظ أننا لانزال نحتاج إلى معرفة σ، الانحراف المعياري لحدود الخطأ ε_{ij} في النموذج. افترض أننا نعرف من خبرة سابقة أن $\sigma = 2.5$ تقريبا. فعندئذ لدينا:

$$\Phi = \frac{1}{2.5} = (5.33) = 2.13$$

وبالإضافة إلى ذلك لدينا في هذا المثال:

$$\nu_1 = r - 1 = 3$$
$$\nu_2 = n_T - r = 6$$
$$\alpha = .05$$

وهكذا نجد من الرسم في الصفحة أن القوة $1 - \beta = .72$ تقريبا.

وبعبارة أخرى هناك حوالي 72 فرصة من 100 بأن تؤدي قاعدة القرار إلى اكتشاف فروق في متوسط حجوم المبيعات للتصاميم الأربعة للعلب عندما تكون الفروق هي تلك المحددة آنفا.

تعليقات

١ ـ تحيط أي قيمة Φ بقيم عديدة ومختلفة من متوسطات مستويات العامل μ ولذلك، في مثال شركة كنتون للأغذية، تؤدي القيم $\mu_1 = 12.5, \mu_2 = 13, \mu_3 = 18,$ $\mu_4 = 21$ والقيم $\mu_4 = 12.5, \mu_3 = 13, \mu_2 = 18, \mu_1 = 21$ إلى القيمة نفسها $\Phi = 2.13$ وبالتالي تؤدي إلى القوة نفسها.

٢ ـ كلما كبرت Φ، أي كلما ازدادت الفروق بين متوسطات مستويات العامل، كلما ازدادت القوة، وبالتالي يصغر احتمال ارتكاب خطأ من النوع II لأي قيمة معطاة α لارتكاب خطأ من النوع I. وكذلك كلما صغرت المخاطرة α المحددة، تصغر القوة لأي قيمة معطاة Φ، وبالتالي تزداد المخاطرة بارتكاب خطأ من النوع II.

٣ ـ بما أن العديد من الدراسات وحيدة العامل تُجْرَى بسبب ماتوقعه من اختلاف متوسطات مستويات العامل، والرغبة في تقصي هذه الفروق، فغالبا ماتوضع المخاطرة α، المستخدمة في بناء قاعدة القرار لتحديد ماإذا كانت متوسطات مستويات العامل متساوية أم لا، كبيرة نوعا ما (مثلاً .05 أو .10 بدلاً من .01) وذلك لزيادة قوة الاختبار.

٤ ـ لم توضع القيمة $\nu_1 = 1$ في رسم بيرسون ـ هارتلي في الجدول أ-٨ وذلك لأن هذه الحالة تقابل عملية المقارنة بين متوسطي مجتمعين. وكما ذكرنا سابقا، فإن اختبار F في هذه الحالة يكافئ اختبار t ذا الجانبين، ويمكن لذلك استخدام رسوم القوة لاختبار t ذي الجانبين الموضحة في الجدول $A.5$ بمعلمة لامركزية.

$$\delta = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \tag{17.3}$$

ودرجات حرية $n_1 + n_2 - 2$.

استخدام الجدول أ-١٠

إحدى الطرق لتطبيق أسلوب القوة في تخطيط حجوم العينات هي استخدام رسوم القوة لتوزيع F الموضحة في الجدو ل أ-٨. ولكننا نحتاج في هذه الرسوم إلى

أسلوب المحاولة والخطأ. وبدلاً من ذلك هناك جداول تزودنا بحجوم العينات بشكل مباشر. ونُوضّح في الجدول أ-١٠ تحديدا لحجوم العينات عندما يكون لجميع مستويات العامل حجم العينة نفسه أي عندما تكون $n_i = n$.

وتتم عملية تحديد العينات باستخدام الجدول أ-١٠عن طريق معلمة اللامزكرية (17-2) وذلك لحجوم عينات متساوية. ولكن بدلاً من أن يكون المطلوب تحديدا مباشرا لمستويات μ التي تقتضي التحكم في مخاطرة إرتكاب خطأ من النوع II، فإن الجدول أ-١٠ يتطلب، فقط، تحديدا لأصغر مدى لمتوسطات مستويات العامل يكون معه اكتشاف فروق بين المتوسطات μ باحتمال عالٍ أمرا مهما. ونرمز لهذا المدى الأصغري بـ Δ:

$$\Delta = \max(\mu_i) - \min(\mu_i) \qquad (17.4)$$

ويجب القيام بتحديد المقادير الثلاثة التالية عند استخدام الجدول أ-١٠:

١ ـ المستوى α الذي يتم عنده التحكم في مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I.

٢ ـ مقدار المدى الأصغري Δ لـ μ_i الذي يكون اكتشافه باحتمال عالٍ مهما. ويجب، أيضا، تحديد المقدار σ، أي الانحراف المعياري للتوزيعات الاحتمالية لـ Y، وذلك لأن الدخول إلى الجدول أ-١٠ يتم بدلالة النسبة:

$$\frac{\Delta}{\sigma} \qquad (17.5)$$

٣ ـ المستوى β وهو مستوى التحكم في مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع II وذلك من أجل التحديدات المعطاة في الفقرة ٢. إذ يتم الدخول إلى الجدول أ-١٠ بدلالة القوة $1 - \beta$.

ويوجد أربعة مستويات للتحكم في مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I عند استخدام الجدول أ-١٠ هي $(\alpha = .2,.1,.05,.01)$ ، ويمكن، أيضا، التحكم في مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع II عند أحد المستويات التالية $(\beta = .3,.2,.1,.05)$ وذلك من خلال تحديد القوة $1\text{-}\beta$ ويعطي الجدول أ-١٠ حجوم العينات اللازمة للدراسات التي

تحتوي على $r = 2,...,10$ من مستويات العامل أو المعالجات.

مثال. ترغب شركة تملك أسطولا كبيرا من الشاحنات أن تحدد ماإذا كان لأربعة أنواع من إطارات الجليد متوسط عمر الإستهلاك نفسه (بالآف الأميال) أم لا. ومن المهم استنتاج أن للأنواع الأربعة من إطارات الجليد متوسطات أعمار مختلفة عندما يكون الفرق بين متوسطي أفضل وأسوأ نوع هو 3 أو أكثر (ألف ميل).

ولذلك يكون تحديد المدى الأصغري بـ $\Delta = 3$. ومن المعلوم من الخبرة السابقة أن الانحراف المعياري للعمر الاستهلاكي لهذه الإطارات هو 2 (ألف ميل) تقريبا. وترغب الإدارة بضبط مخاطرة اتخاذ قرارات خاطئة عند المستويات التالية:

$\alpha = .05$ أو   القوة $= 1 - \beta = .90$

$\beta = .10$

وبالدخول إلى الجدول أ-١٠ للقيم $\Delta/\sigma = 3/2 = 1.5$, $\alpha = .05$, $1\text{-}\beta = .90$ و $r = 4$، نجد أن $n = 14$. وهكذا يجب استخدام 14 إطارا لكل نوع وذلك لضبط مخاطرة اتخاذ قرارات خاطئة عند المستويات المطلوبة.

تحديد Δ / σ بصورة مباشرة. ويمكن، أيضا، استخدام الجدول أ-١٠ عند تحديد المدى الأصغري مباشرة بدلالة وحدات من الانحراف المعياري σ. وليكن تحديد Δ في هذا الحالة $k\sigma$ بحيث يصبح لدينا من (5-17):

$$\frac{\Delta}{\sigma} = \frac{k\sigma}{\sigma} = k$$

ويمكن بهذه الطريقة الدخول مباشرة إلى الجدول أ-١٠ بقيمة k المحددة.

مثال. افترض في مثال إطارات الجليد أن من المهم اكتشاف فروق بين متوسطات الأعمار الاستهلاكية في حدود مدى لمتوسطات الأعمار الاستهلاكية يبلغ $k = 2$ أو أكثر، أي يساوي انحرافين معياريين أو أكثر. افترض، أيضا، أن التحديدات الأخرى هي:

$\alpha = .10$ أو   القوة $= 1 - \beta = .90$

$\beta = .05$

ونجد من الجدول أ-١٠وللقيم $r = 4, k = 2$ أننا سنحتاج إلى اختيار $n = 9$ من كل نوع من الإطارات، وصولاً إلى الوقاية المطلوبة من مخاطر القرار الخاطئ.

ملاحظة

بالرغم من أن تحديد σ / Δ مباشرة لايتطلب تخطيطا مسبقا لقيمة الانحراف المعياري σ، ولكن ليس لهذا فائدة كبيرة كما قد يبدو، ذلك لأن أي تحديد ذي معنى لِ Δ بدلالة وحدات من σ سيتطلب في الغالب معرفة مقدار الانحراف المعياري.

بعض التعليقات الإضافية

١ - إن للتحديد الدقيق لـ Δ / σ تأثيرا كبيرا على حجوم العينات عندما تكون Δ / σ صغيرة، بينما يكون له تأثير أقل عندما تكون Δ / σ كبيرة. فعلى سبيل المثال، عندما تكون $r = 3$,$\alpha = .05$ و $\beta = .10$ ، نجد من الجدول أ-١٠ :

n	Δ / σ
27	1.0
13	1.5
8	2.0
6	2.5

وهكذا نرى أنه ما لم تكن Δ / σ صغيرة جدا فلا ينبغي القلق عند تحديد Δ / σ .

٢ - إن تخفيض أي من المخاطرتين α أو β أو تخفيضهما معا يزيد في حجوم العينات المطلوبة.

وعلى سبيل المثال، عندما تكون $r = 4$,$\alpha = .10$ و $\Delta / \sigma = 1.25$ نجد:

n	$1 - \beta$	β
13	.80	.20
16	.90	.10
20	.95	.05

٣ - إن أي خطأ معتدل في التخطيط المسبق لقيمة σ يمكن أن يؤدي لأخطاء كبيرة في حساب حجوم العينات المطلوبة، بالرغم من أن حجوم العينات المطلوبة لاتزال «في ملعب الكرة نفسه». فعلى سبيل المثال، عندما تكون $\alpha = .05,\ \beta = .10,$ $r = 5$ و $\Delta = 3$ نجد أن:

n	Δ / σ	σ
5	3.0	1
15	1.5	2
31	1.0	3

وفي ضوء الطبيعة التقريبية للتخطيط لقيمة σ فمن المرغوب عموما البحث عن

حجوم العينات المطلوبة من أجل مدى من القيم المحتملة لـ σ قبل التقرير في حجوم العينات التي ستُستخدم.

٤ - يعتمد الجدول A.10 على معلمة اللامركزية Φ في (17-2) مع أننا لم نقم بتحديد متوسطات مستويات العامل μ المنفردة التي يكون من المهم معها استنتاج اختلاف بين متوسطات مستويات العامل. اعتبر مرة أخرى مثال إطارات الجليد حيث يراد اختبار $r = 4$ أنواع من الإطارات والمدى الأصغري لمتوسطات الأعمار الاستهلاكية الأربعة μ الذي يراد اكتشافه باحتمال عالٍ هو $\Delta = 3$ (بآلاف الأميال). وفيما يلي مجموعات من القيم الممكنة لـ μ والمدى لكل منها هو $\Delta = 3$:

الحالة	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	$\sum(\mu_i - \mu.)^2$
1	24	27	25	26	5.00
2	25	25	26	23	4.75
3	25	25	25	28	6.75
4	25	25	26.5	23.5	4.50

وعلى الرغم من أن المدى هو نفسه للحالات الأربع إلا أن الحد $\sum(\mu_i - \mu.)^2$ في معلمة اللامركزية Φ في (17-2) يختلف في كل حالة وتبعا لذلك فإن القوة تختلف. لاحظ أن الحد $\sum(\mu_i - \mu.)^2$ أصغر مايكون في الحالة الرابعة حيث أن قيمة اثنين من متوسطات مستويات العامل تساوي $\mu.$ ويقع الاثنان الآخران على مسافات متساوية من $\mu.$. ويمكن تبيان أنه من أجل أي مدى معطى Δ يكون الحد $\sum(\mu_i - \mu.)^2$ أصغر مايكون عندما تكون متوسطات العامل باستثناء اثنين منها عند القيمة $\mu.$. بينما يقع الاثنان هذان الباقيان على مسافات متساوية حول $\mu.$ وبالتالي لدينا:

$$\min \sum_{i=1}^{r} (\mu_i - \mu_.)^2 = \left(\frac{\Delta}{2}\right) + \left(\frac{-\Delta}{2}\right)^2 + 0 + \ldots + 0 = \frac{\Delta^2}{2} \qquad (17.6)$$

وبما أن قوة الاختبار تتغير مباشرة بتغير $\sum(\mu_i - \mu.)^2$ ، فإن استخدام (6-17) في حساب الجدول أ-١٠ يضمن كون القوة مساوية على الأقل لـ $(1-\beta)$ لأي مركب من قيم μ_i ذات المدى Δ.

(١٧ـ٢) التخطيط لحجوم العينات عن طريق التقدير

يمكن استخدام أسلوب التقدير لتخطيط حجوم العينات إما متزامنا مع التحكم في الأخطاء من النوع I ومن النوع II أو لذاته. وجوهر هذا الأسلوب هو تحديد المقارنات الرئيسة ذات الأهمية وتحديد العرض لفترات الثقة من أجل حجوم مختلفة للعينات وبمعلومية مسبقة لقيمة تخطيطية للانحراف المعياري σ. وهذه الطريقة تكرارية إذ نبدأ بقيم مبدئية نتوسمها لحجوم العينات المطلوبة. ويمكن تأسيس هذه القيم المبدئية لحجوم العينات المطلوبة على التحكم بمخاطر ارتكاب أخطاء من النوع I ومن النوع II حيث يتم مسبقا تحديد هذه المخاطر. وعندما يكون عرض فترات الثقة بناءً على حجوم العينات المبدئية مقنعا تتوقف عملية التكرار، ولكن عندما يكون عرض واحدة أو أكثر من فترات الثقة أكبر مما ينبغي فعندئذ نكرر فنجرب حجوم عينات أكبر، وإذا كان عرض واحدة أو أكثر من فترات الثقة أضيق مما ينبغي فنجرب حجوم عينات أصغر، وتستمر هذه العملية حتى يتم الوصول إلى حجوم العينات التي تؤدي إلى عرض الفترات المقنع الذي نوخيناه.

مثال.

سنخطط لحجوم العينات في مثال إطارات الجليد باستخدام طريقة التقدير وبمعلومية أن حجوم العينات متساوية لكل أنواع الإطارات أي أن $n_i = n$. وقد أشارت الإدارة إلى رغبتها في الحصول على ثلاثة أنواع من التقديرات.

١ ـ مقارنة بين متوسطي العمر الاستهلاكي لكل نوعين من الإطارات:

$$\mu_i - \mu_{i'}$$

٢ ـ مقارنة بين متوسطي العمر الاستهلاكي بين النوعين الأغلى من الإطارات (1 و 4) والنوعين الأرخص من الإطارات (2 و 3).

$$\frac{\mu_1 + \mu_4}{2} - \frac{\mu_2 + \mu_3}{2}$$

٣ ـ مقارنة بين متوسط العمر الاستهلاكي للأنواع القومية من الإطارات (4,2,1) وبين النوع المحلي (3):

$$\frac{\mu_1+\mu_2+\mu_4}{3}-\mu_3$$

وفضلا عن ذلك فقد أشارت الإدارة إلى رغبتها في استخدام 0.95 كمعامل ثقة عائلي لمجموعة المقارنات بكاملها.

وسنحتاج في البداية إلى قيمة تخطيطية للانحراف المعياري للعمر الاستهلاكي للإطارات. افترض أننا نرى من الخبرة السابقة أن قيمة الانحراف المعياري $\sigma = 2$ (ألف ميل) تقريبا. بعد ذلك نحتاج إلى قيمة مبدئية لحجوم العينات المطلوبة ولنعتبر $n = 10$ كنقطة ابتداء.

ونعرف من (15.18) أن تباين المتضادّة المقدَّرة $\hat{L}$ عندما تكون $n_i = n$ هو:

$$\sigma^2\{\hat{L}\}=\frac{\sigma^2}{n}\sum c_i^2 \qquad , \qquad n_i \equiv n$$

وهكذا، وبمعلومية $\sigma = 2$ و $n = 10$ فإن توقعاتنا للانحرافات المعيارية للمقدرات المطلوبة هي:

المتضادة	التباين المتوقع	الانحراف المعياري المتوقع
المقارنات الثنائية	$\frac{(2)^2}{10}\left[(1)^2+(-1)^2\right]=.80$	.89
الأنواع مرتفعة ومنخفضة الثمن	$\frac{(2)^2}{10}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]=.40$	.63
الأنواع القومية والمحلية	$\frac{(2)^2}{10}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+(-1)^2\right]=.53$	.73

وسنستخدم طريقة شيفة للمقارنات المتعددة، وسنحتاج لهذا الغرض مضاعف شيفّه S في (15 .34a) لقيم $r = 4$, $n_T = nr = 10(4) = 40$, $1-\alpha = .95$:

$$S^2=(r-1)\,F(1-\alpha;\, r-1,\, n_T-r)=3\,F(.95, 3, 36)=3\,(2.87)=8.61$$

أو $S = 2.93$ وبذلك يكون عرض فترات الثقة المتوقع هو:

المتضادة	العرض المتوقع لفترة الثقة $\pm S\sigma\{\hat{L}\}$
مقارنات ثنائية	$\pm 2.93(.89) = \pm 2.61$ (آلاف الأميال)
الأنواع مرتفعة ومنخفضة الثمن	$\pm 2.93(.63) = \pm 1.85$ (آلاف الأميال)
الأنواع القومية والمحلية	$\pm 2.93(.73) = \pm 2.14$ (آلاف الأميال)

وقد اقتنعت الإدارة بهذه القيم لعرض الفترات. وقد قررت على أي حال أن تزيد حجوم العينات من 10 إلى 15 في حالة أن الانحراف المعياري الفعلي للعمر الاستهلاكي لأعمار الإطارات كان أكبر من القيمة المتبناة $\sigma = 2$ (ألف ميل).

تعليقات

١ ـ بما أنه لايمكن عادة التأكد من أن القيمة التخطيطية للانحراف المعياري صحيحة، فننصح بدراسة مدى من قيم الانحراف المعياري قبل التقرير في حجم العينة.

٢ ـ إذا كانت حجوم العينات المطلوبة غير متساوية، فلا يزال بالإمكان استخدام الطريقة التكرارية التي وُصفت آنفاً مع أسلوب التقدير. وعلى سبيل المثال، افترض أننا نريد مقارنة أربع نكهات جديدة من شراب فاكهة مع معالجة حيادية، هي النكهة الموجودة حاليا. فقد يرغب المرء في أن يزيد حجم العينة في المعالجة الحيادية من أجل زيادة الدقة في هذه المقارنات الأساسية. وافترض أن حجم العينة للمعالجة الحيادية سيكون ضعف حجوم العينات في مستويات العامل الأخرى. فيمكننا أن نمثل حجم العينة في المعالجة الحيادية بـ $2n$ وبقية حجوم العينات بـ n ثم نمضي كالسابق بتحديد مبدئي لِـ n ونستخدم الصيغة (15.18) لإيجاد تباين تقدير المتضادة.

(١٧-٣) تخطيط حجوم العينات لإيجاد "أفضل" معالجة

يكون الهدف الرئيس للدراسة أحيانا هو إيجاد مستوى العامل أو المعالجة التي لها أكبر أو أصغر متوسط μ_i . فعلى سبيل المثال، في مثال إطارات الجليد، ربما نرغب في تحديد النوع من بين الأنواع الأربعة التي يتمتع بأطول عمر استهلاكي.

ولقد طور بيشهوفر طريقة، وضع بناءً عليها الجدول أ-١١ ، وتسمح لنا بتحديد حجوم العينات بحيث ينتج أعلى (أقل) متوسط مقدَّر $\bar{Y}_{i.}$ لمستوى عامل من أعلى (أقل) متوسط مجتمع μ_i باحتمال $1-\alpha$. ولتحديد الاحتمال $1-\alpha$ نحتاج إلى الانحراف المعياري σ وإلى أصغر فرق λ يهمنا اكتشافه، بين أول أعلى (أقل) متوسط

مستوى عامل وثاني أعلى (أقل) متوسط مستوى عامل. ويفترض الجدول أ-١١ حجوم عينات متساوية لجميع مستويات العامل وأن نموذج تحليل التباين (14.2) مناسب.

مثال

افترض في مثال إطارات الجليد أن الهدف الرئيس هو معرفة نوع الإطار الذي له أطول عمر استهلاكي. وبأنه يوجد $r=4$. ونقدر كما في السابق أن $\sigma = 2$ (ألف ميل). وبالإضافة إلى ذلك، نهتم باكتشاف فرق في حدود $\lambda = 1$ (ألف ميل) بين النوع ذي المتوسط الأعلى والنوع ذي المتوسط الذي يليه. وأن احتمال التعرف بشكل صحيح على النوع ذي متوسط العمر الإستهلاكي الأعلى، عندما تكون $\lambda = 1$، هو $1-\alpha = .90$ أو أكثر.

والقيمة التي يعطيها الجدول أ-١١ هي $\lambda\sqrt{n/\sigma}$. ونجد من الجدول أ-١١ للقيم $r=4$ واحتمال $1-a=.90$ أن $\lambda\sqrt{n/\sigma}=2.4516$. وبما أن قيمة $\lambda=1$ نجد:

$$\frac{(1)\sqrt{n}}{2}=2.4516$$

$$\sqrt{n}=4.9032 \qquad \text{أو} \qquad n=25$$

ولذلك، عندما يزيد متوسط العمر الإستهلاكي لأفضل نوع عن النوع الذي يليه بما لايقل عن 1 (ألف ميل) وعندما تكون $\sigma=2$ (ألف ميل) فإن حجوم عينات من 25 إطارا لكل نوع ستزودنا بضمان 0.90 على الأقل بأن النوع ذا المتوسط المقدَّر الأعلى $\bar{Y}_{i.}$ هو النوع ذو متوسط المجتمع الأعلى.

ملاحظة

عندما لايكون التخطيط لقيمة الانحراف المعياري دقيقا، فإن عملية تحديد المجتمع ذي المتوسط الأعلى (الأقل) بشكل صحيح ستتأثر بالطبع. ولن يكون الحال مختلفا بالنسبة للطرق الأخرى، حيث أن عدم الدقة في تحديد قيمة الانحراف المعياري تؤثر على مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع *II* أو على عرض فترات الثقة التي نحصل عليها في الواقع.

(١٧-٤) اختبار الرتب لكروسكال ـ والاس (KRUSKAL - WALLIS)

لقد ذكرنا أن اختبار F في تحليل التباين منيع ضد الحيود عـن الطبيعيـة، طالما كـان هذا الحيود غير مفرط. وفي بعض المناسبات التي لن يكون اختبار F مناسـبا فيهـا، بسـبب الحيود الكبير عن الطبيعية، يمكننا استخدام اختبـار لامعلمـي. وسـنناقش الآن اثنـين مـن هذه الاختبارات. اختار كروسكال ـ والاس في هذه الفقـرة واختبـار الوسـيط في الفقـرة التالية.

إحصاءة اختبار كروسكال ـ والاس

يعتمد اختبار كروســكال ـ والاس علـى رتـب المشـاهدات. ولاختبـار تسـاوي متوسطات المعالجات بهـذا الاختبـار، فـإن الفـرض الوحيـد المطلـوب حـول توزيعـات المجتمعـات هـو أنهـا متصلـة ولهـا الشـكل نفسـه. وهكـذا يجـب أن يكـون لتوزيعـات المجتمعات التشتت نفسه، الالتواء نفسه، إلخ، ولكـن يمكنهـا أن تختلـف بالنسـبة لموقـع المتوسط. ونفرض كذلـك أن العينـات مـن المجتمعـات المختلفـة هـي عينـات عشـوائية مستقلة.

في البداية تُرتَّب جميع المشاهدات Y_{ij} وعدَّتها n_T فتتخـذ رتبـا مـن 1 حتـى n_T. وليكن $\bar{R}_{i.}$ متوسط رتب المستوى i للعامل و $\bar{R}_{..}$ هو متوسط الرتب الكلي.
فتكون إحصاءة الاختبار عندئذ ببساطة:

$$X^2_{KW} = \frac{SSTR}{\frac{SSTO}{n_T - 1}} = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i (\bar{R}_{i.} - \bar{R}_{..})^2}{\frac{n_T(n_T+1)}{12}} \qquad (17.7)$$

حيث البسط هو مجموع مربعات المعالجـات المعتـاد، ولكـن معبرا عـن البيانـات لابقيمها ولكن برتبها، بينما المقام هو تباين الرتـب، $1,2,\ldots,n_T$ ويمكـن إعـادة صياغـة X^2_{kw} بشكل مكافئ كما يلي:

$$X^2_{KW} = \left[\frac{12}{n_T(n_T+1)} \sum_{i=1}^{r} n_i \bar{R}_{i.}^2 \right] - 3(n_T+1) \qquad (17.7a)$$

فإذا كانت n_i كبيرة بشكل معقول (العدد الذي يُنصح به عادة 5 أو أكثر)، فـإن

X^2_{kw} تتوزع تقريبا كتوزيع متغير عشوائي χ^2 بـ r-1 درجة حرية، وذلك عندما تكون H_0صحيحة (أي أن كل الـ μ_i متساوية). وكما هو متوقع، فإن القيم الكبيرة لـ X^2_{kw} تؤدي إلى استنتاج H_a أي أنه (ليس كل الـ μ_i متساوية). ولذلك عند الاختيار بين:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r$$

H_a : ليست جميع μ_i متساوية (17.8a)

فإن قاعدة القرار المناسبة في حالة ضبط مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I عند القيمة α هي:

إذا كان $X^2_{KW} < \chi^2(1\text{-}\alpha, r\text{-}1)$ ، استنتج H_0 (17.8b)

إذا كان $X^2_{KW} > \chi^2(1\text{-}\alpha, r\text{-}1)$ ، استنتج H_a

مثال. تدير شركة سيرفو ـــ داتا مراكز حاسب آلي في ثلاثة مواقع. وتتماثل هذه الأجهزة في منشأ الصنع والطراز، ولكنها تخضع لتذبذبات مختلفة في درجة الكمون في خطوط الكهرباء التي تغذي المواقع التي تحوي هذه الأجهزة. وترغب الإدارة في اختبار ماإذا كان متوسط طول وقت التشغيل في فترات مابين أعطال أجهزة الحاسب هو نفسه للمواقع الثلاثة أم لا. والفرضيات البديلة هي:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

H_a : ليست جميع μ_i

ويحوي الجدول (١٧ـ١) الفترات الزمنية **الفاصلة** بين أعطال أجهزة الحاسب للمواقع الثلاثة وذلك لخمس فترات بين الأعطال لكل منها. وعلى الرغم من أن حجوم العينات صغيرة إلا أن البيانات تشير إلى أن التوزيعات ملتوية إلتواء حادا. وفي الجدول نفسه أعطيت البيانات رتبا من 1 إلى 15 وتمَّ حساب متوسط الرتب.

وباستخدام المعادلة (7-17a)حصلنا على إحصاءة الاختبار:

$$X^2_{KW} = \left\{ \frac{12}{15(16)} 5\left[8.2)^2 + (4.8)^2 + (11.0)^2\right] \right\} - 3(16) = 4.8$$

وتم تحديد مستوى معنوية $a = .10$ وبما أن $r = 3$ ، سنحتاج لقيمة $\chi^2(.90,2)$ ونجد من الجدول A-3 أن $\chi^2(.90,2) = 4.61$ ، وهكذا تكون قاعدة القرار للاختبار بين H_0

و H_a هي:

إذا كان $X^2_{kw} < 4.61$ استنتج H_0

إذا كان $X^2_{kw} > 4.61$ استنتج H_a

وبما أن $X^2_{kw} > 4.8 > 4.61$ نستنتج H_a، أي أن متوسط الفترات مابين أعطال أجهزة الحاسب الآلي تختلف في المواقع الثلاثة. والقيمة-P للاختبار هي $P\{\chi^2(2) > 4.8\} = .09$.

جدول (١٧-١) الفترات الفاصلة بين أعطال أجهزة الحاسب الآلي (بالساعات) في ثلاث مواقع ـ مثال سيرفو ـ داتا

الموقع			الفترات بين الأعطال					الرتبة المتوسطة
	i		1	2	3	4	5	$\bar{R}_{i.}$
A								
	الزمن	Y_{1j}	105	3	90	217	22	
	الرتبة	R_{1j}	11	2	10	14	4	8.2
B								
	الزمن	Y_{2j}	56	43	1	37	14	
	الرتبة	R_{2j}	8	7	1	5	3	4.8
C								
	الزمن	Y_{3j}	183	144	219	86	39	
	الرتبة	R_{3j}	13	12	15	9	6	11.0
					$\bar{R}_{..} = 8.0$			

تعليقات

١ ـ لا يتطلب اختبار كروسكال ـ والاس، مثله في ذلك مثل اختبار F الإعتيادي، أن تكون حجوم العينات متساوية.

٢ ـ إذا كانت n_i صغيرة بحيث لايكون التوزيع التقريبي χ^2 ملائما، فيجب عندئذ استخدام جداول خاصة أخرى لإجراء اختبار كروسكال ـ والاس، أنظر على سبيل المثال جداول أوين في المرجع 17.1.

٣- في حالة وجود تعادل بين بعض المشاهدات، تُعطى كل من المشاهدات المتعادلة متوسط الرتب التي تنطوي عليها هذه المشاهدات. وهكذا لو أن مشاهدتين تعادلتا في المواقع التي كان ينبغي أن تأخذ بدون التعادل المرتبتين ثالث ورابع، فإن كلا منهما سيُعطى القيمة المتوسطة للرتبتين وهي 3.5 . ولو ظهر الكثير من هذه التعادلات فيجب تعديل احصاءة الاختبار (17.7).

٤- يمكن، أيضا، استخدام اختبار كروسكال ـ والاس للاختيار مابين الفرضيات البديلة التالية:

$$H_0: \text{جميع المجتمعات متطابقة} \qquad (17.9)$$
$$H_a: \text{ليست جميع المجتمعات متطابقة}$$

وتتجنب هذه العبارة في قاعدة القرار الفرضية السابقة بكون كل المجتمعات متطابقة فيما عدا مواقع المتوسطات. ولكن لو تمَّ التوصل إلى القرار H_a في (17.9) فلن يتمكن المرء من معرفة سبب هذه الفروق. فمثلاً، يمكن أن تختلف المتوسطات، أو التباينات أو طبيعة الإلتواء أو مركبات من هذه الأسباب.

إحصاءة الاختبار F^*

كثيرا ما تُستخدم احصاءة اختبار بديلة لإحصاءة اختبار كروسكال ـ والاس X_{kw}^2 التي تستخدم توزيع كاي مربع، وهي إحصاءة اختبار مبنيّة على البيانات المرتّبة وتستخدم توزيع F . إحصاءة الاختبار البديلة هي:

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE} \qquad (17.10)$$

وعندما تكون H_0 صحيحة، فإن إحصاءة الاختبار هذه تتبع تقريبا توزيع $F(r-1, n_T-r)$ ، وذلك عندما تكون حجوم العينات كبيرة.

لنرمز بـ R_{ij} لرتبة Y_{ij} عند ترتيب جميع البيانات من 1 إلى n_T وكما عرفنا من قبل، فإن $\bar{R}_{i.}$ هو متوسط الرتب للمستوى i في مستويات العامل، و $\bar{R}_{..}$ هو متوسط الرتب الكلي. وللبيانات المرتبة لدينا:

$$\overline{R}_{..} = \frac{n_T + 1}{2} \qquad (17.11)$$

وعندئذ يمكن كتابة إحصاءة الاختبار (17.10)كما يلي:

$$F^* = \frac{\sum n_i(\overline{R}_{i.} - \overline{R}_{..})^2}{r-1} \div \frac{\sum\sum(\overline{R}_{i.} - \overline{R}_{i.})^2}{n_T - r} \qquad (17.12)$$

وقاعدة القرار مع ضبط الخطأ من النوع I عند α هي كالمعتاد:

إذا كان $F^* < F(1 - \alpha; r-1, n_T - r)$ استنتج H_0

(17.13)

إذا كان $F^* > F(1 - \alpha; r-1, n_T - r)$ استنتج H_a

مثال. في مثال سيرفو ـ داتا، نحسب $SSTR$ و SSE بناء على البيانات المرتبة في الجدول (١٧-١)، كما يلي:

$$SSTR = 5[(8.2 - 8.2)^2 + (4.8 - 8.0)^2 + (11.0 - 8.0)^2] = 96.4$$
$$SSE = (11 - 8.2)^2 + (2 - 8.2)^2 + \ldots + (6 - 11.0)^2 = 183.6$$

ويكون المتوسط الكلي..$\overline{R}$ هو $8.0 = (15 + 1)/2$

ولذلك تكون إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{96.4}{3-1} \div \frac{183.6}{15-3} = 3.15$$

ومن أجل $\alpha = .10$ نحتاج للقيمة $F(.90;2,12) = 2.81$ وبما أن $F^* = 3.15 > 2.81$ نستنتج H_a تماما كما فعلنا في إحصاءة الاختبار X^2_{KW} . والقيمة ـP للاختبار هي 0.08، وهي شبيهة جدا بالقيمة ـP لإحصاءة الاختبار X^2_{KW} وهي 0.09.

ملاحظة

يمكن إثبات أن إحصاءة الاختبار (17.10) دالة مباشرة في إحصاءة اختبار كروسكال ـ والاس، وعلى وجه التحديد:

$$F^* = \frac{(n_T - r)X^2_{KW}}{(r-1)(n_T - 1 - X^2_{KW})}$$

طريقة اختبار مقارنات ثنائية متعددة

إذا أدى اختبار كروسكال ـ والاس إلى نتيجة أن متوسطات مستويات العامل μ_i غير متساوية، فيُطلب عادة الحصول على معلومات عن القيم المقارنة لهذه

المتوسطات. ويمكن لهذا الغرض استخدام طريقة اختبار عينات كبيرة مشابهة لطريقة بونفيروني للمقارنات مثنى مثنى، التي نوقشت في الفقرة ١٥- ٥، وهذه الطريقة مؤسسة على رتب المشاهدات، ذلك إذا لم تكن حجوم العينات صغيرة جداً. ويمكن إقامة حدود اختبار لكل الاختبارات مثنى مثنى وعدّتها $g = r(r-1)/2$ باستخدام متوسطات الرتب $\overline{R}_{i.}$ وبمستوى معنوية عائلي α ، كما يلي:

$$(\overline{R}_{i.} - \overline{R}_{i'.}) \pm B\left[\frac{n_T(n_T+1)}{12}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}\right)\right]^{1/2} \qquad (17.14)$$

حيث:

$$B = z(1 - \alpha/2g) \qquad (17.14a)$$

$$g = \frac{r(r-1)}{2} \qquad (17.14b)$$

فإذا احتوت حدود الاختبار على الصفر، نستنتج أن المتوسطات المقابلة μ_i و $\mu_{i'}$ لاتختلف. أما إذا لم تحتو حدود الاختبار على الصفر، فنستنتج أن متوسطي المعالجتين المقابلتين مختلفان. وبناء على جميع الاختبارات الثنائية نُكوِّن بعد ذلك مجموعات من متوسطات المعالجات التي لاتختلف عناصرها وفقاً لطريقة الاختبار التلقائية. وبهذه الطريقة نحصل على معلومات عن القيم المقارنة لمتوسطات المعالجات μ_i .

مثال لنتائج دراسة سيرفو ـ داتا في الجدول (١٧ـ١)، نودّ، إن أمكن، معرفة الموقع ذي المتوسط الأعلى للفترات الفاصلة بين أعطال جهاز الحاسب وعلى ضوء الحيود الكبير عن الطبيعية لتوزيع الفترات بين الأعطال فسنبني تحليلاتنا على الرتب، ولمستوى معنوية عائلي $\alpha = .10$ و $g = r(r-1)/2 = 3(2)/2 = 3$ من الاختبارات الثنائية، فإننا نحتاج لقيمة $B = Z(.9833) = 2.13$. وبما أن كل حجوم عينات المعالجات متساوية، فإننا نحتاج لحساب الحد الأيمن في (17.14) مرة واحدة فقط:

$$B\left[\frac{n_T(n_T+1)}{12}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}\right)\right]^{1/2} = 2.13\left[\frac{15(16)}{12}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)\right]^{1/2} = 6.02$$

وهكذا فإن حدود الاختبار للاختبارات الثنائية الثلاثة هي :

A و B $\quad (8.2 - 4.8) \pm 6.02 \quad$ أو $\quad -2.6 \quad$ و $\quad 9.4$

C و B $(11.0 - 4.8) \pm 6.02$ أو $-.2$ و 12.2

C و A $(11.0 - 4.8) \pm 6.02$ أو -3.2 و 8.8

إن الاختبار الوحيد الذي يبين وجود فرق ذي دلالة هـو بـين الموقعين B و C.

وهكذا نحصل على المجموعتين:

المجموعة ١	المجموعة ٢
الموقـــع A	الموقـــع A
الموقـــع B	الموقـــع C

وتبين عملية التجميع هذه بأن متوسط الفترات بين أعطال أجهزة الحاسب يختلـف بالنسبة للموقعين B وC ،ولكنه لايختلف لأي زوجين آخرين من المواقع. وهكذا، فـإن النتيجة الوحيدة الممكنة عن المقـادير المقارنـة للمتوسـطات مـن هـذه الدراسـة هـي أن متوسط الفترات بين أعطال أجهزة الحاسب هو في الموقع C أطول منه في الموقع B .

(١٧ـ٥) اختبار الوسيط

اختبار الوسيط هو اختبار آخر يمكن استخدامه عندمـا يكـون توزيـع المجتمعـات بعيدا عن الطبيعية. وفي هذا الاختبار نهتـم، أيضـا، بالاختبـار بـين الفرضيـات البديلـة التالية:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r$$

Ha : ليست جميع μ_i متساوية (17.15a)

ويفترض اختبــار الوسـيط ، فقـط، أن لجميـع المجتمعـات الشـكل نفسـه، ولكـن بإمكانها أن تختلف في موقع المتوسط. ويفترض كذلك أن جميع العينات من المجتمعـات المختلفة هي عينات عشوائية مستقلة.

إحصاءة اختبار الوسيط

يتم ضم كل بيانات العينة لتحديد قيمة الوسيط للعينـة الموحَّـدة. ويتـم التحقـق، لكل معالجة i ، مـن عـدد المشـاهدات الـتي تكـون فـوق هـذا الوسـيط (O_{i1}) وعـدد المشاهدات الـتي لاتحقـق ذلـك (O_{i2}) ، وأخـيرا يجـري اختبـار للتجـانس باسـتخدام إحصاءة الاختبار:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{2}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}} \qquad (17.15b)$$

حيث O_{ij} $(i = 1,...,r, j = 1,2)$ هو التكرار المشاهد في أية خلية، و E_{ij} هو التكرار المتوقع تحت الفرضية H_0، وحيث نفترض تطابق جميع المجتمعات.

وعندما تكون حجوم العينات كبيرة بشكل معقول، فإن إحصاءة الاختبار X^2 تتوزع تقريبا تبعا لتوزيع χ^2 بـ r-1 درجة حرية، وذلك عندما تكون H_0 صحيحة. وتؤدي القيم الكبيرة لـ X^2 إلى استنتاج H_a. وبالتالي قاعدة القرار المناسبة التي تضبط مخاطرة الخطأ من النوع I عند القيمة α هي:

$$\text{إذا كان } X^2 < \chi^2(1-\alpha; r-1) \text{ استنتج } H_0$$
$$\text{إذا كان } X^2 > \chi^2(1-\alpha; r-1) \text{ استنتج } H_a \qquad (17.15c)$$

مثال

سنعتبر مرة أخرى مثال سيرفو ـ داتا الذي يتعلق بالفترات بين أعطال أجهزة الحاسب في ثلاثة مواقع مختلفة. لقد تمَّ الحصول على خمس عشرة مشاهدة إضافية للفترات بين الأعطال في كل موقع، وذلك للحصول على معلومات أكثر دقة. وكان الوسيط لعدد الساعات بين الأعطال للعينة المجتمعة التي تتكون من 60 مشاهدة هو 64 ساعة. ويلخص الجدول (١٧ـ٢) نتائج العينات الثلاث (البيانات الأصلية غير موضحة هنا). والقيم المتوقعة عندما تكون جميع المجتمعات متطابقة موضحة بأقواس في الجدول (١٧ـ٢). وتمَّ الحصول على هذه القيم بتوزيع التكرار الكلي في كل عمود على أجهزة الحاسب الثلاثة على ضوء نسبة العدد الكلي من المشاهدات لكل جهاز. وفي مثالنا هنا تمَّ الحصول على 20 مشاهدة لكل جهاز ولذلك تمَّ تخصيص التكرارات الثلاثين التي فوق الوسيط بالتساوي لكل جهاز وبطريقة مشابهة تمَّ تخصيص التكرارات الثلاثين التي لاتزيد عن الوسيط بالتساوي لكل جهاز. وهذه هي إذن التكرارات المتوقعة لو كان لكل المجتمعات الوسيط نفسه، أي لو كانت بالتالي متطابقة.

وتُحسب إحصاءة الاختبار باستخدام (17.15b)

$$X^2 = \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(7-10)^2}{10} + \ldots + \frac{(6-10)^2}{10} = 14.8$$

وقد تمّ تحديد مستوى المعنوية ليكون $\alpha = .05$ و بالتالي سنحتاج للقيمة $\chi^2(.95,2) = 5.99$ ، وبذلك تصبح قاعدة القرار:

إذا كان $X^2 < 5.99$ استنتج H_0

إذا كان $X^2 > 5.99$ استنتج H_a

وبما أن $X^2 = 14.8 > 5.99$ ، نستنتج H_a . أي أن متوسط عدد الساعات بين أعطال أجهزة الحاسب غير متساوية للمواقع الثلاثة. والقيمة -P للاختبار هي $P\{\chi^2(2) > 14.8\} = .001$.

جدول (١٧-٢) تكرارات الفترات مابين أعطال أجهزة الحاسب في المواقع الثلاثة مثال سيرفو ـ داتا بعينات مكبّرة.

الموقع	عدد المشاهدات				
	فوق الوسيط		ليس فوق الوسيط		
i	O_{i1}	(E_{i1})	O_{i2}	(E_{i2})	المجموع
A	13	(10)	7	(10)	20
B	3	(10)	17	(10)	20
C	14	(10)	6	(10)	20
المجموع	30		30		60

المجموع الوسيط للعينة الموحّدة = 64 ساعة

ملاحظة

لا يتطلب اختبار الوسيط، مثله مثل اختبار كروسكال ـ والاس، كون حجوم العينات متساوية.

(١٧-٦) نموذج تحاين II ـ مستويات العامل عشوائية

ذكرنا سابقا أن هناك بعض المناسبات التي لايكون لمستويات العامل أو المعالجات المستخدمة أهمية خاصة لذاتها، ولكنها تكون عينة من مجتمع أكبر من مستويات العامل. ونموذج التحاين II مصمم لحالات من هذا النوع. اعتبر على سبيل المثال،

شركة أبيكس للمشاريع، التي تبني مطاعم تحمل أسماء تجارية على جوانب الطرق، ومن ثَمَّ تمنح للأفراد حقوق امتياز لتشغيل هذه المطاعم وتقدم لهم خدمات إدارية. وتوظف هذه الشركة عددا كبيرا من المسؤولين في شؤون الموظفين الذين يقابلون المتقدمين للعمل في هذه المطاعم. وفي نهاية المقابلة يعطي المسؤول تقديرا ذاتيا لرتبة تصنيف تتراوح بين 0 و 100 ، يشير فيها إلى أهلية المتقدم لشغل هذه الوظيفة أو العمل. افترض الآن أنه اختير خمسة مسؤولين عشوائيا، وتَّمَّ عشوائيا تخصيص أربعة مرشحين لكل منهم. وفي هذه الحالة لا ترغب الشركة في إيجاد استقراءات عن المسؤولين الخمسة، الذين اتُّفق أن تمَّ اختيارهم للمهمة، ولكن ترغب في إيجاد استقراءات عن مجتمع كافة مسؤولي شؤون الموظفين. والأسئلة التي يمكن أن تكون محل اهتمام هنا تتضمن: ماهو حجم التشتت في التقديرات بين جميع مسؤولي شؤون الموظفين؟ ماهو متوسط التقديرات لكل المسؤولين؟

ويمكن رؤية الفرق بين هذه الحالة، التي صُمِّم لها نموذج التحاين II ، والحالة التي يكون فيها نموذج التحاين I المثّبت مناسبا، بتعديل مثالنا قليلا. فلو أن شركة أصغر كان لديها خمسة مسؤولين لشؤون الموظفين وتمَّ إدخالهم جميعا في الدراسة وكان الاهتمام ينصب على هؤلاء المسؤولين الخمسة، فإن نموذج التحاين I سيكون مناسبا، ذلك لأن مستويات العامل (المسؤولين الخمسة) لم تعد تعتبر عينة من مجتمع أكبر، وأي تكرار للتجربة في الشركة الأصغر سيتضمن المسؤولين الخمسة أنفسهم، ولكن في حالة الشركة الكبيرة، فإن أي تكرار سيتضمن عينة عشوائية جديدة من خمسة مسؤولين وستتألف غالبا من موظفين مختلفين.

نموذج متوسطات الخلايا العشوائي

نموذج التحاين II لتحليل التباين وحيد العامل هو كالتالي:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad (17.16)$$

حيث:

μ_i مستقلة و $N(0,\sigma_\mu^2)$

ε_{ij} مستقلة و $N(0,\sigma^2)$

μ_i و ε_{ij} متغيرات عشوائية مستقلة.

$i = 1,...,r\ ;\quad j = 1,...,n_i$

ونموذج التحاين (17.16) مماثل في شكله لنموذج التحاين المثبت (14.2)، والفرق الرئيس بينهما هو أن متوسطات مستويات العامل μ_i مثّبتة في نموذج التحاين I ،بينما هي في نموذج التحاين II متغيرات عشوائية. ولهذا السبب، يقال عادة لنموذج التحاين (17.16) نموذج التحاين العشوائي. ولاحظ أن نموذج التحاين (17.16) هو نسخة من نموذج متوسطات الخلايا.

معنى حدود النموذج سنشرح معنى حدود النموذج بالرجوع إلى مثال مسؤولي شؤون الموظفين في مثال أبيكس للمشاريع. يدل الحد μ_i على متوسط كل رتب التصنيف التي وضعها المسؤول I لو أنه قابل جميع المستخدمين المحتملين والقيمة المتوقعة لـ μ_i هي μ. وهكذا فإن μ تمثل في هذا المثال متوسط رتب التصنيف لكل المستخدمين المحتملين التي يمكن أن يضعها كافة مسؤولي شؤون الموظفين. ويقاس تشتت μ_i بالتباين σ_μ^2 فكلما ازداد اختلاف مسؤولي شؤون الموظفين في متوسطات رتبهم التصنيفية (على سبيل المثال، قد يُعطي بعضهم دائما رتبا تصنيفية أعلى مما يعطيه الآخرون)، كلما كبرت σ_μ^2 . ومن جهة أخرى، لو أن كل المسؤولين أعطوا رتبا تصنيفية عند متوسط المستوى نفسه، فإن كل μ_i ستساوي μ وبالتالي ستكون $\sigma_\mu^2 = 0$.

ويمثل الحد ε_{ij} التشتت الموافق للقيم المختلفة للمقدرات الممكنة لمختلف المستخدمين المحتملين. لاحظ أن نموذج التحاين (17.16) يفترض أن لكل الحدود ε_{ij} التباين نفسه σ^2، وهذا يعني أن نفترض التشتت نفسه من أجل توزيعات الرتب التصنيفية لكافة المستخدمين المحتملين الناتجة عن مسؤولي شؤون الموظفين المختلفين. وعلى أية حال، فيمكن للتوزيعات الناتجة عن مسؤولي شؤون الموظفين المختلفين أن تختلف في متوسطاتها.

ويمثل الشكل (١٧-١) نموذج التحاين II ، ففي الأعلى نبين توزيع μ_i ، وهو توزيع طبيعي. وقد اختير بشكل عشوائي عدد من الـ μ_i (اثنان في هذا التوضيح) من هذا التوزيع. وكل منها يؤدي بدوره إلى توزيع لِـ $Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$، وهي كلها توزيعات

طبيعية ولها التباين نفسه وقد اختير عدد من المشاهدات Y_{ij} (اثنان في هذا التوضيح) من كل من هذه التوزيعات.

سمات مهمة للنموذج

١ ـ القيمة المتوقعة لأي مشاهدة Y_{ij} هي:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu. \qquad (17.17a)$$

إذ لدينا من (17.16):

$$\begin{aligned} E\{Y_{ij}\} &= E\{\mu_i\} + E\{\varepsilon_{ij}\} \\ &= \mu. + 0 \\ &= \mu. \end{aligned}$$

لاحظ أن هذا التوقع هو المتوسط فوق كل الاختيارات لكل من μ_i و ε_{ij} .

٢ ـ تباين Y_{ij} والذي سنرمز له بـ σ_Y^2 هو:

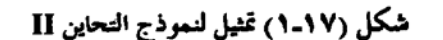
$$\sigma^2\{Y_{ij}\} = \sigma_Y^2 = \sigma_\mu^2 + \sigma^2 \qquad (17.17b)$$

وبالتالي، فإن لكل المشاهدات Y_{ij} التباين نفسه. وحصلنا على النتيجة في (17.17b)لأن نموذج التحاين II يفترض أن μ_i و ε_{ij} متغيرات عشوائية مستقلة. وأن $\sigma^2\{\mu_i\} = \sigma_\mu^2$ و $\sigma^2\{\varepsilon_{ij}\} = \sigma^2$ وفقا لنموذج التحاين (17.16). ولأن تباين Y في هذا النموذج عبارة عن مجموع مركبتين هما σ_μ^2 و σ^2 فإن هذا النموذج يدعى أحيانا نموذج مركبات التباين.

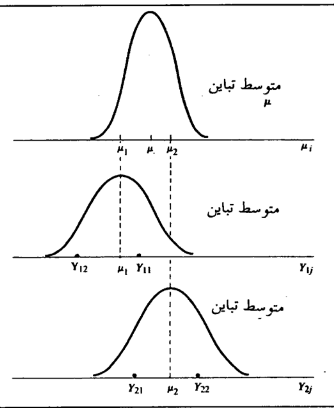
٣ ـ تتبع الـ Y_{ij} التوزيع الطبيعي ذلك لأنها تركيبات خطية في متغيرات طبيعية مستقلة هي μ_i و ε_{ij} .

٤ ـ خلافا لنموذج التحاين I المثبت حيث تكون جميع المشاهدات Y_{ij} مستقلة، فإن Y_{ij} لنموذج التحاين II العشوائي تكون مستقلة، فقط، إذا كانت تتعلق بمستويات عامل مختلفة. ويمكن تبيان أن التغاير لأي مشاهدتين Y_{ij} و $Y_{ij'}$ من المستوى i نفسه للعامل المدروس، هو في نموذج التحاين (17.16):

$$\sigma\{Y_{ij}, Y_{ij'}\} = \sigma_\mu^2 \qquad j \neq j' \qquad (17.17c)$$



شكل (١٧-١) تمثيل لنموذج التحاين II



وهكذا، فإن نموذج التحاين العشوائي (17.16) يفترض أن التغاير بين أي مشاهدتين في مستوى العامل نفسه يبقى ثابتا في كل مستوى من مستويات العامل.

والسبب في أن أي مشاهدتين في مستوى العامل نفسه مرتبطتان هو أننا نتوقع، قبل المحاولات العشوائية، أي قبل تنفيذ التجربة، أن تكون المشاهدات متشابهة، ذلك لأن لكل منهما المركبة العشوائية μ_i نفسها وستختلفان، فقط، بسبب حدود الخطأ ε_{ij}.

ولكن حال الانتهاء من اختيار مستويات العامل ، فإن نموذج التحاين العشوائي (17.16) يفترض أن أي مشاهدتين في مستوى العامل نفسه مستقلتان، ذلك لأن متوسط مستوى العامل μ_i يصبح عندئذٍ ثابتا. وتختلف المشاهدتان، فقط، بسبب حدود الخطأ ε_{ij} التي يجب أن تكون مستقلة. ولذلك في مثال شركة أبيكس للمشاريع، حالما يتم اختيار مسؤولي شؤون الموظفين، فإن نموذج التحاين العشوائي (17.16)

يفترض أن رتب التصنيف Y_{ij} لأي مسؤول بعينه مستقلة.

ملاحظة

أحياناً يكون مجتمع الـ μ_i صغيرا نوعا ما، ولذلك يجب معاملته كمجتمع منته. ويمكن القيام بذلك إلا أننا لن نناقش هذه الحالة هنا. وفي حالة كون مجتمع الـ μ_i منتهيا، ولكنه كبير، فإننا سنخسر القليل عند معاملته كمجتمع غير منته. وفي الواقع هذا هو ماعملناه في مثالنا التوضيحي لمسؤولي شؤون الموظفين. فعدد المسؤولين منته، ولكن بسبب وجود العديد منهم فقد عاملنا مجتمع الـ μ_i كمجتمع غير منته. وهكذا نجد حالتين أساسيتين عند معاملة مجتمع الـ μ_i كمجتمع غير منته هما الحالة التي يكون فيها المجتمع منتهيا ولكنه كبير، والحالة التي يتمركز فيها اهتمامنا على العملية التي تقف خلف توليد المقادير μ_i.

أسئلة مهمة . عندما يكون نموذج التحاين II ملائما، لانهتم عادة بالاستقراءات عن قيم μ_i بالذات التي انطوت عليها الدراسة، كأن نستقرئ مثلاً عن صغيرها وكبيرها، ولكننا نهتم بالاستقراءات عن كل مجتمع الـ μ_i . وعلى وجه التحديد يتمركز الاهتمام على متوسط الـ μ_i ، أي $\mu.$، وعلى تشتت μ_i الذي يقاس بـ σ_μ^2. فعلى سبيل المثال، في مثال شركة أبيكس للمشاريع، لن تكون الإدارة عادة مهتمة بمتوسط رتب التصنيف للمسؤولين الخمسة، الذين اتّفق أن تضمنتهم الدراسة، كاهتمامها بمتوسط رتب التصنيف لجميع مسؤولي شؤون الموظفين، وبتأثير التشتت بين المسؤولين كافة. وعلى الرغم من أن σ_μ^2 مقياس مباشر لتشتت μ_i ، فإن تأثير هذا التشتت يقاس عادة بشكل أفضل عن طريق النسبة.

$$\frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2+\sigma^2} \tag{17.18}$$

ونلاحظ المميزات التالية لهذه النسبة:

١ ـ تأخذ النسبة القيم مابين 0 (عندما تكون $\sigma^2 = \infty$) و1 (عندما تكون $\sigma^2 = 0$).

٢ ـ المقام هو σ_Y^2 وفقا لـ (17.17b).

٣ ـ على ضوء الخاصتين ١ و٢، فإن النسبة تقيس النسبة من تباين Y_{ij} الكلي المفسّر بتشتت μ_i. وبالرجوع إلى مثال شركة أبيكس للمشاريع، يقيس المقام في النسبة تشتت كل رتب التصنيف لجميع المرشحين التي وضعها المسؤولون كافة، ويقيس البسط تشتت متوسطات رتب التصنيف لكل من المسؤولين. وبالتالي، فإن تلك النسبة تقيس الحصة من التشتت الكلي لرتب التصنيف العائدة إلى الفروق بين مسؤولي شؤون الموظفين. فإذا كانت النسبة قريبة من الصفر، فإن الفروق بين مسؤولي شؤون الموظفين ليست ذات دلالة. ومن جهة أخرى، إذا كانت النسبة كبيرة، لنقل 0.5 أو أكثر، فعندئذٍ يكون الكثير من التشتت الكلي عائدا إلى الفروق بين مسؤولي شؤون الموظفين، وبالتالي، قد ترغب الإدارة في دراسة إمكانية المزيد من التدريبات لمسؤولي شؤون الموظفين لتحسين انتظام وانسجام رتب التصنيف التي يمنحونها.

ملاحظة

يمكن تبيان أن معامل الارتباط بين أي مشاهدتين من المستوى نفسه للعامل المدروس في نموذج التحاين العشوائي (17.16) هو:

$$\rho\{Y_{ij}, Y_{ij'}\} = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \sigma^2} \tag{17.19}$$

ولذلك فإن المقياس في (17.18) هو في الواقع معامل الارتباط بين أي مشاهدتين من مستوى العامل نفسه، والذي يعني هنا النسبة من التشت الكلي لـ Y_{ij} المفسَّر بتشتت المقادير μ_i.

والنتيجة في (17.19) تتبع من تعريف معامل الارتباط في (13.7):

$$\rho\{Y_{ij}, Y_{ij'}\} = \frac{\sigma\{Y_{ij}, Y_{ij'}\}}{\sigma\{Y_{ij}\}\sigma\{Y_{ij'}\}}$$

فالتغاير معطى في (17.17c) و $\sigma\{Y_{ij}\} = \sigma\{Y_{ij'}\} = \sigma_Y$ معطى في (17.17b).

اختبار لمعرفة ما إذا كان $\sigma_\mu^2 = 0$

سنعتبر في البداية كيفية التقرير بين:

$$H_0 : \sigma^2_\mu = 0 \qquad (17.20)$$
$$H_a : \sigma^2_\mu > 0$$

وتتضمـن H_0 أن جميـع الــ μ_i متسـاوية، أي أن $\mu = \mu_i$. وتتضمـن H_a أن الــ μ_i تختلف. ففي مثال مسؤولي شؤون الموظفين، تتضمن H_0 أن متوسطات رتب التصنيف لجميع مسؤولي شؤون الموظفين متساوية، بينما تتضمن H_a أنها مختلفة.

وبالرغم من حقيقة أن نموذج التحاين II يختلـف عـن نمـوذج التحـاين I ، إلا أن تحليل التباين في الدراسة وحيدة العامل يجـري بالأسـلوب نفسـه. (ولكـن ليـس الأمـر كذلـك في حـالات أكثر تعقيـدا). ويظهـر الفـرق بـين النموذجـين في توقـع متوسـط المربعات. وبطريقة مشابهة لتلك التي استخدمت في نموذج التحاين I ، يمكـن في حالـة نموذج التحاين II تبيان أن:

$$E\{MSE\} = \sigma^2 \qquad (17.21)$$
$$E\{MSTR\} = \sigma^2 + n'\sigma^2_\mu \qquad (17.22)$$

حيث:

$$n' = \frac{1}{r-1}\left[\left(\sum n_i\right) - \frac{\sum n_i^2}{\sum n_i}\right] \qquad (17.22a)$$

وإذا كانت جميع الـ $n_i = n$ ، فعندئذٍ $n' = n$.

ومن الواضــح مـن (17.21) و (17.22) أنـه إذا كـانت $\sigma^2_\mu = 0$ ، فـإن MSE و $MSTR$ لهما التوقع نفسه σ^2 ، وفيما عدا ذلك، فإن $E\{MSTR\} > E\{MSE\}$ وذلـك لأن $n' > 0$ دائما. وبالتالي فإن القيم الكبيرة لإحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{MSTR}{MSE} \qquad (17.23)$$

ستؤدي إلى استنتاج H_a في (17.20). ومرة أخرى، بما أن F^* تتبـع توزيـع F عندمـا تكون H_0 صحيحة، فإن قاعدة القرار التي تضبط مخاطرة الخطأ من النوع I عند α هـي نفسها التي استُخدمت في نموذج التحاين I:

$$\text{(17.24)}\quad \begin{array}{l} \text{إذا كان } F^* \le F(1-\alpha; r-1, n_T - r) \text{ استنتج } H_0 \\ \text{إذا كان } F^* > F(1-\alpha; r-1, n_T - r) \text{ استنتج } H_a \end{array}$$

مثال. يحوي الجدول (١٧-٣) نتائج دراسة لشركة أبيكس للمشاريع حول رتب التصنيف التي وضعها مسؤولون من شؤون الموظفين لتقويم مقدرة المتقدمين للعمل في الشركة، حيث تمَّ اختيار خمسة مسؤولين عشوائيا، وتمَّ عشوائيا تخصيص أربعة متقدمين لكل مسؤول. وكانت حسابات التحاين روتينية وقد تمت باستخدام حزمة حاسب آلي. ويوضح الجدول (١٧-٤) النتائج، وكذلك يوضح هذا الجدول توقع متوسط المربعات بشكل عام، وفي هذا المثال على وجه الخصوص.

وباستخدام البيانات في الجدول (١٧-٤) ، فإن إحصاءة الاختبار المناسبة هي:

$$F^* = \frac{370}{75.6} = 4.89$$

وبافتراض أننا نود ضبط مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع الأول عند $\alpha = .05$، فإننا سنحتاج لقيمة $F(.95; 4,15) = 3.06$ وبالتالي، فإن قاعدة القرار هي:

$$\begin{array}{l} \text{إذا كان } F^* \le 3.06 \text{ استنتج } H_0 \\ \text{إذا كان } F^* > 3.06 \text{ استنتج } H_a \end{array}$$

وبما أن $F^* = 4.89 > 3.06$ فنستنتج H_a، أي أن $\sigma_\mu^2 > 0$ ، أو بمعنى آخر إن متوسطات رتب التصنيف لمسؤولي شؤون الموظفين تختلف. والقيمة -P للاختبار هي .01.

جدول (١٧-٣) رتب التصنيف التي وضعها خمسة مسؤولين من شؤون الموظفين ـ مثال شركة أبيكس للمشاريع

المسؤول i	المرشح (j) 1	2	3	4	متوسط
A	76	64	85	75	$\bar{Y}_{1.} = 75$
B	58	75	81	66	$\bar{Y}_{2.} = 70$
C	49	63	62	46	$\bar{Y}_{3.} = 55$
D	74	71	85	90	$\bar{Y}_{4.} = 80$
E	66	74	81	79	$\bar{Y}_{5.} = 75$
متوسط					$\bar{Y}_{..} = 71$

جدول (١٧-٤) جدول تحاين لنموذج التحاين II، وحيد العامل - مثال شركة أبيكس للمشاريع.

مصدر المتغير	SS	df	MS	$E\{MS\}$ عامة	$E\{MS\}$ المثال
ما بين المسؤولين	$SSTR = 1,480$	4	$MSTR = 370$	$\sigma^2 + n'\sigma_\mu^2$	$\sigma^2 + 4\sigma_\mu^2$
الخطأ (ما ضمن المسؤولين)	$SSE = 1,134$	15	$MSE = 75.6$	σ^2	σ^2
المجموع	$SSTO = 2.614$				

$$n' = \frac{1}{r-1}\left[\left(\sum n_i\right) - \frac{\sum n_i^2}{\sum n_i}\right]$$

إذا كان كل n_i مساوياً n فإن $n' = n$

ملاحظة

سنوضح استنباط توقع متوسط المربعات لنموذج التحاين *II* عن طريق بيان الخطوات الرئيسة لعملية استنباط $E\{MSTR\}$ في (17.22) عندما تكون $n_i = n$. ويوازي البرهان هنا البرهان المقابل في نموذج التحاين I. ومن النموذج (17.16) يمكن أن نكتب:

$$\bar{Y}_{i.} = \mu_i + \bar{\varepsilon}_{i.}$$
$$\bar{Y}_{..} = \bar{\mu}_{.} + \bar{\varepsilon}_{..}$$

حيث $\bar{\varepsilon}_{i.}$ و $\bar{\varepsilon}_{..}$ معرفتان في (14.42) و (14.45)، على الترتيب و:

$$\bar{\mu}_{.} = \frac{\sum \mu_i}{r}$$

(لاحظ أننا استخدمنا هنا ترميزا لمتوسط الـ μ_i يختلف عن ذلك الموجود في نموذج التحاين I، وذلك للتأكيد على الطبيعة العشوائية للمتوسط في نموذج التحاين II) ووفقا لـ (14.47) نحصل على:

$$\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..} = (\mu_i - \bar{\mu}_{.}) + (\bar{\varepsilon}_{i.} - \bar{\varepsilon}_{..})$$

بحيث يكون :

$$\sum(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2=\sum(\mu_i-\overline{\mu}_.)^2+\sum(\overline{\varepsilon}_{i.}-\overline{\varepsilon}_{..})^2+2\sum(\mu_i-\overline{\mu}_.)(\overline{\varepsilon}_{i.}-\overline{\varepsilon}_{..})$$

وعند أخذ التوقع، يسقط الحد الجدائي وذلك بسبب استقلال μ_i و ε_{ij}، ولأن الانحرافات $\mu_i-\overline{\mu}_.$ و $\overline{\varepsilon}_{i.}-\overline{\varepsilon}_{..}$ لها جميعا التوقع صفر. ونعرف من (14.50) أن:

$$E\left\{\sum(\overline{\varepsilon}_{i.}-\overline{\varepsilon}_{..})^2\right\}=\frac{(r-1)\sigma^2}{n}$$

وأخيرا، بما أن $\Sigma(\mu_i-\overline{\mu}_.)^2$ هو البسط في تباين العينة الاعتيادي لـ r من المشاهدات μ_i المستقلة، فنجد من عدم انحياز تباين العينة أن :

$$E\left\{\sum(\mu_i-\overline{\mu}_.)^2\right\}=(r-1)\sigma_\mu^2$$

وبالتالي، نحصل على:

$$E\left\{\frac{n}{r-1}\sum(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2\right\}=\frac{n}{r-1}\left[(r-1)\sigma_\mu^2+\frac{r-1}{n}\sigma^2\right]=n\sigma_\mu^2+\sigma^2$$

وهي النتيجة نفسها في (17.22) في حالة $n_i=n$.

تقدير μ

عندما يكون نموذج التحاين II ملائما ، نهتم بتقدير المتوسط الكلي μ. وسنفترض عند تطويرنا لتقدير فترة لـ μ أن حجوم العينات لجميع مستويات العامل متساوية، أي أن $n_i=n$.

ونعرف من (17.17a) أن:

$$E\{Y_{ij}\}=\mu$$

ولذلك فإن مقدّرا غير منحاز لـ μ هو:

$$\hat{\mu}_.=\overline{Y}_{..} \qquad (17.25)$$

ويمكن إثبات أن تباين هذا المقدّر هو:

$$\sigma^2\{\overline{Y}_{..}\}=\frac{\sigma_\mu^2}{r}+\frac{\sigma^2}{n_T}=\frac{n\sigma_\mu^2+\sigma^2}{n_T} \qquad (17.27)$$

لنذكر هنا أن $n_T=rn$.

وتبيّن الصيغة (17.26) أن تباين $\overline{Y}_{..}$ يتكون من مركبتين. الأولى تدل على تباين متوسط عينة بناءً على r من المشاهدات عند المعاينة من مجتمع الـ μ_i، وهي تعكس

الإسهام العائد لمعاينة مستويات العامل. والمركبة الثانية تدل على تباين متوسط عينة بناءً على n_T من المشاهدات عند المعاينة من مجتمعات الـ Y_{ij} بمعلومية الـ μ_i، وهي تعكس الإسهام العائد للتشتت ضمن مستويات العامل.

وكمقدِّر غير منحاز لـ $\sigma^2\{\bar{Y}_{..}\}$ نجد:

$$s^2\{\bar{Y}_{..}\} = \frac{MSTR}{n_T} \quad (17.27)$$

وهذا المقدِّر غير منحاز لأننا نعرف من (17.22)، وعندما تكون $n_i \equiv n$ أن:

$$E\{MSTR\} = n\sigma_\mu^2 + \sigma^2 \quad (17.28)$$

(لنذكر أن $n' = n$ عندما تكون $n_i \equiv n$) وبقسمة النتيجة في (17.28) على n_T نحصل على (17.26).

ويمكن إثبات أن:

(17.29) $\frac{\bar{Y}_{..} - \mu_.}{s\{\bar{Y}_{..}\}}$ تتبع توزيع t $(r-1)$ لنموذج التحاين (17.16) وذلك عندما تكون $n_i \equiv n$. وبالتالي يمكننا الحصول على حدي الثقة لـ μ بالطريقة المعتادة:

$$\bar{Y}_{..} \pm t(1-\alpha/2; r-1)s\{\bar{Y}_{..}\} \quad (17.30)$$

مثال. ترغب الادارة في شركة أبيكس للمشاريع بتقدير متوسط، رتب التصنيف التي يضعها مسؤولو شؤون الموظفين جميعهم للمستخدمين المحتملين كافة، وذلك باستخدام 90% فترة ثقة. ولدينا من الجدولين (١٧-٣) و (١٧-٤) مايلي:

$$\bar{Y}_{..} = 71 \qquad MSTR = 370 \qquad n_T = 20$$

ونحتاج لقيمة $t(.95; 4) = 2.132$ وكذلك:

$$s^2\{\bar{Y}_{..}\} = \frac{370}{20} = 18.5$$

وبالتالي يكون $s\{\bar{Y}_{..}\} = 4.301$ ويكون حدا الثقة $71 + 2.132\,(4.301)$

والـ 90% فترة ثقة المطلوبة هي:

$$62 \le \mu \le 80$$

ولذلك نستنتج بـ 90% معامل ثقة أن متوسط رتب التصنيف التي يمنحها جميع مسؤولي شؤون الموظفين لكل المستخدمين المحتملين تتراوح بين 62 و 80 .وتقدير الفترة هذا ليس دقيقا جدا لأن حجوم العينات لمسؤولي شؤون الموظفين وللمستخدمين المحتملين صغيرة نوعا ما.

ملاحظة

يمكن استنباط تباين $\bar{Y}_{..}$ في (17.26) بسهولة. ونعتبر في البداية:

$$\bar{Y}_{i.} = \mu_i + \bar{\varepsilon}_{i.}$$

حيث $\bar{\varepsilon}_{i.}$ معرفة في (14.42)، وبسبب استقلال μ_i و ε_{ij}، نجد:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{i.}\} = \sigma_\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}$$

لنذكر أن $\bar{\varepsilon}_{i.}$ هو المتوسط المعتاد لـ n من المشاهدات المستقلة ε_{ij}.

وفي حالة $n_i \equiv n$ التي نعتبرها هنا نجد:

$$\bar{Y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{r} \bar{Y}_{i.}}{r}$$

وفي ضوء استقلال الـ μ_i عن الـ ε_{ij} واستقلال المقادير μ_i فيما بينها والمقادير ε_{ij} فيما بينها، نجد أن المقادير $\bar{Y}_{i.}$ مستقلة بحيث يكون:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{..}\} = \frac{\sigma^2\{\bar{Y}_{i.}\}}{r} = \frac{\sigma_\mu^2}{r} + \frac{\sigma^2}{rn} = \frac{n\sigma_\mu^2 + \sigma^2}{n_T}$$

تقدير $\sigma_\mu^2/(\sigma_\mu^2+\sigma^2)$

كما ذكرنا سابقا، فإن النسبة $\sigma_\mu^2/(\sigma_\mu^2+\sigma^2)$ تكشف بجلاء عن مدى تشتت المقادير μ_i. وللحصول على تقدير بفترة لهذه النسبة، سنفترض أن حجوم العينات لكل مستويات العامل متساوية، أي أن $n_i \equiv n$.

وسنبدأ بالحصول على حدى ثقة للنسبة σ_μ^2/σ^2. وسنحتاج أولاً إلى ملاحظة أن $MSTR$ و MSE هي في نموذج التحاين II، تماما كما في نموذج التحاين I، متغيرات عشوائية مستقلة. وعندما تكون $n_i \equiv n$ يمكن إثبات أن:

$$\frac{MSTR}{n\sigma_\mu^2+\sigma^2} \div \frac{MSE}{\sigma^2} \sim F(r-1, n_T-r) \quad , \quad n_i \equiv n \qquad (17.31)$$

ولذلك يمكننا كتابة العبارة الاحتمالية التالية:

$$P\left\{F(\alpha/2; r-1, n_T-r) \le \frac{MSTR}{n\sigma_\mu^2+\sigma^2} \div \frac{MSE}{\sigma^2} \le F(1-\alpha/2; r-1, n_T-r)\right\} = 1-\alpha \qquad (17.32)$$

وبإعادة ترتيب المتراجحات، نحصل على حدي الثقة L و U لـ σ_μ^2/σ^2 كما يلي:

$$L = \frac{1}{n}\left[\frac{MSTR}{MSE}\left(\frac{1}{F(1-\alpha/2; r-1, n_T-r)}\right)-1\right] \qquad (17.33a)$$

$$U = \frac{1}{2}\left[\frac{MSTR}{MSE}\left(\frac{1}{F(\alpha/2; r-1, n_T-r)}\right)-1\right] \qquad (17.33b)$$

حيث L هو حد الثقة الأدنى و U هو الحد الأعلى.

ويمكن الآن الحصول بسهولة على حدي الثقة L^* و U^* لـ $\sigma_\mu^2/(\sigma_\mu^2+\sigma^2)$، وهي كما يلي:

$$L^* = \frac{L}{1+L} \quad \text{و} \quad U^* = \frac{U}{1+U} \qquad (17.34)$$

مثال. ترغب إدارة شركة أبيكس للمشاريع في وضع فترة ثقة لـ $\sigma_\mu^2/(\sigma_\mu^2+\sigma^2)$.

ومن نتائجنا السابقة وجدنا:

$MSTR = 370 \qquad MSE = 75.6 \qquad n = 4 \qquad r = 5 \qquad n_T = 20$

ولـ 90% فترة ثقة سنحتاج إلى القيمة:

$F(.05;4,15) = .170 \qquad F(.95;4,15) = .06$

ومن (17.33) يكون حدا الثقة لـ σ_μ^2/σ^2:

$$L = \frac{1}{4}\left[\frac{370}{75.6}\left(\frac{1}{3.06}\right)-1\right] = .15 \quad \text{و} \quad U = \frac{1}{4}\left[\frac{370}{75.6}\left(\frac{1}{.170}\right)-1\right] = 6.9$$

وفترة الثقة لـ σ_μ^2/σ^2 هي:

$$.15 \le \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma^2} \le 6.9$$

وأخيرا، فإن حدي الثقة لـ $\sigma_\mu^2/(\sigma_\mu^2+\sigma^2)$ هما من (17.34)، $L^* = .15/1.15 = .13$ و $U^* = 6.9/7.9 = .87$، بحيث تكون 90% فترة ثقة كالتالي:

$$.13 \le \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2+\sigma^2} \le .87$$

وبالتالي نستنتج بـ 90% معامل ثقة أن تشتت متوسطات رتب التصنيف لمسؤولي شؤون الموظفين المختلفين يفسر مايتراوح بين 13 و 87 في المئة من التشتت الكلي لرتب التصنيف كافة. لاحظ أن تقدير الفترة هذا ليس دقيقا جدا. والسبب هو صغر حجوم العينات نوعا ما. ومع ذلك ، فالفترة تشير تماما إلى أن التشتت بين مسؤولي شؤون الموظفين ليس تافها باعتباره يفسر ما لا يقل عن 13 في المئة من التشتت الكلي.

تعليقات

١ ـ قد يحدث من وقت لآخر أن يكون الحد الأدنى في فترة الثقة لـ σ_μ^2/σ^2 سالبا. وبما أن هذه النسبة لايمكن أن تكون سالبة، فالاجراء المعتاد في هذه الحالة هو اعتبار الحد الأدنى L في (17.33a) صفرا.

٢ ـ إذا كان المطلوب اختبارات ذات جانب واحد أو اختبارات ذات جانبين تتعلق بالحجوم النسبية لِ σ_μ^2 و σ^2 ، مثال على ذلك الفرضيات التالية (حيث c ثابت محدود).

$$H_0: \sigma_\mu^2 = c\sigma^2 \qquad H_0: \sigma_\mu^2 \le c\sigma^2$$
$$H_a: \sigma_\mu^2 \ne c\sigma^2 \qquad H_a: \sigma_\mu^2 > c\sigma^2$$

فيمكن في هذه الحالة وضع قاعدة القرار باستخدام (17.31). أو يمكن، بدلاً من ذلك إنشاء فترات ثقة ذات جانب واحد أو جانبين، ومن ثَمَّ يمكن التوصل منها إلى القرار المناسب. فعلى سبيل المثال، افترض في مثال شركة أبيكس للمشاريع أننا نريد اختبار الفرضية:

$$H_0: \sigma_\mu^2 = \frac{1}{2}\sigma^2$$
$$H_a: \sigma_\mu^2 \ne \frac{1}{2}\sigma^2$$

فبما أن 90% فترة ثقة لـ σ_μ^2/σ^2 أعلاه (مقابلـة لمستوى معنويـة .10) تحتـوي على .5، فإن القرار المناسب هو استنتاج H_0.

٣ ـ للنسبة σ_μ^2/σ^2 أهميـة عند تخطيط الدراسات. افترض في مثال شركة أبيكس للمشاريع الذي يتعامل مع مسؤولي شؤون الموظفين أن المطلوب تقدير متوسط رتب التصنيف μ.، وأن تكلفة شمول الدراسة لمسؤول من شؤون الموظفين ولأحد المرشحين هما c_1 و c_2، على الترتيب. ولميزانية إجمالية للمشروع تبلغ C تكون النسبة σ_μ^2/σ^2 المتغير الحاسم لإيجاد التوازن الأمثل بين عدد مسؤولي الشركة وعدد المرشحين الذين ستتضمنهم الدراسة، وبحيث نجعل تباين المقدّر أصغر ما يمكن. وإذا كانت المجتمعات غير كبيرة، فينبغي للنموذج أن يراعي الطبيعة المنتهية لها.

تقدير σ_μ^2 و σ^2

في بعض الأحيان يكون الاهتمام منصبا على تقدير σ_μ^2 و σ^2، على انفراد. ووفقا لـ (17.21) ، فإن مقدرا غير منحاز لـ σ^2 هو:

$$\hat{\sigma}^2 = MSE \tag{17.35}$$

ويمكن الحصول على فترة ثقة لـ σ^2 بالطريقة المعتادة بواسطة (1.68) ، وستكون درجات الحرية هنا $n_T - r$.

ويتوافر كذلك مقدّر نقطي غير منحاز لـ σ_μ^2. إذ نجد من (17.21) و(17.22):

$$E\{MSE\} = \sigma^2$$

$$E\{MSTR\} = \sigma^2 + n'\sigma_\mu^2$$

ومنه نجد أن المقدّر:

$$\hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{MSTR - MSE}{n'} \tag{17.36}$$

هو مقدر غير منحاز لـ σ_μ^2. ومن وقت لآخر قد يكون هذا المقدّر سالبا. وبما أن التباين لايمكن أن يكون سالبا فالاجراء المعتاد هو اعتبار المقدّر النقطي صفرا في هذه الحالة. وتتوافر، فقط، فترات ثقة تقريبية لـ σ_μ^2. وقد نوقشت هذه الأفكار في المرجع [17.2].

مثال. في مثال شركة أبيكس للمشاريع، تحتاج 90% فترة ثقة لـ σ^2 لما يلي:

$MSE = 75.6 \qquad \chi^2(.05;15) = 7.26 \qquad \chi^2(.95;15) = 25.0$

وباستخدام (1.68) نجد:

$$45.4 = \frac{15(75.6)}{25.0} \le \sigma^2 \le \frac{15(75.6)}{7.26} = 156.2$$

ويتطلب مقدر غير منحاز لـ σ_μ^2 ما يلي :

$MSE = 75.6 \qquad MSTR = 370 \qquad n' = n = 4$

وبالتالي نجد من (17.36):

$$\hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{370 - 75.6}{4} = 73.6$$

نموذج تأثيرات عشوائية للعامل

يمكننا كتابة نموذج متوسطات الخلايا العشوائي بعامل واحد (17.16)، في شكل مكافئ ينطوي على تأثيرات عشوائية للعامل، تماما كما فعلنا في مستويات العامل المثبتة في الفصل ١٤. ويمكننا القيام بذلك بالتعبير عن متوسط مستوى العامل μ_i كانحراف عن قيمته المتوقعة، $E\{\mu_i\} = \mu.$، وذلك كما يلي:

$$\tau_i = \mu_i - \mu. \tag{17.37}$$

وبعد ذلك نستبدل ببساطة العبارة المكافئة من (17.37) بالمقدار μ_i في نموذج التحاين (17.16):

$$\mu_i = \mu. + \tau_i \tag{17.38}$$

وبالتالي يمكن كتابة نموذج التأثيرات العشوائية لعامل كما يلي:

$$Y_{ij} = \mu. + \tau_i + \varepsilon_{ij} \tag{19.39}$$

حيث:

$\mu.$ مركبة ثابتة مشتركة لجميع المشاهدات.

τ_i مستقلة وتتبع $N(0, \sigma_\mu^2)$.

ε_{ij} مستقلة وتتبع $N(0, \sigma^2)$.

τ_i و ε_{ij} مستقلتان.

$i = 1,\ldots,r\,;\; j = 1,\ldots,n_i$

لاحظ أن τ_i متغيرات عشوائية في نموذج التحاين (17.39). وبالرجوع إلى مثال شركة أبيكس للمشاريع، فإن τ_i تمثل تأثير المسؤول i الذي اختير عشوائيا. وعلى وجه التحديد، تقيس τ_i مدى اختلاف متوسط تقويمات المسؤول i لجميع المستخدمين المحتملين عن متوسط التقويمات الإجمالي لجميع المسؤولين.

مراجع ورد ذكرها

[17.1] Owen, D. B. *Handbook of Statistical Tables*. Reading. Mass. : Addison-Wesley Publishing, 1962.

[17.2] Scheffé, H. *The Analysis of variance*. New York : John Wiley & Sons, 1959.

مسائل

(١٧-١) بالرجوع إلى مثال ١ في الصفحة. أوجد قوة الاختبار إذا كانت $\alpha = .01$، مع بقاء كل شيء آخر بدون تغيير. ما مدى إختلاف هذه القوة عن تلك التي حسبت في مثال ١؟

(١٧-٢) بالرجوع إلى مثال ٢ في الصفحة. يهتم المحلل، أيضا، بالحصول على قوة الاختبار عندما تكون $\mu_1 = \mu_2 = 13$ و $\mu_3 = \mu_4 = 18$. افترض أن $\sigma = 2.5$.

أ - أوجد قوة الاختبار إذا كانت $\alpha = .05$.

ب - كم ستكون قوة الاختبار لو أن $\alpha = .01$.

(١٧-٣) بالرجوع إلى مسألة **تحسين الانتاجية** (١٤-١٠). أوجد قوة الاختبار في المسألة (١٤-١٠). إذا كانت $\mu_1 = 7.0$، $\mu_2 = 8.0$ و $\mu_3 = 9.0$. افترض أن $\sigma = .9$.

(١٧-٤) بالرجوع إلى مسألة علاج **إعادة التأهيل** (١٤-٢). أوجد قوة الاختبار في المسألة (١٤-١٢د). إذا كانت $\mu_1 = 37$، $\mu_2 = 35$ و $\mu_3 = 28$. افترض أن $\sigma = 4.5$.

(١٧-٥) بالرجوع إلى **مسألة العروض النقدية** (١٤-١٣). أوجد قوة الاختبار في المسألة (١٤-١٣د). إذا كان متوسط العروض النقدية هو $\mu_1 = 22$ ، $\mu_2 = 28$ و $\mu_3 = 22$. افترض أن $\sigma = 1.6$.

(١٧-٦) ذكر باحث تسويق في محاضرة ما يلي: «ليس هناك مغزى لطريقة القوة في تحديد حجوم العينات في مسائل تحليل التباين، ويجب استخدام طريقة التقدير، فقط. فنحن لن نجري أبدا أي دراسة نتوقع مسبقا أن تكون متوسطات المعالجات فيها متساوية، ولذلك فنحن مهتمون دائما بتقديرات مختلفة». ناقش.

(١٧-٧) لماذا تظن أن طريقة التخطيط لحجوم العينات لتحديد أفضل معالجة عن طريق الجدول أ-١١لاتأخذ بعين الاعتبار مخاطرة الوصول إلى تحديد غير صحيح عندما يكون متوسطا أفضل معالجتين متساويين أو عمليا متساويين؟.

(١٧-٨) اعتبر دراسة وحيدة العامل بحيث يكون $r = 5$، $\alpha = .01$، $\beta = .05$ و $\sigma = 10$. ونرغب في استخدام حجوم عينات متساوية للمعالجات وفقا لأسلوب الجدو ل أ-١٠.

أ - كم ستكون حجوم العينات المطلوبة إذا كانت $\Delta = 10,15,20,30$؟ ما هو التعميم الذي تقترحه؟

ب - كم ستكون حجوم العينات المطلوبة من أجل القيم Δ نفسها كما في الجزء (أ) إذا كانت $\alpha = .05$ مع بقاء جميع المواصفات الأخرى كما هي. ما مدى اختلاف حجوم العينات هذه عن تلك التي حُسبت في الجزء (أ)؟

(١٧-٩) اعتبر دراسة وحيدة العامل، حيث يكون $r = 6$، $\alpha = .05$، $b = .10$ و$\Delta = 50$ ونرغب في استخدام حجوم عينات متساوية للمعالجات وفقا لأسلوب الجدول أ-١٠.

أ - كم ستكون حجوم العينات المطلوبة إذا كانت $\sigma = 50,25,20$؟ ماهو التعميم الذي يمكن اقتراحه من نتائجك؟

ب ـ كم ستكون حجوم العينات لقيم σ نفسها في الجزء (أ) لو كانت $r = 4$ مع بقاء المواصفات الأخرى كما هي. ما مدى اختلاف حجوم العينات هذ عن تلك التي حسبت في الجزء (أ)؟

(١٧ـ١٠) اعتبر دراسة وحيدة العامل، حيث تكون $r = 5$، $1- \alpha = .95$ و $\sigma = 20$، ونرغب في استخدام حجوم عينات متساوية للمعالجات وفقا لأسلوب الجدول أ–١١.

أ ـ كم ستكون حجوم العينات المطلوبة إذا كانت $\lambda = 20,10,5$؟ ما هو التعميم الذي تقترحه نتائجك؟.

ب ـ كم ستكون حجوم العينات المطلوبة من اجل القيم نفسها لِ λ كما في الجزء (أ) إذا كان $\sigma = 30$ مع بقاء المواصفات الأخرى كما هي؟ ما مدى اختلاف حجوم العينات هذه عن تلك التي حسبت في الجزء (أ)؟

(١٧ـ١١) بالرجوع إلى مسألة **لون ورق الاستبيان** (١٤ـ١١). افترض أن حجوم العينات لم تُحدَّد بعد ولكنه تقرر أن تتم معاينة العدد نفسه من مواقف الأسواق المركزية لكل لون ورقة استبيان. افترض أن قيمة تخطيطية منطقية للانحراف المعياري للخطأ هي $\sigma = 3.0$.

أ ـ كم ستكون حجوم العينات المطلوبة لو أنه: (١) يراد إكتشاف فروق في معدلات الاستجابة باحتمال .90 أو أكثر عندما يكون مدى متوسطات المعالجات هو 4.5، و (٢) يراد ضبط المخاطرة α عند .05.

ب ـ كم ستكون أقل قوة لاختبار فروق متوسطات المعالجات (باستخدام $\alpha = .05$) عندما يكون مدى متوسطات المعالجات 6.0، وذلك إذا استُخدمت حجوم العينات نفسها التي استُخدمت في الجزء (أ)؟

جـ ـ افترض أن الاهتمام ينصب على المقارنات مثنى مثنى. كم ستكون حجوم العينات المطلوبة إذا كانت الدقة لكل المقارنات مثنى مثنى هي 3.0 ±، مستخدمين طريقة توكي بـ 95% معامل ثقة عائلي؟

د ــ افترض أن الهدف الرئيس هو معرفة اللون ذي أعلى متوسط إستجابة. وأن التعرف على اللون الأفضل فعلاً ينبغي أن يتم باحتمال لايقل عن 99. وذلك عندما يكون الفرق بين متوسطات الاستجابة بين اللون الأفضل واللون الذي يليه هو 1.5 في المئة من النقاط أو أكثر. كم يجب أن تكون حجوم العينات.

(١٧ـ١٢) بالرجوع إلى مسألة **علاج إعادة التأهيل** (١٤ـ١). افترض أن حجوم العينات لم تتحدد بعد ولكن تقرر استخدام عدد المرضى نفسه في كل مجموعة من مجموعات العلاج الطبيعي. وافترض أن قيمة تخطيطية منطقية للانحراف المعياري للخطأ هي $\sigma = 4.5$ يوما.

أ ـ كم ستكون حجوم العينات المطلوبة إذا كان (١) يراد اكتشاف فروق في معدلات الاستجابة لفئات اللياقة الثلاث باحتمال 80. أو أكثر عندما يكون مدى متوسطات المعالجات 5.63 يوما، و(٢) يراد ضبط المخاطرة α عند 01.؟

ب ـ إذا استخدمنا حجوم العينات المحددة في الجزء (أ) كم ستكون قوة الاختبار لفروق متوسطات المعالجات عندما تكون $\mu_1 = 37$ ، $\mu_2=32$ و $\mu_3 = 28$ ؟

جـ ـ افترض أن الاهتمام الرئيسي ينصب على تقدير المقارنتين الثنائيتين التاليتين:

$$D_1 = \mu_1 - \mu_2 \qquad D_2 = \mu_3 - \mu_2$$

ما هي حجوم العينات المطلوبة إذا كانت الدقة المطلوبة لكل مقارنة هي ± 3.0 يوما، مستخدمين طريقة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة بـ 95% معامل ثقة عائلي؟

د ـ افترض أن الهدف الرئيس هو معرفة فئة اللياقة البدنية ذات متوسط وقت العلاج الطبيعي الأقصر. وأنه تنبغي معرفة الفئة الصحيحة

باحتمال 90. على الأقل عندما يختلف متوسط الوقت اللازم للعلاج في ثاني أفضل فئة بيومين أو أكثر. ماهي حجوم العينات المطلوبة؟

(١٧-١٣) بالرجوع إلى **مسألة آلات التعبئة** (١٤-١٤). افترض أن حجوم العينات لم تتحدد بعد، ولكن تقرر معاينة العدد نفسه من علب الكرتون لكل آلة تعبئة. وافترض أن قيمة تخطيطية منطقية للانحراف المعياري هي $\sigma = .15$ أونزة.

أ - كم ستكون حجوم العينات المطلوبة إذا كان : (١) يراد إكتشاف فروق في متوسطات الكميات المعبأة لكل آلة باحتمال 70. أو أكثرعندما يكون مدى متوسطات المعالجات هو 15. أونزة، و(٢) يراد ضبط المخاطرة α عند 05.؟

ب - كم ستكون قوة الاختبار إذا كانت $\mu_1 = .09$ ، $\mu_2 = .18$ ، $\mu_3 = .30$ ، $\mu_4 = .20$ ، $\mu_5 = .10$ و $\mu_6 = .20$ ، وذلك إذا استخدمت حجوم العينات نفسها التي وجدت في الجزء (أ)؟.

جـ - افترض أن الاهتمام الرئيس ينصب على تقدير المقارنات التالية:

$$D_1 = \mu_1 - \mu_2 \qquad L_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

$$D_2 = \mu_3 - \mu_4 \qquad L_2 = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{4} - \frac{\mu_5 + \mu_6}{2}$$

كم ستكون حجوم العينات إذا كانت الدقة المطلوبة لكل من هذه المقارنات لن تزيد عن 08. ± أونزة، مستخدمين أفضل طريقة مقارنات متعددة و 95% معامل ثقة عائلي؟

د - افترض أن الهدف الرئيس هو معرفة آلة التعبئة ذات متوسط التعبئة الأصغر. وأنه ينبغي التعرّف على الفئة ذات متوسط الفئة الأصغر فعلاً باحتمال 95. على الأقل، وذلك عندما يختلف متوسط التعبئة للآلة التي تليها في صغر متوسط التعبئة بمقدار 10. أونزة أو أكثر. كم يجب أن تكون حجوم العينات؟

(١٧ــ١٤) بالرجوع إلى مسألة **توزيع الجوائز التشجيعية** (١٤ــ١٥). افترض أن حجوم العينات لم تحدد بعد، ولكنه تقرر معاينة العدد نفسه من توزيعات الجوائز لكل وكيل. وافترض أن قيمة تخطيطية منطقية للانحراف المعياري هي $\sigma = 3.0$ أيام.

أ ـ كم ستكون حجوم العينات المطلوبة إذا كان: (١) يراد اكتشاف فروق في متوسط الوقت المنصرم لاستكمال التوزيع للوكلاء الخمسة باحتمال 95. أو أكثر وذلك عندما يكون مدى متوسطات المعالجات هو 3.75 يوما. و(٢) يراد ضبط مخاطرة α عند 10.؟

ب ـ افترض أن الاهتمام الرئيس ينصب على تقدير المقارنات التالية:

$$D_1 = \mu_1 - \mu_2 \qquad L_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \mu_5$$

$$D_2 = \mu_3 - \mu_4 \qquad L_2 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \frac{\mu_3 + \mu_4}{2}$$

كم ستكون حجوم العينات إذا كانت الدقة المطلوبة لكل من هذه المقارنات لا تزيد عن 1.0 ± يوما، مستخدمين طريقة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة بـ 95% معامل ثقة عائلي؟.

جـ ـ افترض أن الهدف الرئيس هو تعيين الوكيل الأفضل، أي الوكيل الذي يحتاج إلى أقصر متوسط وقت للتوزيع. وأنه يجب معرفة الوكيل الأفضل باحتمال 90. على الأقل وذلك عندما يختلف متوسط الوقت اللازم لثاني أفضل وكيل بيوم أو أكثر. كم يجب أن تكون حجوم العينات؟

(١٧ـ١٥) بالرجوع إلى مسألة **علاج إعادة التأهيل** (١٤ــ١٢). افترض أن الاهتمام الرئيس هو مقارنة فئات اللياقة «أقل من المتوسط» و «فوق المتوسط»، على الترتيب، مع فئة اللياقة «متوسط». وهكذا نهتم بمقارنتين هما:

$D_1 = \mu_1 - \mu_2$ و $D_2 = \mu_3 - \mu_2$

افترض أن قيمة تخطيطية منطقية للانحراف المعياري هي *4.5* يوما.

أ ـ لقد تقرر استخدام حجوم عينات متساوية (n) للفئات «أقل من المتوسط» و«أعلى من المتوسط». وإذا كان سيستخدم ضعف هذا العدد ($2n$) لفئة اللياقة «متوسط»، فكم ستكون حجوم العينات المطلوبة إذا كانت الدقة لكل مقارنة ثنائية هي 2.5 ± يوما، مستخدمين طريقة بونفيروني مع 90% معامل ثقة عائلي؟

ب ـ كرّر الحسابات في الجزء (أ) إذا كان حجم العينة لفئة اللياقة «متوسط» هو: (١) n و(٢) $3n$، مع بقاء المواصفات الأخرى كما هي.

جـ ـ قارن نتائجك في الجزئين، (أ) و (ب). أي تصميم يؤدي إلى أصغر حجم عينة كلي؟

(١٧-١٦) لماذا يدعى اختبار كروسكال ـ والاس للرتب واختبار الوسيط اختبارات لامعلمية.

(١٧-١٧) هل هناك فروق أساسية بين فرضيات اختبار كروسكال ــ والاس للرتب وفرضيات اختبار الوسيط؟ وإذا كان الأمر كذلك، فما هي هذه الفروق؟ وإذا لم يكن هناك فروق، فكيف يختار المرء بين هذين الاختبارين؟

(١٧-١٨) إشرح لماذا تكون الحدود في (17.14) حدود اختبار وليست حدود ثقة.

(١٧-١٩) بالرجوع إلى مسألة **تحسين الانتاج** (١٤-١٠).

أ ـ نفّذ اختبار كروسكال – والاس للرتب، واستخدم $\alpha = .05$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. هل كانت التعادلات مصدر صعوبة هنا؟

ب ـ ما هي القيمة ـP للاختبار في الجزء (أ)؟

جـ ـ هل النتيجة في الجزء (أ) مختلفة عن تلك في المسألة (١٤-١٠)(د)؟

د ـ هل تقترح البيانات أن هناك حاجة لاختبار لامعلمي هنا؟

هـ - قُمْ باختبارات ثنائية متعددة بناء على البيانات المرتبة وذلك لتصنيف أنواع المصانع الثلاثة في مجموعات وفقا لمتوسط تحسين الانتاجية. استخدم مستوى معنوية عائلي $\alpha = .10$، صف نتائجك.

و - قم باختبارات الرتب في الجزء (أ) باستخدام إحصاءة الاختبار F^* في (17.10). هل القيمة -P لهذا الاختبار مشابهة لتلك في اختبار كروسكال - والاس في الجزء (ب)؟

(١٧-٢٠) **اتصالات الهاتف.** اتفقت شركة مع مستشار إداري لتحسين كفاءة الاتصالات من حيث تكلفتها. وكجزء من الدراسة، اختار المستشار عشوائيا 10 من المديرين التنفيذيين في المركز الرئيس للشركة وذلك من كل من الأقسام التالية : (١) المبيعات، (٢) الانتاج و(٣) البحث والتطوير، ودرس إتصالاتهم خلال فترة الأسابيع العشرة الماضية بالتفصيل. وإضافة إلى بيانات أخرى، فقد حصل المستشار على المعلومات التالية عن التكاليف الأسبوعية بالدولار لمكالمات هاتفية بعيدة المدى قام بها المديرون التنفيذيون مع مكاتب فرعية للشركة.

i	j: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	666	920	495	602	1,499	960	796	343	894	813
2	488	362	156	546	216	542	345	291	516	126
3	391	450	609	910	705	472	645	496	763	1,309

وقد قرر المستشار استخدام أسلوب لامعلمي لاختبار ما إذا كانت متوسطات تكاليف الهاتف في الأقسام الثلاثة متساوية أم لا.

أ - ما هي السمة في البيانات التي أملت استخدام اختبار لامعلمي؟

ب - قم باختبار كروسكال - والاس للرتب، مع ضبط مخاطرة الخطأ من النوع الأول $\alpha = .05$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة-P للاختبار؟

جـ - قم باختبار مقارنات ثنائية متعددة بناءً على البيانات المرتبة وذلك لتصنيف الأقسام الثلاثة في مجموعات وفقا لمتوسط مصاريف الهاتف فيها، استخدم مستوى معنوية عائلي $\alpha = .05$. صف نتائجك.

د - قم باختبار الرتب في الجزء (أ) باستخدام إحصاءة الاختبار F^* في (17.10). هل القيمة -P لهذا الاختبار مشابهة لتلك في اختبار كروسكال - والاس في الجزء (ب)؟

(١٧-٢١) بالرجوع إلى مسألة **اتصالات الهاتف** (١٧-٢٠). افترض في اختبار كروسكال - والاس أن الفرضيات البديلة كانت:

H_0 : جميع المجتمعات متطابقة

H_a: ليست جميع المجتمعات متطابقة

أ - هل تنطوي المسألة هنا على افتراضات الاختبار نفسها كما في المسألة (١٧-٢٠)؟

ب - إذا استنتجنا H_a ، هل يعني ذلك بالضرورة أن متوسط تكاليف الهاتف غير متساوية في الأقسام الثلاثة؟ اشرح.

(١٧-٢٢) **عمر بطارية.** طُوِّرت نسخة ميدانية خاصة من جهاز مختبر يزود بالطاقة من بطارية. وتَمَّ اختبار أربعة تصاميم مختلفة للبطارية. وفيما يلي البيانات عن عدد ساعات التشغيل في الميدان لعشرين بطارية من كل تصميم:

j: 10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i
11.71	5.71	4.85	13.27	8.31	10.19	13.22	3.81	10.08	7.48	1
8.41	14.82	7.07	14.08	11.52	12.36	17.42	6.45	23.41	10.86	2
22.41	6.35	16.70	7.14	8.60	16.40	5.35	9.68	8.12	6.70	3
3.57	11.74	7.34	4.21	6.31	9.09	4.59	6.74	4.99	12.40	4

j: 20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	i
6.24	3.37	3.08	6.71	8.03	4.19	19.37	2.25	2.66	6.52	1
8.85	10.17	17.07	15.37	9.21	7.10	7.53	6.53	11.00	9.06	2
11.14	7.58	13.80	14.63	5.66	11.30	9.14	13.28	6.01	10.52	3
5.35	20.17	14.76	8.22	5.40	12.38	7.86	11.76	4.07	8.36	4

أ ـ احصل على الرواسب المعيرة في (16.2) عند توفيق نموذج التحاين (14.2) وجهِّز رسوم نقطية مصطفّة للرواسب لكل معالجة. وجهِّز كذلك رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وبين قيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو أن توزيع حدود الخطأ غير طبيعي؟

ب ـ قم باختبار كروسكال ـ والاس استخدم $\alpha = .01$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟ وهل كانت التعادلات مصدر صعوبة هنا؟

جـ ـ قم باختبارات ثنائية متعددة للبيانات المرتبة لتجميع الأنواع الأربعة من البطاريات في مجموعات وفقا لمتوسط العمر التشغيلي، استخدم مستوى معنوية عائلي $\alpha = .10$. صف نتائجك.

د ـ قم باختبار الرتب في الجزء (ب) باستخدام إحصاءة الاختبار F^* في (17.10). هل القيمة ـP لهذا الاختبار مشابهة لتلك في اختبار كروسكال ـ والاس في الجزء (ب)؟

(١٧-٢٣) بالرجوع إلى مسألة **العروض النقدية** (١٣-١٤).

أ ـ قم باختبار الوسيط لتساوي متوسطات مستويات العامل. استخدم $\alpha = .01$ أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة-P للاختبار؟

ب ـ هل القرار في الجزء (أ) هو نفسه الذي حصلنا عليه في المسألة (١٤-١٣)د؟

(١٧-٢٤) بالرجوع إلى مسألة **اتصالات الهاتف** (١٧-٢٠). قم باختبار الوسيط لتساوي متوسطات مستويات العامل. اضبط المخاطرة α عند .05. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟

(١٧-٢٥) بالرجوع إلى مسألة **عمر البطارية** (١٧-٢٢). قم باختبار الوسيط لتساوي متوسطات مستويات العامل. استخدم $\alpha = .10$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

(١٧-٢٦) يسأل أحد الطلبة لماذا يُذكر ε_{ij} كحدّ منفصل في نموذج التأثيرات العشوائية (17.16) في ضوء كون μ_i متغيرا عشوائيا في هذا النموذج. أجب.

(١٧-٢٧) بالرجوع إلى الشكل (١٧-١). الحالة الموضحة هنا هي حالة أن التباين σ^2 أكبر من التباين σ_μ^2 . هل هذه الحالة صحيحة دائما؟ اشرح.

(١٧-٢٨) في كل من الحالات التالية، وضح ما إذا كان نموذج التحاين I أو نموذج التحاين II أكثر ملاءمة مع ذكر الأسباب.

(١) في دراسة الغياب في مصنع ما، المعالجات هي فترات العمل الثلاث.

(٢) في دراسة إنتاجية المستخدمين، المعالجات هي 10 مستخدمي انتاج اختيروا عشوائيا من بين كل مستخدمي الإنتاج في شركة كبيرة.

(٣) في دراسة على الدخل السنوي عند التقاعد، المعالجات هي أنواع خطط التقاعد الأربع المتاحة للموظفين.

(٤) في دراسة على اهتزاء الاطارات في شاحنات ذات 18 إطارا ، المعالجات هي أربع مواقع إطارات اختيرت عشوائيا.

(١٧-٢٩) بالرجوع إلى مثال **مسؤولي شؤون الموظفين** في شركة أبيكس للمشاريع في الصفحة 910. اشرح بالرجوع إلى هذا المثال فوق ماذا أُخذ التوقع في (17.17a). وفوق ماذا أُخذ التباين في (17.17b)؟. وفوق ماذا أُخذ التغاير في (17.17c)؟

(١٧-٣٠) بالرجوع إلى مسألة **آلات التعبئة** (١٤-١٤). افترض أن الشركة تستخدم عددا كبيرا من آلات التعبئة وأن الآلات الست قد اختيرت عشوائيا من بينها. افترض أن نموذج التحاين (17.16) مناسب.

أ ـ فسر التالي بالرجوع إلى هذا المثال:

(١) μ ، (٢) σ_μ^2 ، (٣) σ^2 ، (٤) $\sigma^2\{Y_{ij}\}$.

ب ـ اختبر ما إذا كان لجميع الآلات في المجتمع متوسط التعبئةنفسه أم لا، إستخدم $\alpha = .05$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

جـ ـ قدر متوسط الكمية المعبأة لكل الآلات في المجتمع بـ 95% فترة ثقة.

(١٧-٣١) بالرجوع إلى مسائل **تعبئة الآلات** (١٤-١٤) و (١٧-٣٠).

أ ـ قدر نسبة التشتت الكلي في تعبئة علب الكرتون التي تعكس الفروق بين متوسطات الكميات المعبأة بين الالات، استخدم 95% فترة ثقة.

ب ـ قدر σ^2 بـ 95% فترة ثقة. فسّر تقدير الفترة هذا.

جـ ـ احصل على تقدير نقطي لـ σ_μ^2 .

(١٧-٣٢) **كمية الصوديوم.** درست باحثة كمية الصوديوم في مشروب الشعير بأن اختارت عشوائيا ستة أنواع من بين الأنواع الكثيرة من مشروبات أمريكا وكندا التي تباع في منطقة حضرية. ومن ثم اختارت عشوائيا من بائعي تجزئة في المنطقة ثماني علب أو زجاجات ذات وزن 12 أونزة وذلك من كل نوع اختارته وقاست كمية الصوديوم (بالميللغرام) في كل علبة أو زجاجة. وكانت المشاهدات كما يلي:

	j							
8	7	6	5	4	3	2	1	i
24.5	25.0	22.3	24.5	22.0	23.8	22.6	24.4	1
9.5	12.0	11.2	9.9	10.2	10.3	12.1	10.2	2
19.4	20.0	18.3	19.6	19.0	19.8	19.4	19.2	3
16.4	18.0	17.5	17.6	18.3	16.7	18.1	17.4	4
14.8	13.4	15.0	14.9	13.1	14.1	15.0	13.4	5
20.3	21.1	18.8	20.1	20.8	20.7	20.2	21.3	6

افترض أن نموذج التحاين (17.16) مناسب.

أ - اختبر ما إذا كان متوسط كمية الصوديوم هو نفسه في كل الأنواع المباعة في المنطقة الحضرية، استخدم $\alpha = .01$. أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

ب - قدر متوسط كمية الصوديوم في كل الأنواع، استخدم 99% فترة ثقة.

(١٧-٣٣) بالرجوع إلى مسألة **كمية الصوديوم** (١٧-٣٢).

أ - قدِّر $\sigma_\mu^2/(\sigma_\mu^2+\sigma^2)$ بـ 99% فترة ثقة. فسِّر تقديرك لفترة الثقة.

ب - احصل على تقديرات نقطية لـ σ^2 و σ_μ^2.

جـ - قدر σ^2 بـ 99% فترة ثقة.

د - لقد خُمِّن أن تباين كمية الصوديوم بين الأنواع أكثر من ضعف التباين ضمن الأنواع قم باختبار مناسب لذلك مستخدما $\alpha = .01$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.

(١٧-٣٤) **آلات لف الوشائع**. يحتوي مصنع على عدد كبير من آلات لف الوشائع. وقد درس محلل إنتاج خاصية معينة للوشائع المنتجة من هذه الآلات بأن اختار أربع آلات عشوائيا ومن ثَمَّ اختار 10 وشائع عشوائيا من الإنتاج اليومي لكل من هذه الآلات. وكانت النتائج كما يلي:

	j									
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i
206	207	205	209	206	208	202	207	204	205	1
204	205	206	199	207	209	203	198	204	201	2
197	202	198	202	203	199	201	196	204	198	3
210	211	209	210	208	211	215	214	209	210	4

افترض أن نموذج التحاين (17.16) مناسب.

أ - اختبر ما إذا كان متوسط الخاصية للوشائع هو نفسه لكل الآلات في المصنع أم لا. استخدم مستوى معنوية $\alpha = .01$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

ب ـ قدر متوسط خاصية الوشيعة لكل آلات لف الوشائع في المصنع، استخدم 90% فترة ثقة.

(١٧ـ٣٥) بالرجوع إلى مسألة **آلات لف الوشائع** (١٧ـ٣٤).

أ ـ قدر $\sigma_\mu^2 / (\sigma_\mu^2 + \sigma^2)$ بـ 90% فترة ثقة. فسر تقديرك بفترة الثقة.

ب ـ قدّر σ^2 بـ 90% فترة ثقة . فسر تقديرك بفترة الثقة.

جـ ـ احصل على تقدير نقطي لـ σ_μ^2 .

د ـ اختبر ما إذا كان σ^2 و σ_μ^2 متساويين أم لا، استخدم $\alpha = .10$، اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.

تمارين

(١٧ـ٣٦) (يحتاج لحساب التفاضل) إذا علمت أن $\mu_1 = 0$، $\mu_3 = 1$ و $0 \le \mu_2 \le 1$ ، أثبت أن $\Sigma(\mu_i - \mu)^2$ يصبح أصغر ما يمكن عندما تكون $\mu_2 = .5$ ، حيث $\mu = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)/3$.

(١٧ـ٣٧) (يحتاج لحساب التفاضل). بالرجوع إلى **مسألة علاج إعادة التأهيل** (١٤ـ١٢). حجوم العينات للفئات أقل من المتوسط، متوسط وأعلى من المتوسط ستكون n و kn و n ، على الترتيب. وبافتراض أن نموذج التحاين (14.2) مناسب، أوجد القيمة المثلى لـ k التي تجعل تباينات $\hat{D}_1 = \bar{Y}_{1.} - \bar{Y}_{2.}$ و $\hat{D}_2 = \bar{Y}_{3.} - \bar{Y}_{2.}$ أصغر ما يمكن لحجم عينة كلي n_T.

(١٧ـ٣٨) أثبت أن $n_T(n_T+1)/12$ هو تباين العينة للأعداد الصحيحة المتتالية من 1 إلى n_T.

(١٧ـ٣٩) أثبت أنه يمكن كتابة إحصاءة الاختبار في (17.10) على شكل الدالة البسيطة في X_{KW}^2 في الصفحة93.

(١٧ـ٤٠) أثبت أن n' المعرفة في (17.22a) تساوي n عندما تكون $n_i \equiv n$.

(١٧ـ٤١) ما هي قيم r و n التي تجعل $\sigma^2\{\bar{Y}_{..}\}$ في (17.26) أصغر ما يمكن لحجم عينة كلي n_T ؟ أهمل أية اعتبارات للتكلفة.

(١٧ـ٤٢) استنبط حدود الثقة في (17.34) من تلك الموجودة في (17.33).

مشاريع

(١٧-٤٣) بالرجوع إلى مجموعة البيانات **SENIC** وإلى المشروع (١٤-٣٣).

أ . استخدم اختبار كروسكال ـ والاس لتحديد ما إذا كان متوسط خطورة العدوى هو نفسه في المناطق الأربع أم لا، اضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = .05$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

ب ـ هل النتيجة في الجزء (أ) هي نفسها التي حصلت عليها في المشروع (١٤-٣٣)؟ هل فرضيات نموذج التحاين (14.2) أم تلك التي ينطوي عليها اختبار كروسكال ـ والاس أكثر منطقية هنا؟

جـ ـ استخدم طريقة الاختبارات مثنى مثنى المتعددة في (17.14) لتجميع المناطق في مجموعات، استخدم مستوى معنوية عائلي $\alpha = .10$. ماهي استنتاجاتك؟

د ـ قم باختبار الرتب في الجزء (أ) باستخدام إحصاءة الاختبار F^* (17.10). هل القيمة -P لهذا الاختبار مماثلة لتلك التي حصلت عليها في اختبار كروسكال ـ والاس في الجزء (أ)؟

(١٧-٤٤) بالرجوع إلى مجموعة البيانات **SMSA** والمشروع (١٤-٣٥).

أ ـ باستخدام اختبار كروسكال ـ والاس، حدِّد ما إذا كان متوسط معدلات الجريمة هو نفسه في المناطق الأربع أم لا، اضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = .05$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

ب ـ هل النتيجة في الجزء (أ) هي نفسها التي حصلت عليها في المشروع (١٤-٣٥)؟ هل فرضيات نموذج التحاين (14.2) أم تلك التي ينطوي عليها اختبار كروسكال ـ والاس أكثر منطقية هنا؟

جـ ـ استخدم طريقة الاختبارات مثنى مثنى المتعـددة في (17.14) لتجميـع المناطق في مجموعات، استخدم مستوى معنوية عائلي $\alpha = .05$. مـا هي استنتاجاتك؟

د ـ قم باختبار الرتب في الجزء (أ) باستخدام إحصاءة الاختبـار (17.10) F^*. هل القيمة ‐P لهذا الاختبار مماثلة لتلك الـتي حصلـت عليهـا في اختبار كروسكال ـ والاس في الجزء (أ)؟

(١٧ـ٤٥) احصل على توزيع المعاينـة الدقيـق لـ X^2_{KW} عندمـا تكـون H_0 صحيحـة، وذلك للحالة $r = 2$ و $n_i = 2$ (تلميـح: مـاذا يتضمـن تسـاوي متوسـطات المعالجات فيما يتعلق بترتيبات الرتب 4, 3, 2, 1؟).

(١٧ـ٤٦) يراد دراسة ثلاثة مجتمعات، كل منها من التوزيع المنتظم بين 300 و 800.

أ ـ قم بتوليد 10 مشاهدات عشوائية من كل من التوزيعات المنتظمة الثلاثة وأحسب إحصاءة الاختبار X^2_{KW} في (17.7).

ب ـ كرر الجزء (أ) 100 مرة.

جـ ـ احسـب المتوسـط والانحـراف المعيـاري لإحصـاءات الاختبـار المائـة. كيف تقارن هذه القيم مع خواص توزيع كاي مربع المناسب؟

د ـ ما هي نسبة إحصاءات الاختبار المائة الـتي حصلـت عليهـا في الجـزء (ب) التي تقل عن 4.61؟ ما هي النسبة التي تقل عـن 9.21؟ وكيـف تتفق هذه النسب مع القيم المتوقعة نظريا؟

تحليل التباين ثنائي العامل ـ حجوم متساوية للعينات

لقد اعتبرنا في القسم III من الكتاب (وهو القسم الأول من الجزء الثاني) دراسات يتناول البحث فيها تأثير عامل واحد. أما الآن فنحن مهتمون بدراسة التأثيرات المتزامنة لعاملين أو أكثر. وفي هذا الفصل سنتابع تحليل التباين للدراسات ثنائية العامل في حالة تساوي حجوم العينات جميعها. ونستمر في الفصول ١٩، ٢٠، ٢١ مناقشتنا للدراسات ثنائية العامل بمتابعة تحليل تأثيرات العوامل، والتخطيط لحجوم العينات، وحالة عدم تساوي حجوم العينات، بالإضافة إلى عدد من المواضيع الأخرى. وفي الفصل ٢٢، سنعتبر تحليل التباين لدراسات يتناول البحث فيها ثلاثة عوامل أو أكثر. وأخيرا سنتابع في الفصل ٢٣ تحليل التغاير للدراسات العاملية.

(١٨ ـ ١) دراسات متعددة العوامل

قبل البدء في التركيز على الدراسات ثنائية العامل، سنشير إلى بعض الملاحظات العامة عن الدراسات متعددة العوامل التي تتضمن مباحث عن عاملين أو أكثر. ويمكن أن تبنى الدراسات متعددة العوامل على البيانات التجريبية أو بيانات المشاهدة مثلها في ذلك مثل الدراسات وحيدة العامل.

أمثلة على دراسات ثنائية العامل

مثال ١. بحثت شركة ما تأثيرات سعر البيع ونوع الحملة الدعائية على مبيعات أحد منتجاتها. وتمت دراسة ثلاثة مستويات للأسعار (59 سنتا، 60 سنتا، 64 سنتا)

ونوعين من أنواع الحملات الدعائية (الدعاية عن طريق الإذاعة، الدعاية عن طريق الصحف). لنعتبر سعر البيع العامل A والحملة الدعائية العامل B. وقد تمت دراسة العامل A هنا عند ثلاثة مستويات للأسعار، وعلى وجه العموم، سنستخدم الرمز a ليدل على عدد المستويات المدروسة للعامل A. كما تمت دراسة العامل B هنا عند مستويين، وسنستخدم الرمز b ليدل على عدد المستويات المدروسة للعامل B. وقد دُرست كل تركيبة سعر وحملة دعائية كما يلي:

البند	الوصف
١	السعر ٥٩، دعاية إذاعة
٢	السعر ٦٠، دعاية إذاعة
٣	السعر ٦٤، دعاية إذاعة
٤	السعر ٥٩، دعاية صحيفة
٥	السعر ٦٠، دعاية صحيفة
٦	السعر ٦٤، دعاية صحيفة

وكل تركيبة من أحد مستويات العامل A وأحد مستويات العامل B هي معالجة. ولذلك يكون لدينا إجمالاً $2 \times 3 = 6$ معالجات. وبشكل عام، فإن العدد الكلي للمعالجات الممكنة في الدراسات ثنائية العامل هو ab.

وقد اختيرت اثنتي عشرة منطقة من كامل الولايات المتحدة، وبحيث كانت على وجه التقريب، من الحجم نفسه، وبمميزات اجتماعية ــ اقتصادية متشابهة، ثم خُصصت عشوائيا إلى المعالجات بحيث أعطيت كل معالجة إلى وحدتين تجريبيتين. وكما هو الحال سابقا سنستخدم الرمز n ليدل على عدد الوحدات التي تتلقى معالجة معينة وذلك عند تساوي حجوم العينات لجميع المعالجات. فعلى سبيل المثال، في المنطقتين اللتين خُصصتا إلى المعالجة ١ ثُبّت سعر البيع عند 59 سنتا واستُخدمت الدعاية عن طريق الإذاعة، وهكذا بالنسبة لباقي المناطق في هذه الدراسة.

وتعتبر هذه دراسة تجريبية وذلك لأنه تمّ التحكم في تخصيص مستويات العامل

A والعامل B إلى الوحدات التجريبية عن طريق التخصيص العشوائي للمعالجات إلى المناطق. والتصميم الذي استخدم هنا هو التصميم تام التعشية.

مثال ٢. درست شركة للفولاذ تأثيرات محتوى الكربون ودرجة حرارة تسقية الفولاذ على قوة الفولاذ. وقد دُرس محتوى الكربون على مستوى عالٍ ومستوى منخفض (التعريفات الدقيقة لهذه المستويات ليست مهمة هنا). ودُرست درجة حرارة تسقية الفولاذ على مستوى عال ومستوى منخفض ، أيضا. وبالاجمال حدد $2 \times 2 = 4$ معالجات لهذه الدراسة:

البند	الوصف
١	مستوى كربون عال، درجة تسقية عالية
٢	مستوى كربون عال، درجة تسقية منخفضة
٣	مستوى كربون منخفض، درجة تسقية عالية
٤	مستوى كربون منخفض، درجة تسقية منخفضة

وخُصصت هذه المعالجات الأربع إلى 12 دفعة من الانتاج بطريقة عشوائية بحيث خُصصت كل معالجة إلى ثلاث دفعات.

ومرة أخرى فإن هذه دراسة تجريبية لأنه تّم التحكم في محتوى الكربون ودرجة الحرارة عن طريق تخصيص المعالجات عشوائيا إلى دفعات الانتاج. والتصميم الذي استُخدم هنا هو، أيضا، التصميم تام التعشية.

مثال ٣. درس محلل ما تأثيرات دخل العائلة (أقل من $10,000، $10,000 - $29,000، $30,000 - $49,999، $50,000 أو أكثر) والمرحلة في دورة حياة العائلة (المراحل ١، ٢، ٣، ٤) على شراء الأجهزة المنزلية. وهنا تم تحديد $16 = 4 \times 4$ معالجة. وجزء من هذه المعالجات هو:

المعالجة	الوصف
١	دخل تحت 1000، ومرحلة ١
٢	دخل تحت 10,000 ومرحلة ٢
.	.
.	.
.	.
١٦	دخل 50,000 فما فوق، مرحلة ٤

وقد اختار المحلل 20 عائلة بمواصفات الدخل ومرحلة دورة الحياة للعائلة، وذلك لكل صنف من "المعالجات" في هذه الدراسة، مما نتج عنه 320عائلة لمجمل الدراسة.

هذه دراسة مشاهدة لأنه تم الحصول على البيانات بدون تخصيص الدخل ومرحلة دورة الحياة إلى العائلات. وبالأحرى، تم اختيار العائلات نظرا لأن لديهم المميزات المحددة.

تعليقات

١ـ عند دراستنا للدراسات وحيدة العامل، لم نضع أية قيود على طبيعة المستويات r للعامل تحت الدراسة. وبشكل رسمي، يمكن اعتبار الـ ab من المعالجات في دراسة ثنائية العامل على أنها r من مستويات العامل في دراسة وحيدة العامل ويمكن بالتالي تحليلها وفقا للطرق التي نوقشت في القسم III. والسبب وراء الحاجة لطرق جديدة للتحليل ، هو أننا نرغب في تحليل الـ ab من المعالجات بطرق خاصة تلحظ وجود عاملين في الدراسة وتمكّننا من الحصول على معلومات عن تأثيرات كل من هذين العاملين ، بالإضافة إلى أي تأثيرات خاصة مشتركة فيما بينها.

٢ـ عند استخدام تصميم تام التعشية في دراسة متعددة العوامل، يتم تخصيص المعالجات عشوائيا إلى الوحدات التجريبية بالطرق التي شُرحت في الفصل ٢.وحالما تُعرّف المعالجات بدلالة مستويات العامل للعوامل المختلفة في الدراسة لا تبرز أية مشاكل جديدة.

دراسات عاملية كسرية وتامة

جميع الأمثلة التي ذكرت آنفا هي دراسات عاملية تامة، وذلك لأن كل التراكيب

الممكنة لمستويات العامل ولجميع العوامل قد ضُمِّنتْ في الدراسة. وفي بعض الأحيان لايكون ممكنا أو مرغوبا تضمين كل التراكيب الممكنة من مستويات العامل لجميع العوامل في الدراسة. إفترض، على سبيل المثال، أن شركة الفولاذ التي ذكرت في المثال ٢، رغبت في أن تدرس ست درجات حرارة وخمس مستويات من محتوى الكربون وأربع طرق لتبريد الفولاذ. وعندئذٍ ستحتوى دراسة عاملية تامة على $4 \times 5 \times 6 = 120$ معالجة. ولكن يمكن أن يكون لمثل هذه الدراسة تكلفة عالية واستهلاك كبير للوقت. وتحت ظروف كهذه، يمكن تصميم دراسة عاملية كسرية تحتوي، فقط، على جزء من تراكيب مستويات العوامل المئة والعشرون، والتي لاتزال ستزودنا عن تأثيرات كل عامل على حدة، بالإضافة إلى أي تأثيرات مشتركة مهمة لهذه العوامل.

وقد خُصصت المباحث متعددة العوامل في القسم IV بالكلية للدراسات العاملية التامة.

فوائد الدراسات متعددة العوامل

الفعّالية. إن الدراسات متعددة العوامل أكثر فعالية من أسلوب التجريب التقليدي الذي يتعامل مع عامل واحد في كل مرة مبقيا كل الشروط الأخرى ثابتة. وبالرجوع إلى مثال ١، فإن الأسلوب التقليدي لدراسة تأثير الحملة الدعائية كان سيُبْقي السعر ثابتا عند مستوى معين ويغير، فقط، الحملة الدعائية. وأحد المشاكل المهمة في هذا الأسلوب هو عملية اختيار مستوى السعر الذي سيبقى ثابتا. وسيكون هذا الاختيار أصعب عندما لايكون المرء متأكدا بأن تأثير الحملة الدعائية هو نفسه عند مستويات الأسعار المختلفة. وبالرغم من أن الوسيلة التقليدية تكرّس كل الامكانات لدراسة تأثير عامل واحد، فقط، إلا أنها لاتعطي أي معلومات إضافية دقيقة عن ذلك العامل أكثر مما تعطيه تجربة متعددة العوامل من الحجم نفسه. وبالرجوع مرة أخرى إلى مثال١، افترض أنه يراد استخدام 12 منطقة في دراسة تقليدية بحيث تُخصَّص ست مناطق للدعاية عن طريق الإذاعة والست الأخرى للدعاية عن طريق الصحف مع تثبيت السعر عند المستوى 59 سنتا. وفي الدراسة التقليدية هذه

ستبنى المقارنة بين نوعي الحملات الدعائية على عينتين في كل منهما ست مناطق. وهذا بالفعل ماسيحدث في الدراسة ثنائية العامل في المثال ١، حيث أن كل حملة دعائية تظهر في ثلاث معالجات وخُصص لكل معالجة منطقتان.

كمية المعلومات. تقدم الدراسة التقليدية كمّا أقل من المعلومات من ذاك الذي تقدمه الدراسة ثنائية العامل. وفي توضيحاتنا السابقة، على وجه التحديد، فإنها لاتزودنا بأي معلومات عن تأثير السعر ولا عن أية تأثيرات مشتركة للسعر، والحملة الدعائية. وأي معلومات عن تأثيرات السعر ستتطلب تجربة تقليدية إضافية بحيث يتم تثبيت الحملة الدعائية عند مستوى معين مع تغيير السعر. وهكذا، فإن الأسلوب التقليدي يحتاج لعينة أكبر ليزودنا بمعلومات عن تأثيرات كل من السعر والحملة الدعائية، ومالم يتم توسيع الدراسة التقليدية أكثر فأكثر، فإنها لن تزودنا بأي معلومات كاملة عن أية تأثيرات مشتركة خاصة للعاملين. وتسمى هذه التأثيرات المشتركة الخاصة بالتفاعلات. لقد تطرقنا لتأثيرات التفاعل في نماذج الانحدار وسنناقشها في مجال نماذج تحليل التباين في الفقرة التالية. ويكفي أن نشير هنا إلى أن تأثيرات التفاعل يمكن أن تكون مهمة للغاية. فعلى سبيل المثال، قد لايكون تأثير السعر كبيرا عندما تكون الحملة الدعائية عن طريق الصحف، ولكنه كبير عند الدعاية عن طريق الإذاعة. ويمكن تحرّي تأثيرات التفاعل من دراسات عاملية.

مشروعية النتائج. بالإضافة إلى كون الدراسات متعددة العوامل أكثر فعالية وتزودنا بمعلومات جاهزة عن تأثيرات التفاعلات إلا أنه بإمكانها، أيضا ، أن تعزّز مشروعية النتائج. افترض في المثال ١، أن الإدارة كانت مهتمة بالدرجة الأولى في بحث تأثير الأسعار على المبيعات. فلو أن الحملة الدعائية التي اسُتخدمت كانت عن طريق الصحف، فقط، فستكون هناك شكوك فيما إذا كان تأثير السعر يختلف باختلاف طرق الحملة الدعائية، ومع شمول الدراسة لنوع الحملة الدعائية كعامل آخر، يمكن للإدارة الحصول على معلومات عن استمرار تأثير السعر مع وسائل دعائية مختلفة وذلك دون زيادة عدد الوحدات التجريبية في الدراسة. وبالتالي ، فإنه يمكن للدراسات

متعددة العوامل أن تتضمن بعض العوامل ذات الأهمية الثانوية كي تسمح باستقراءات عن العوامل الرئيسة بمدى أوسع من المشروعية.

تعليقات

١ ـ تسمح التحليلات متعددة العوامل في الدراسات المبنيّة على بيانات المشاهدة، بالإضافة لتلك المبنية على بيانات تجريبية بتقويم مباشر لتاثيرات التفاعل، كما توفر كذلك في عدد المشاهدات المطلوبة في التحليل.

٢ ـ ينبغي ألا تقود الفوائد التي ذكرناها آنفا إلى الاعتقاد بأنه كلما زاد عدد العوامل في الدراسة كلما كان هذا أفضل. فالتجارب التي تحوي العديد من العوامل وكل منها بعدد كبير من المستويات تصبح معقدة ومكلفة ومستهلكة للوقت. وفي الغالب يكون الاستراتيج الأفضل للبحث، هو البدء بعوامل قليلة، ودراسة تأثيراتها ومن ثم توسيع البحث وفقا لأحدث ماتم الحصول عليه من نتائج. وبهذه الطريقة يمكن تكريس الإمكانات المتوفرة بصورة رئيسة إلى أفضل السبل الواعدة في البحث، وبذلك يمكن الحصول على فهم أفضل لمهام العوامل.

(١٨ ـ ٢) معنى عناصر النموذج

قبيل تقديم عبارة رسمية لنموذج تحليل التباين في الدراسات ذات العاملين، سنطور عناصر النموذج ونناقش معانيها. ولن يكون هذا مساعدا على فهم نموذج تحاين فحسب، بل سيزودنابصيرة عن الكيفية التي يجب أن تمضي وفقا لها الدراسات ذات العاملين. وسنفترض عبر هذه الفقرة أن جميع متوسطات المجتمعات معلومة وأن لها الأهمية نفسها، وذلك عند الحاجة لحساب معدلات هذه المتوسطات.

توضيح

لتوضيح معنى عناصر النموذج، سنعتبر دراسة بسيطة ذات عاملين، حيث يهمنا هنا معرفة تأثيرات الجنس والعمر على تعلّم مهمة ما. وللتبسيط، فقد تم تعريف عامل العمر على ثلاثة مستويات (شاب ـ كهل ـ شيخ) وذلك كما هو موضح في الجدول (١٨-١)أ.

متوسطات المعالجات

نرمز لمتوسط الاستجابة لأي معالجة في دراسة ذات عاملين بـ μ_{ij}، حيث يشير i إلى مستوى العامل A $(i = 1,...,a)$ ، ويشير j إلى مستوى العامل B $(j = 1,...,b)$. ويحوي الجدول (١٨-١)أ على المتوسطات الحقيقية للمعالجات μ_{ij} لمثال التعلم. لاحظ على سبيل المثال، أن $\mu_{11} = 9$ مما يدل على أن متوسط زمن التعلم للذكور الشباب هو تسع دقائق. وبشكل مشابه، نرى أن $\mu_{22} = 11$ مما يعني أن متوسط زمن التعلم للإناث في سن الكهولة هو 11 دقيقة.

جدول (١٨ - ١) تأثير العمر ولكن دون تأثير الجنس، ودون تفاعلات - مثال التعلم

أ - متوسط أزمنة التعلم (بالدقائق)

	العامل B العمر			
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	
العامل A الجنس	شاب	كهل	شيخ	متوسط الصف
$i = 1$ ذكر	$9(\mu_{11})$	$11(\mu_{12})$	$16(\mu_{13})$	$12(\mu_{1.})$
$i = 2$ أنثى	$9(\mu_{21})$	$11(\mu_{22})$	$16(\mu_{23})$	$12(\mu_{2.})$
متوسط العمود	$9(\mu_{.1})$	$11(\mu_{.2})$	$16(\mu_{.3})$	$12(\mu_{..})$

ب - التأثيرات الأساسية للجنس (بالدقائق)

$\alpha_1 = \mu_{1.} - \mu_{..} = 12 - 12 = 0$

$\alpha_2 = \mu_{2.} - \mu_{..} = 12 - 12 = 0$

جـ - التأثيرات الأساسية للعمر (بالدقائق)

$\beta_1 = \mu_{.1} - \mu_{..} = 9 - 12 = -3$

$\beta_2 = \mu_{.2} - \mu_{..} = 11 - 12 = -1$

$\beta_3 = \mu_{.3} - \mu_{..} = 16 - 12 = 4$

ملاحظة

يعتمد تفسير متوسط المعالجة μ_{ij} على كون الدراسة دراسة مشاهدة أو كونها تجريبية. ففي دراسة المشاهدة، يدل متوسط المعالجة μ_{ij} على متوسط المجتمع للعناصر التي تملك مميزات المستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B. فعلى سبيل المثال، نجد في مثال التعلم ان متوسط المعالجة μ_{11} هو متوسط زمن التعلم لمجتمع الذكور الشباب.

ويدل متوسط المعالجة μ_{ij} في الدراسات التجريبية على متوسط الاستجابة الذي كان يمكن الحصول عليه لو انه تم تطبيق المعالجة المؤلفة من المستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B على جميع الوحدات في مجتمع الوحدات التجريبية الذي نريد إستقراء النتائج منه. فعلى سبيل المثال، في دراسة حيث العامل A هو نوع البرنامج التدريبي (منظم، منظم جزئيا، غير منظم) والعامل B هو وقت التدريب (أثناء العمل، بعد العمل)، وتم اختيار $6n$ من المستخدمين وخُصص n منهم عشوائيا لكل معالجة من المعالجات الست، ويمثل المتوسط μ_{ij} متوسط الاستجابة، وليكن متوسط الزيادة في الانتاجية لو أن برنامج التدريب i المطبق خلال الوقت j أُعطي لكل المستخدمين في مجتمع الوحدات التجريبية.

متوسطات مستويات العوامل

تشير متوسطات المعالجات في الجدول (١٨-١)أ في مثال التعلم إلى أن متوسطات أزمنة التعلم للرجال وللنساء هي نفسها لكل من مجموعتي العمر. ومن جهة أخرى، فإن متوسط زمن التعلم يزيد مع العمر لكل جنس. ولذلك فإنه ليس للجنس أي تأثير على متوسط زمن التعلم، بينما يوجد هناك تأثير للعمر. ويمكن، أيضا، رؤية ذلك سريعا من متوسطات الصفوف ومتوسطات الأعمدة المبينة في الجدول (١٨-١)أ، والتي تروي القصة كاملة. وحيث متوسطات الصفوف هي متوسطات مستويات عامل الجنس، ومتوسطات الأعمدة هي متوسطات مستويات عامل العمر. ويرمز لمتوسط العمود الأول بـ $\mu_{.1}$ ، وهو متوسط القيمتين μ_{11} و μ_{12} وبصورة عامة، يرمز لمتوسط العمود jبـ $\mu_{.j}$:

$$\mu_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \mu_{ij}}{a} \quad (18.1)$$

ولمتوسط الصف i بالرمز $\mu_{i.}$:

$$\mu_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{b} \mu_{ij}}{b} \quad (18.2)$$

ويرمز لمتوسط زمن التعلم الكلي لكل الأعمار ولكلا الجنسين بالرمز $\mu_{..}$ ويُعرَّف بالطرق المتكافئة التالية:

$$\mu_{..} = \frac{\sum_i \sum_j \mu_{ij}}{ab} \tag{18.3a}$$

$$\mu_{..} = \frac{\sum_i \mu_{i.}}{a} \tag{18.3b}$$

$$\mu_{..} = \frac{\sum_j \mu_{.j}}{b} \tag{18.3c}$$

التأثيرات الرئيسة

تأثيرات العمر الرئيسة. لتلخيص تأثيرات العمر الرئيسة، سنعتبر الفروق بين متوسط كل مستوى عامل والمتوسط الكلي. وعلى سبيل المثال، فإن التأثير الرئيس للأشخاص الشباب في الجدول (١٨ـ١)أ هو الفرق بين $\mu_{.1}$، متوسط زمن التعلم للأشخاص الشباب، و $\mu_{..}$، المتوسط الكلي. وقد رمزنا للفرق بـ β_1:

$$\beta_1 = \mu_{.1} - \mu_{..} = 9 - 12 = -3$$

ويدعى β_1 التأثير الرئيس للعامل B في مستواه الأول. ويوضح الجدول (١٨ـ١)جـ هذا التأثير بالإضافة إلى التأثيرات الرئيسة الأخرى للعامل B.

تأثيرات الجنس الرئيسة. تُعرَّف تأثيرات الجنس الرئيسة بطريقة مماثلة وقد رمزنا له بالرمز α_i، ولذلك لدينا:

$$\alpha_1 = \mu_{1.} - \mu_{..} = 12 - 12 = 0$$

ويدعى α_1 التأثير الرئيس للعامل A في مستواه الأول، ويوضح الجدول (١٨ـ١)ب تأثيرات العمر الرئيسة، وكلاهما صفر، مما يدل على أن الجنس لايؤثر على متوسط زمن التعلم.

تعاريف عامة. نعرف على وجه العموم، التأثير الرئيس للعامل A عند المستوى i كما يلي:

$$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu_{..} \tag{18.4}$$

وبشكل مشابه، فإن التأثير الرئيس للعامل B عند المستوى j يُعرف كما يلي:

$$\beta_j = \mu_{.j} - \mu_{..} \tag{18.5}$$

ويتبع من (18.3b) ومن (18.3c) أن:

$$\sum_i \alpha_i = 0 \qquad \sum_j \beta_j = 0 \qquad (18.6)$$

وهكذا، فإن مجموع التأثيرات الرئيسة لكل مستوى عامل هو الصفر.

تأثيرات العامل التجميعية

إن لتأثيرات العامل في الجدول (١٨-١) خاصية مفيدة، إذ يمكن الحصول على كل متوسط استجابة μ_{ij} بجمع تأثيرات الجنس والعمر الرئيسة إلى المتوسط الكلي $\mu_{..}$ فعلى سبيل المثال لدينا:

$$\mu_{11} = \mu_{..} + \alpha_1 + \beta_1 = 12 + 0 + (-3) = 9$$
$$\mu_{23} = \mu_{..} + \alpha_2 + \beta_3 = 12 + 0 + 14 = 16$$

وبشكل عام، لدينا من جدول (١٨-١)أ:

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j \qquad \text{تأثيرات تجميعية للعوامل} \qquad (18.7)$$

ويمكن إعادة كتابتها، بشكل مكافئ ، من تعريفات α_i في (18.4) و β_j في (18.5)، كالتالي:

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j \qquad \text{تأثيرات العامل التجميعية} \qquad (18.7a)$$

ويمكن، أيضا، تبيان أنه يمكن كتابة كل متوسط معالجة μ_{ij} في الجدول (١٨-١)أ بدلالة ثلاثة متوسطات معالجات:

$$\mu_{ij} = \mu_{ij'} + \mu_{i'j} - \mu_{i'j'} \qquad \text{تأثيرات العامل التجميعية} \qquad (18.7b)$$
$$i \neq i', \; j \neq j'$$

وعلى سبيل المثال لدينا:

$$\mu_{11} = \mu_{12} + \mu_{21} - \mu_{22} = 11 + 9 - 11 = 9$$

أو:

$$\mu_{11} = \mu_{13} + \mu_{21} - \mu_{23} = 16 + 9 - 16 = 9$$

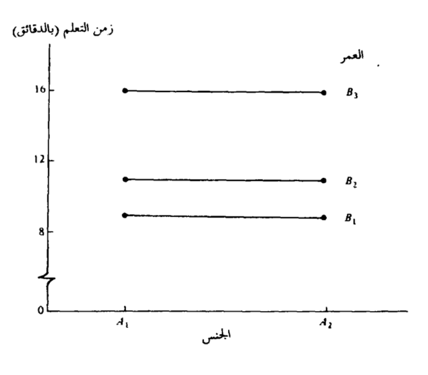
وعند إمكانية كتابة كل متوسطات المعالجات على الشكل (18.7)، (18.7a) أو (18.7b)، عندها نقول إن العوامل لاتتفاعل، أو إنه لايوجد تفاعلات عوامل، أو إن تأثيرات العوامل تجميعية. وتكمن أهمية عدم وجود تفاعلات عوامل في أنه يمكن وصف تأثيرات العاملين كل على حدة وذلك بتحليل متوسطات مستويات العوامل أو

التأثيرات الرئيسة للعوامل. وهكذا، ففي مثال التعلّم في الجدول (١٨ــ١)أ يشير متوسطا الجنس إلى أنه ليس للجنس أي تأثير بصرف النظر عن العمر، وإلى أن متوسطات العمر الثلاثة تصف تأثير العمر بصرف النظر عن الجنس. وبذلك يكون تحليل تأثيرات العوامل بسيط للغاية عندما لايكون هناك تفاعل بين العوامل.

التمثيل البياني

يقدم الشكل (١٨-١) متوسط أزمنة التعلم في الجدول (١٨ــ١)أ بشكل بياني. ويمثل المحور X مستويات عامل الجنس (ونرمز لها بـ A_1 و A_2)، بينما يمثل المحور Y زمن التعلم. ورُسِمَتْ منحنيات منفردة لكل مستوى من مستويات عامل العمر (ونرمز لها بـ B_1 و B_2 و B_3). ويدل الميل صفر لكل منحنى على أنه ليس للجنس أي تأثير. وتوضح الفروق بين ارتفاعات المنحنيات تأثيرات العمر على زمن التعلم.

شكل (١٨-١) يوجد تأثير للعمر ولكن لايوجد تأثير للجنس، مع عدم وجود تفاعلات ـ مثال التعلم



وفي العادة يتم توصيل النقاط لكل منحنى بخطوط مستقيمة على الرغم من أن المتغير على المحور X (الجنس في مثالنا) ليس متغيرا متصلا. وعندما يكون المتغير على المحور X متغيرا نوعيا، فإن ميل المنحنيات لن يكون له معنى فيما عدا إذا كان الميل يساوي الصفر مما سيدل على أنه لايوجد تأثيرات لمستويات العوامل. وعندما يكون واحد أو اثنان من المتغيرات متغيرا كميا ، فإنه ينصح عادة بوضعه على المحور X.

مثال آخر مع تأثيرات تجميعية للعوامل

يحوي الجدول (١٨-٢) توضيحا آخر لتأثيرات عوامل لاتتفاعل، وذلك لمثال الجنس - العمر السابق نفسه، والوضع هنا يختلف عن ذاك في الجدول (١٨-١)أ بحيث لايؤثر العمر وحده في زمن التعلم بل ، أيضا، الجنس. ويتضح هذا من حقيقة أن متوسط أزمنة التعلم يختلف بالنسبة للرجال والنساء في أي مجموعة للعمر.

وكما هو الحال في الجدول (١٨-١)أ ، فإن كل متوسط استجابة في الجدول (١٨-٢) يمكن تفكيكه وفقا لـ (18.7):

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$$

فعلى سبيل المثال:

$$\mu_{11} = \mu_{..} + \alpha_1 + \beta_1 = 12 + 12 + (-3) = 11$$

ولذلك، فإن العاملين لايتفاعلان ويمكن بالتالي تحليل تأثيرات العوامل كل على حدة، وذلك بفحص متوسطات مستويات العوامل $\mu_{i.}$ و $\mu_{.j}$ على الترتيب.

ويقدم الشكل (١٨-٢) البيانات في الجدول (١٨-٢)أ بشكل بياني. وفي هذه المرة فقد وضعنا العمر على المحور X واستخدمنا منحنيات مختلفة لكل جنس. ولاحظ أن الفرق في ارتفاعات المنحنيين يعكس الفرق بين الجنسين وأن الحيدان عن الوضع الأفقي لكل من المنحنيين تعكس تأثير العمر.

عبارات متكافئة لتأثيرات العوامل التجميعية

لقد ذكرنا أنه لايتفاعل عاملان عندما يكون ممكنا كتابة كل متوسطات المعالجات μ_{ij} وفقا للشكل (18.7)، أو (18.7a) أو (18.7b). وهناك العديد من الطرق الأخرى للتعرف على ما إذا كان عاملان لايتفاعلان. وهي مايلي:

١ ـ الفرق بين متوسطي استجابة لأي مستويين من مستويات العامل B يبقى نفسه لكل مستويات العامل A. (ولذلك في الجدول (١٨ـ٢)أ، الانتقال من سن الشباب إلى سن الكهولة يؤدي إلى زيادة دقيقتين لكل من الذكور والاناث، والانتقال من سن الكهولة إلى سن الشيخوخة يؤدي إلى زيادة ٥ دقاق لكل من الذكور والإناث). لاحظ أنه ليس من الضروري أن تكون الفروق، لنقُل، بين المستويين ١و ٢ والمستويين ٢ و ٣ للعامل B هي نفسها. ويمكن أن تختلف هذه بالطبع، ويعتمد ذلك على طبيعة تأثير العامل B.

٢ ـ الفرق بين متوسط الاستجابات لأي مستويين للعامل A هو نفسه لكل مستويات العامل B. (ولذلك في الجدول (١٨ـ٢)أ، الانتقال من الذكور إلى الاناث يؤدي إلى نقص بأربع دقائق لكل مستويات العمر الثلاثة).

٣ ـ منحنيات متوسطات الاستجابة للمستويات المختلفة لأي عامل متوازية (مثلاً منحنيي الجنس في الشكل ١٨ـ٢).

وكل هذه الشروط متكافئة وتعني بأن العاملين لايتفاعلان.

جدول (١٨ـ٢) تأثيرات العمر والجنس، مع عدم وجود تفاعلات ـ مثال التعلم

(أ) متوسط أزمنة التعلم (بالدقائق)

	العامل B العمر			
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	
العامل A الجنس	شاب	كهل	شيخ	متوسط الصف
$i=1$ ذكر	$11(\mu_{11})$	$13(\mu_{12})$	$18(\mu_{13})$	$14(\mu_{1.})$
$i=2$ أنثى	$7(\mu_{21})$	$9(\mu_{22})$	$14(\mu_{23})$	$10(\mu_{2.})$
متوسط العمود	$9(\mu_{.1})$	$11(\mu_{.2})$	$16(\mu_{.3})$	$12(\mu_{..})$

ب ـ التأثيرات الأساسية للجنس (بالدقائق)

$\alpha_1 = \mu_{1.} - \mu_{..} = 14 - 12 = 2$

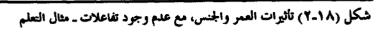
$\alpha_2 = \mu_{2.} - \mu_{..} = 10 - 12 = -2$

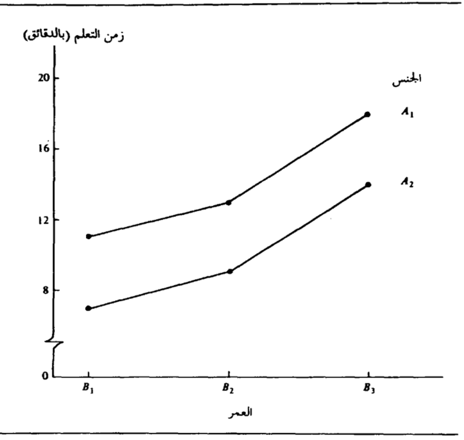
جـ ـ التأثيرات الأساسية للعمر (بالدقائق)

$\beta_1 = \mu_{.1} - \mu_{..} = 9 - 12 = -3$

$\beta_2 = \mu_{.2} - \mu_{..} = 11 - 12 = -1$

$\beta_3 = \mu_{.3} - \mu_{..} = 16 - 12 = 4$


شكل (١٨-٢) تأثيرات العمر والجنس، مع عدم وجود تفاعلات ـ مثال التعلم



تأثيرات عوامل متفاعلة

يحوي الجدول (١٨-٣)أ تمثيلا لمثال التعلم بحيث تتفاعل تاثيرات العوامل. وتشير متوسطات أزمنة التعلم لكل تراكيب الجنس ـ العمر في الجدول (١٨-٣)أ إلى أنه ليس للجنس تأثير على زمن التعلم في الأشخاص الشباب، بينما يكون له تأثير جوهري بالنسبة للأشخاص كبار السن. ويدل هذا التأثير المختلف للجنس، والذي يعتمد على عمر الشخص، على أن عوامل العمر والجنس تتفاعل في تأثيرها على زمن التعلم.

جدول (١٨-٣) تأثيرات العمر والجنس، مع وجود التفاعلات - مثال التعلم

(أ) متوسط أزمنة التعلم (بالدقائق)

العامل A الجنس	العامل B العمر $j=1$ شاب	$j=2$ كهل	$j=3$ شيخ	متوسط الصف	التأثير الرئيس للجنس
$i=1$ ذكر	$9(\mu_{11})$	$12(\mu_{12})$	$18(\mu_{13})$	$13(\mu_{1.})$	$1(\alpha_1)$
$i=2$ أنثى	$9(\mu_{21})$	$10(\mu_{22})$	$14(\mu_{23})$	$11(\mu_{2.})$	$-1(\alpha_2)$
متوسط العمود	$9(\mu_{.1})$	$11(\mu_{.2})$	$16(\mu_{.3})$	$12(\mu_{..})$	
التأثير الرئيس للعمر	$-3(\beta_1)$	$-1(\beta_2)$	$4(\beta_3)$		

(ب) التفاعلات (بالدقائق)

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	متوسط الصف
i = 1	-1	0	1	0
i = 2	1	0	-1	0
متوسط العمود	0	0	0	0

تعريف التفاعل. يمكننا دراسة وجود تأثيرات عوامل متفاعلة بشكل رسمي عن طريق فحص ما إذا كان يمكن كتابة جميع متوسطات المعالجات وفقا لـ (18.7) أم لا:

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$$

فإذا كان ذلك ممكنا، فإن تأثيرات العامل تجميعية، وإلا تكون تأثيرات العامل متفاعلة. ولمثال التعلم في الجدول (١٨-٣)أ، فإن التأثيرات الرئيسة للعوامل موضحة في هوامش الجدول. ومن الواضح أن العوامل تتفاعل. فعلى سبيل المثال:

$$\mu_{..} + \alpha_1 + \beta_1 = 12 + 1 + (-3) = 10$$

بينما $\mu_{11} = 9$. فلو كان العاملان تجميعيين، لكانت هاتان القيمتان متساويتين.

والفرق بين متوسط المعالجة μ_{ij} والقيمة $\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$ الذي يمكن توقعه لو كان العاملان تجميعيين يسمى تأثير التفاعل أو بشكل أبسط التفاعل، بين المستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B، ويرمز له بالرمز $(\alpha\beta)_{ij}$. ولذلك، فإننا نعرف $(\alpha\beta)_{ij}$ كما يلي:

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j) \qquad (18.8)$$

وبتعويض قيم α_i و β_j وفقاً لتعريفهما في (18.4) و (18.5)، على الترتيب، نحصل على تعريف بديل هو:

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j) \qquad (18.8a)$$

وباستخدام (18.7b) نحصل على تعريف بديل آخر:

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{ij'} - \mu_{i'j} + \mu_{i'j'} \qquad (18.8b)$$

وللإعادة، فإن التفاعل بين المستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B والذي يرمز له بالرمز $(\alpha\beta)_{ij}$، هو ببساطة الفرق بين μ_{ij} والقيمة التي نتوقعها لو أن العوامل كانت تجميعية. وإذا كان العاملان تجميعين، فإن جميع التفاعلات ستكون، في الحقيقة مساوية للصفر، أي أن $(\alpha\beta)_{ij} = 0$.

ويوضح الجدول (١٨-٣)ب التفاعلات لمثال التعلم في الجدول (١٨-٣)أ فعلى سبيل المثال لدينا:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)_{13} &= \mu_{13} - (\mu_{..} + \alpha_1 + \beta_3)\\ &= 18 - (12 + 1 + 4)\\ &= 1\end{aligned}$$

التعرّف على التفاعلات. يمكننا التعرف على وجود التفاعلات من عدمها بأحد الطرق المتكافئة التالية:

١ - بفحص ما إذا كان بالإمكان كتابة كل الـ μ_{ij} على صيغة المجاميع $\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$.

٢ - بفحص ما إذا كان الفرق بين متوسطات الاستجابة لأي متسويين من العامل B هو نفسه لكل مستويات العامل A. (لاحظ في الجدول (١٨-٣)أ أن متوسط زمن التعلم يزيد عند الانتقال من الأشخاص الشباب إلى الأشخاص الكهول بثلاث دقائق للرجال، ولكن بدقيقة للنساء).

٣ - بفحص ما إذا كان الفرق بين متوسطات الاستجابة لأي مستويين من العامل A هو نفسه لكل مستويات العامل B. (لاحظ في الجدول (١٨-٣)أ بأنه لايوجد فرق بين الجنسين للأشخاص الشباب، ولكن يوجد فرق بأربع دقائق للأشخاص الشيوخ...).

٤ ـ بفحص ما إذا كانت منحنيات متوسط المعالجة لمستويات العامل المختلفة في رسم ما متوازية. (يقدم الشكل (١٨ـ٣) متوسطات المعالجات في الجدول (١٨ـ٣)أ مع وضع العمر على المحور X. لاحظ أن منحنيات متوسط المعالجة للجنسين غير متوازية).

تعليقات

١ ـ لاحظ من الجدول (١٨ـ٣)ب أن بعض التفاعلات تساوي الصفر بالرغم من أن العاملين يتفاعلان، ويجب أن تكون جميع التفاعلات تساوي الصفر كي يكون العاملان تجميعيين.

٢ ـ يوضح الجدول (١٨ـ٣)ب أن مجموع التفاعلات يساوي الصفر عند جمعها إما فوق الصفوف أو فوق الأعمدة:

$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad j = 1,\ldots,b \tag{18.9a}$$

$$\sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad j = 1,\ldots,a \tag{18.9b}$$

وبالتالي، فإن مجموع كل التفاعلات يساوي الصفر، أيضا:

$$\sum_i \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0 \tag{18.9c}$$

ونوضح هذا بالنسبة لـ (18.9a):

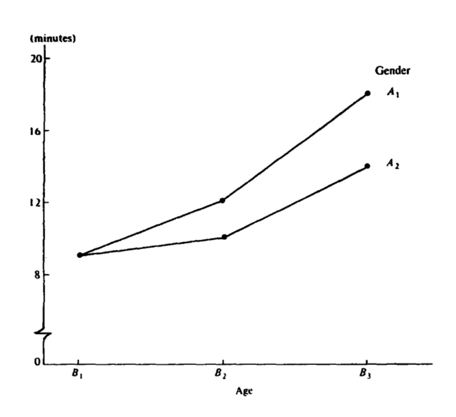
$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_{i=1}^{a} (\mu_{ij} - \mu_{..} - \alpha_i - \beta_i)$$

$$= \sum_i \mu_{ij} - a\mu_{..} - \sum_i \alpha_i - a\beta_i$$

والآن $\sum \mu_{ij} = a\mu_{.j}$ وذلك من (18.1)، و $\sum \alpha_i = 0$ من (18.6) وأخيرا $\beta_j = \mu_{.j} - \mu_{..}$ من (18.5) وبالتالي نجد:

$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = a\mu_{.j} - a\mu_{..} - a(\mu_{.j} - \mu_{..}) = 0$$

شكل (١٨-٣) تأثيرات العمر والجنس، مع التفاعلات المهمة - مثال التعلم



التفاعلات المهمة وغير المهمة

عندما يتفاعل عاملان، فالسؤال الذي يبرز هو هل تُعتبر متوسطات مستويات العامل مقاييس ذات معنى. فعلى سبيل المثال، في الجدول (١٨-٣)أ يمكن مناقشة كون متوسطات مستويات عامل الجنس 11 و 13 مقاييس مضللة. فهما يدلان على وجود فرق في زمن التعلم بين النساء والرجال، ولكن هذا الفرق ليس كبيرا جدا. ولكن متوسطات مستويات العامل هذه تُخفي حقيقة أنه لايوجد فرق في متوسط زمن التعلم بين الجنسين للأشخاص الشباب، ولكن يوجد فرق كبير نوعا ما للأشخاص الشيوخ. ولذلك، قد تعتبر التفاعلات في الجدول (١٨-٣)أ تفاعلات مهمة، مما يعني ضمنا أنه يجب عدم مناقشة تأثيرات كل عامل على حدة بدلالة متوسطات مستويات العامل.

ويقدم رسم، كالرسم في الشكل (١٨-٣)، بفعالية، وصفاً لطبيعة التأثيرات المتفاعلة للعاملين.

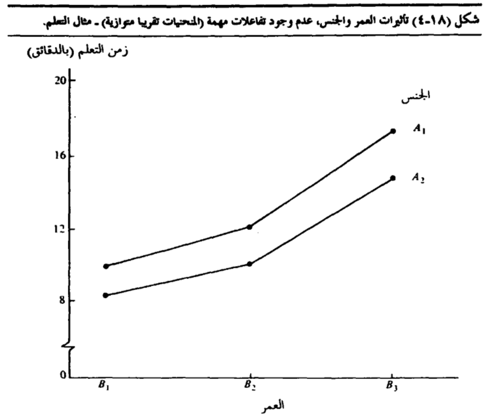
وفي بعض الأحيان، عندما يتفاعل عاملان، فإن تأثيرات التفاعل تكون صغيرة جدا بحيث يمكن اعتبارها تفاعلات غير مهمة، ويقدم الجدول (١٨-٤) والشكل (١٨-٤) مثالاً لهذه الحالة. ولاحظ من الشكل (١٨-٤) أن المنحنيات متوازية تقريبا. ونعلم أن المنحنيات المتوازية تماما تدل على عدم وجود تفاعلات. ويمكن للمرء، لأغراض عملية، أن يقول إن متوسط زمن التعلم للنساء هو أقل بدقيقتين من زمن التعلم للرجال، وإن هذه العبارة صحيحة تقريبا لكل مجموعات العمر. أو بشكل آخر، أن العبارات المبنية على متوسط زمن التعلم لفئات العمر المختلفة ستكون تقريبا صحيحة لكلا الجنسين.

وهكذا، فإنه في حالة التفاعلات غير المهمة، فإن تحليل تاثيرات العامل يمكن أن يتم كما في حالة عدم وجود تفاعل. ويمكن دراسة كل عامل على انفراد، بناءً على متوسطات مستويات العامل $\mu_{i.}$ و $\mu_{.j}$ على الترتيب. وبالطبع، فإن هذا التحليل المنفرد لتأثيرات العامل أبسط بكثير من التحليل المشترك للعاملين بناءً على متوسطات المعالجات μ_{ij}، وهو التحليل المطلوب عندما تكون التفاعلات مهمة.

جدول (١٨-٤) تأثيرات العمر والجنس مع عدم وجود تفاعلات مهمة ـ مثال التعلم

	العامل B العمر			
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	
العامل A الجنس	شاب	كهل	شيخ	متوسط الصف
$i=1$ ذكر	9.75	12.00	17.25	13.0
$i=2$ أنثى	8.25	10.00	14.75	11.0
متوسط العمود	9.0	11.0	16.0	12.0

شكل (٤-١٨) تأثيرات العمر والجنس، عدم وجود تفاعلات مهمة (المنحنيات تقريبا متوازية) ـ مثال التعلم.



تعليقات

١ ـ إن تحديد ما إذا كانت التفاعلات مهمة أم غير مهمة هو في بعض الأحيان صعب. وهذا القرار ليس قرارا إحصائيا ويجب أن يقوم به مختص في ميدان موضوع البحث. والفائدة من التفاعلات غير المهمة (أو عدم وجود تفاعلات)، (بمعنى أنه يمكن عندئذٍ تحليل تأثيرات العوامل على انفراد)، تكون فائدة كبيرة بشكل خاص عندما تتضمن الدراسة أكثر من عاملين.

٢ ـ أحيانا يكون اعتبار تأثيرات كل عامل بدلالة متوسطات مستويات العامل ذا معنى حتى عند وجود تفاعلات مهمة. فعلى سبيل المثال، استُخدمت طريقتان لتدريس الرياضيات في الكلية (مجردة وتقليدية) لطلاب ذوي كفاءات كمية ممتازة وجيدة ومقبولة. وقد وجدت تفاعلات مهمة بين طريقة التدريس وقدرة الطالب

الكمية، فالطلاب ذوو المقدرة الكمية الممتازة اتجهوا لإحراز نتائج جيدة في طريقتي التدريس كلتيهما، بينما اتجه الطلاب ذوو المقدرة الكمية الجيدة أو المقبولة إلى إحراز نتائج أفضل عند تدريسهم بالطريقة التقليدية. ولو تمّ تدريس أعداد متساوية من الطلاب ذوو الكفاءات الكمية المقبولة والجيدة والممتازة في كل من الطريقتين التدريسيتين، فالطريقة، عندئذٍ، التي تعطي أفضل متوسط في النتيجة لجميع الطلاب يمكن أن تكون مفيدة لنا حتى عند وجود تفاعلات مهمة. وستكون مقارنة متوسطات مستويات عامل طريقة التدريس ذات أهمية حتى عند وجود تفاعلات مهمة.

تفاعلات قابلة للتحويل وتفاعلات غير قابلة للتحويل

عند وجود تفاعلات مهمة، فإنها في بعض الأحيان تكون نتيجة لقياس المتغير التابع على سلم قياس غير ملائم. اعتبر، على سبيل المثال، حالة أن التأثيرات الرئيسة للعامل تفعل بصورة جدائية، وليست تجميعية كما في (18.7):

$$\mu_{ij} = \mu_{..}\alpha_i\beta_j \qquad (18.10)$$

تأثيرات عوامل من طبيعة جدائية

فلو افترضنا في هذه الحالة أن تأثيرات العوامل تجميعية، فسنجد أن الشرط (18.7) لا يتحقق، وبالتالي توجد تفاعلات. ولكن يمكن إزالة هذه التفاعلات بتطبيق التحويل اللوغاريتمي على (18.10):

$$\log \mu_{ij} = \log \mu_{..} + \log \alpha_i + \log \beta_j \qquad (18.11)$$

ويمكن إعادة كتابة هذه النتيجة بشكل مكافئ كما يلي:

$$\mu'_{ij} = \mu'_{..} + \alpha'_i + \beta'_j \qquad (18.11a)$$

حيث:

$$\mu'_{ij} = \log \mu_{ij}$$
$$\mu'_{..} = \log \mu_{..}$$
$$\alpha'_i = \log \alpha_i$$
$$\beta'_j = \log \beta_j$$

وتقترح النتيجة في (18.11a) بأن سُلّمْ القياس للمتغير التابع y يمكن ألاّ يكون

الأكثر ملاءمة، بمعنى أن يؤدي إلى نتائج سهلة الفهم. ولكن استخدام $Y' = \log Y$ لمتغير الاستجابة ربما كان أفضل، إذ أنه يجعل النموذج (18.7) أكثر ملاءمة.

ونقول عن التفاعلات التي تعود إلى وجود تأثيرات عوامل جدائية إنها تفاعلات قابلة للتحويل، ذلك لأن تحويلا بسيطا لـ Y سيزيل معظم تأثيرات التفاعل وبالتالي يجعلها تفاعلات غير مهمة.

ويظهر مثال آخر للتفاعلات القابلة للتحويل عندما يكون تأثير كل تفاعل مساويا لحاصل ضرب دوال في التاثيرات الرئيسة:

$$\mu_{ij} = \alpha_i + \beta_j + 2\sqrt{\alpha_i}\sqrt{\beta_j} \qquad (18.12)$$ تفاعلات جدائية

وشكل مكافئ لـ (18.12) هو:

$$\mu_{ij} = \left(\sqrt{\alpha_i} + \sqrt{\beta_j}\right) \qquad (18.12a)$$

فلو طبقنا الآن تحويل الجذر التربيعي، فسنحصل على نموذج التأثيرات التجميعية:

$$\mu'_{ij} = \alpha'_i + \beta'_j \qquad (18.13)$$

حيث:

$$\mu'_{ij} = \sqrt{\mu_{ij}}$$
$$\alpha'_i = \sqrt{\alpha_i}$$
$$\beta'_j = \sqrt{\beta_j}$$

وبعض التحويلات البسيطة التي يمكن أن تساعد في جعل التفاعلات المهمة غير مهمة هي تحويلات التربيع، الجذر التربيعي، اللوغاريتمي والمقلوب. وعندما لايمكن إزالة التفاعلات بشكل كبير بتحويل بسيط فإنها تسمى تفاعلات غير قابلة للتحويل. ويحوي الجدول (١٨-٥)أ مثالاً على تفاعلات مهمة قابلة للتحويل. وعند تطبيق تحويل الجذر التربيعي على هذه المتوسطات، فإن متوسطات المعالجات الناتجة في الجدول (١٨- ٥)ب لاتبين أي تأثيرات متفاعلة. وبالطبع فإنه لايمكن أن نتوقع عادة أن يزيل تحويل بسيط لسلّم القياس كل التفاعلات كما في الجدول (١٨-٥)، ولكن مانتوقعه هو أن تصبح التفاعلات غير مهمة بعد التحويل.

تفسير التفاعلات

يمكن أن تكون عملية تفسير التفاعلات صعبة للغاية عندما تكون التأثيرات المتفاعلة معقدة. ولكن توجد مناسبات عديدة، على أية حال، يكون للتفاعلات فيها بنية بسيطة، كما هو الحال في الجدول (١٨-٣)أ بحيث يمكن وصف التأثيرات المشتركة للعوامل بطريقة مباشرة وسهلة.

جدول (١٨-٥) توضيح لتفاعل قابل للتحويل

(أ) متوسطات المعالجات (سلّم القياس الأصلي)	العامل ب		(ب) متوسطات المعالجات بعد تحويل الجذر التربيعي	العامل ب	
العامل أ	$j=1$	$j=2$	العامل أ	$j=1$	$j=2$
$i=1$	16	64	$i=1$	4	8
$i=2$	49	121	$i=2$	7	11
$i=3$	64	144	$i=3$	8	12

ويعطى الجدول (١٨-٦) أمثلة إضافية عديدة. ولدينا في الجدول (١٨-٦)أ أحد الحالات بحيث أنه إما زيادة الراتب أو زيادة الصلاحيات للمسؤولين ذوي الرواتب المنخفضة والمسؤوليات المحدودة تؤدي إلى زيادة الإنتاجية. ولكن ضم كل من زيادة الراتب والصلاحيات لايؤدي إلى أي زيادات إضافية في الإنتاج أكثر من تلك التي يعطيها زيادة أحدهما، فقط. ويوضح الجدول (١٨-٦)ب حالة تتطلب زيادة كل من الراتب والصلاحيات قبل الحصول على زيادة جوهرية في الإنتاجية. ويمثل الشكل (١٨-٦)جـ ، حالة لايتفاعل فيها حجم الطاقم وشخصية رئيس الطاقم مع الإنتاجية على أساس الشخص الواحد، وذلك عندما يكون حجم الطاقم 6، 8 أو 10 أشخاص.

جدول (١٨-٦) أمثلة على أنواع مختلفة من التفاعلات

أ - إنتاجية المسؤولين التنفيذيين

العامل A (الراتب)	المسؤولية (العامل B)	
	صغير	كبير
منخفض	50	76
عالي	53	75

ب - إنتاجية المسؤولين التنفيذيين

العامل A (الراتب)	العامل B (المسؤولية)	
	صغير	كبير
منخفض	50	52
عالي	53	75

جـ - الانتاجية على اساس الشخص الواحد في طاقم

العامل A (حجم الطاقم)	العامل B (شخصية رئيس الطاقم)	
	صغير	كبير
٤ أشخاص	28	20
٦ أشخاص	22	20
٨ أشخاص	20	18
١٠ أشخاص	17	15

ملاحظة

يمكن أن يتفاعل عاملان، ولكن في الوقت نفسه، فإن التأثيرات الرئيسة لأحدهما (أو كليهما) تساوي الصفر، وسيكون هذا بسبب تفاعلات في اتجاهات متعاكسة تصل إلى حالة توازن فوق أحد (أو كلي) العاملين. وهكذا، ستكون هناك تأثيرات مؤكدة للعوامل، ولكنها لاتنجلي عن طريق متوسطات مستويات العوامل. ولحسن الحظ، فإن حالة وجود تأثيرات متفاعلة مع عدم تأثيرات رئيسة لأحد (أو كلي) العاملين هي حالة غير اعتيادية. والحالة التقليدية هي أن تكون تأثيرات التفاعل أصغر من التأثيرات الرئيسة.

(١٨-٣) نموذج I للدراسات ثنائية العامل (مستويات مثبتة للعوامل)

بعد أن شرحنا عناصر النموذج، فإننا الآن مستعدون لتطوير نموذج تحاين I بمستويات مثبتة للعوامل في دراسات ثنائية العامل، وذلك عندما تكون جميع حجوم العينات للمعالجات متساوية، ويكون لجميع متوسطات المعالجات الأهمية نفسها. ونموذج التحاين هذا قابل للتطبيق في دراسات المشاهدة وفي الدراسات التجريبية المبنية على التصميم تام العشوائية. وسنعتبر في القسم V نماذج التحاين لتصميمات تجريبية أخرى.

الوضع الأساسي هو كمايلي: يُدرس العامل A عند a من المستويات، وهذه المستويات مهمة لنا بحد ذاتها، أو بمعنى آخر، لا تُعتبر هذه المستويات عينة من مجتمع أكبر من مستويات A. وبشكل مشابه، يُدرس العامل B عند b من المستويات المهمة بحد ذاتها. وتشمل الدراسة كل الـ ab من تراكيب مستويات العاملين، وعدد المشاهدات لكل من الـ ab من المعالجات هو نفسه، ونرمز له بالرمز n ومن الضروري أن يكون $n > 1$. ولذلك فإن العدد الكلي من المشاهدات في الدراسة هو:

$$n_T = abn \tag{18.14}$$

ونرمز للمشاهدة رقم $(k = 1,...,n)$ الخاصة بالمعالجة التي يكون فيها العامل A عند المستوى i والعامل B عند المستوى j بالرمز $Y_{ijk}(i = 1,...,a; j = 1,...,b)$. ويوضح الجدول (١٨-٧) في الصفحة هذا الترميز لمثال يكون فيه A عند ثلاثة مستويات، B عند مستويين مع أخذ تكرارين لكل معالجة.

وسنعرض نموذج التحاين المثبت للدراسات ثنائية العامل في شكلين متكافئين ــ شكل متوسطات الخلايا، وشكل تأثيرات العامل ــ وفيما بعد سنستخدم أحد الشكلين أو الآخر وفقا لما تمليه السهولة.

نموذج متوسطات الخلايا

عندما ننظر للـ ab من المعالجات دون اعتبار للبنية العاملية للدراسة، فإننا نعبر عن نموذج تحليل التباين بدلالة متوسطات الخلايا μ_{ij} (وتعتبر هنا متوسطات معالجات):

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad (18.15)$$

حيث:

μ_{ij} معالم

ε_{ij} مستقلة تتبع $N(0, \sigma^2)$

$i = 1,...,a; j = 1,...,b ; k = 1,...,n$

سمات مهمة للنموذج

١ - المعلمة μ_{ij} هي متوسط الاستجابة للمعالجة التي يكون فيها العامل A عند المستوى i والعامل B عند المستوى j. وهذا يتبع لأن $E\{\varepsilon_{ijk}\} = 0$:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{ij} \qquad (18.16)$$

٢ - بما أن μ_{ij} عدد ثابت، فإن تباين Y_{ijk} هو:

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma^2\{\varepsilon_{ijk}\} = \sigma^2 \qquad (18.17)$$

٣ - بما أن حدود الخطأ ε_{ijk} مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي فإن المشاهدات Y_{ijk} تكون كذلك، أيضا. ولذلك فإننا نستطيع، أيضا، كتابة نموذج التحاين (18.15) كما يلي:

$$Y_{ij} \text{ مستقلة وتتبع } N(\mu_{ij}, \sigma^2) \qquad (18.18)$$

٤ - نموذج التحاين (18.15) هو نموذج خطي لأنه يمكن التعبير عنه بالشكل $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$. اعتبر دراسة ذات عاملين، لكل منهما مستويان، أي أن $a = b = 2$، ولكل معالجة محاولتان (أي أن $n = 2$). فعندئذٍ تعرف $\mathbf{Y}, \mathbf{X}$, $\boldsymbol{\beta}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}$ كما يلي:

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}Y_{111}\\Y_{112}\\Y_{121}\\Y_{122}\\Y_{211}\\Y_{212}\\Y_{221}\\Y_{222}\end{bmatrix}\quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\mu_{11}\\\mu_{12}\\\mu_{21}\\\mu_{22}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{111}\\\varepsilon_{112}\\\varepsilon_{121}\\\varepsilon_{122}\\\varepsilon_{211}\\\varepsilon_{212}\\\varepsilon_{221}\\\varepsilon_{222}\end{bmatrix} \qquad (18.19)$$

تذكّر أن المتجه $\mathbf{E}\{\mathbf{Y}\}$ الذي يتألف مـن العنـاصر $E\{Y_{ijk}\}$، يسـاوي $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ وفقـا لـ (7.18a). وبالتالي يكون هذا المتجه هنا:

$$\mathbf{E}\{\mathbf{Y}\}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{11}\\\mu_{12}\\\mu_{21}\\\mu_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu_{11}\\\mu_{11}\\\mu_{12}\\\mu_{12}\\\mu_{21}\\\mu_{21}\\\mu_{22}\\\mu_{22}\end{bmatrix} \qquad (18.20)$$

وهكذا فإن $E\{Y_{ijk}\} = \mu_{ij}$ ، كما يجب أن يكون وفقاً لـ (18.16) وعندها يكون التمثيل المصفوفي الملائم لنموذج تحاين ثنائي العامل (18.15) هو:

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}Y_{111}\\Y_{112}\\Y_{121}\\Y_{122}\\Y_{211}\\Y_{212}\\Y_{221}\\Y_{222}\end{bmatrix}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\mu_{11}\\\mu_{11}\\\mu_{12}\\\mu_{12}\\\mu_{21}\\\mu_{21}\\\mu_{22}\\\mu_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{111}\\\varepsilon_{112}\\\varepsilon_{121}\\\varepsilon_{122}\\\varepsilon_{211}\\\varepsilon_{212}\\\varepsilon_{221}\\\varepsilon_{222}\end{bmatrix} \qquad (18.21)$$

٥ ـ يشابه نموذج التحـاين (18.15) نمـوذج التحـاين (14.2) فيمـا عـدا الدليلـين الملحقين اللذين نحتاجهما الآن لتعريف المعالجة. إن الطبيعية، واستقلال حـدود الخطـأ

وثبات تباينات حدود الخطأ جميعها خواص لحدود الخطأ في نماذج التحاين لكل من الدراسات وحيدة العامل والدراسات ثنائية العامل.

نموذج تأثيرات العوامل

يمكن الحصول على نسخة مكافئة لنموذج متوسطات الخلايا (18.15) بالاستفادة من تعبير مطابق لمتوسطات المعالجات μ_{ij} بدلالة تأثيرات العوامل بناءً على تعريف التفاعل في (18.8):

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j)$$

وبإعادة ترتيب الحدود، نحصل على المتطابقة:

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \tag{18.22}$$

حيث:

$$\mu_{..} = \frac{\sum_i \sum_j \mu_{ij}}{ab}$$

$$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu_{..}$$

$$\beta_j = \mu_{.j} - \mu_{..}$$

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..}$$

ويدل هذا التشكيل على أنه يمكن النظر إلى متوسطات الخلايا μ_{ij} لأي معالجة كمجموع أربع مركبات من تأثيرات العوامل، وتنص (18.22)، على وجه التحديد أن متوسط الاستجابة للمعالجة التي يكون فيها العامل A عند المستوى i والعامل B عند المستوى j هو مجموع:

١ - ثابت إجمالي $\mu_{..}$.

٢ - التأثير الرئيس α_i للعامل A عند المستوى i.

٣ - التأثير الرئيس β_j للعامل B عند المستوى j.

٤ - تأثير التفاعل $(\alpha\beta)_{ij}$ عندما يكون العامل A عند المستوى i والعامل B عند المستوى j.

وبتعويض μ_{ij} في نموذج التحاين (18.15) بالعبارة المكافئة لها في (18.22)، نحصل على نموذج تحاين تأثيرات العامل المكافئ للدراسات ثنائية العامل:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \tag{18.23}$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت.

a_i ثوابت خاضعة للقيد $\sum \alpha_i = 0$

β_j ثوابت خاضعة للقيد $\sum \beta_j = 0$

$(\alpha\beta)_{ij}$ ثوابت خاضعة للقيود

$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \qquad \sum_j (\alpha\beta)_{ij}$$

$$j = 1,\dots,b \qquad i = 1,\dots, a$$

ε_{ijk} مستقلة وتتبع $N(0,\sigma^2)$

$i = 1,\dots,a$ و $j = 1,\dots,b$ و $k = 1,\dots,n$

سمات مهمة للنموذج

١ ـ يوافق نموذج التحاين (18.23) نموذج التحـاين للتأثـيرات المثبتـة (14.60) في الدراسة وحيدة العامل فيما عدا أنه يتم استبدال مجمـوع يتكـون مـن تأثـير العـامل A، تأثير العامل B، وتأثير تفاعل بتأثير المعالجة وحيدة العامل.

٢ ـ خواص المشاهدات Y_{ijk} لنموذج تحاين (18.23) هي نفسـها خـواص نمـوذج متوسطات الخلايا المكافئ (18.15) وبما أن $E\{\varepsilon_{ijk}\} = 0$، فلدينا:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \mu_{ij} \qquad (18.24)$$

وتتبع المساواة الثانية من المتطابقة (18.22). وإضافة إلى ذلك، لدينا:

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma^2 \qquad (18.25)$$

ذلك لأن حد الخطأ ε_{ijk} في الجزء الأيمن من (18.23) هو الحد العشـوائي الوحيـد وكذلك $\sigma^2\{\varepsilon_{ijk}\} = \sigma^2$ ، وأخيرا، فـإن Y_{ijk} متغـيرات عشـوائية مسـتقلة وتتبـع التوزيـع الطبيعي لأن حدود الخطأ متغيرات عشوائية مستقلة وتتبـع التوزيـع الطبيعـي. وبالتـالي يمكننا، أيضا، كتابة نموذج التحاين (18.23) كما يلي:

$$(18.26) \qquad Y_{ijk} \text{ مستقلة وتتبع } N[\mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}\ ,\ \sigma^2]$$

٣ ـ نموذج التحاين (18.23) هو نمـوذج خطي، ذلـك لأنـه يمكـن كتابتـه على الشكل $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$.

وسنوضح هذا بشكل صريح في الفقرة ١٨-٨.

(١٨-٤) تحليل التباين

توضيح

يحتوي الجدول (١٨-٧) على توضيح سنستخدمه في كل من هذا الفصل والفصل الذي يليه. تزوّد شركة كاسل للمعجنات عددا كبيرا من الأسواق المركزية في مساحة حضرية واسعة بخبز إيطالي مغلّف. وقامت بدراسة تجريبية عن تأثير ارتفاع رفوف العرض (سفلي - أوسط - علوي) واتساعها (عادي - متسع) على مبيعات هذا الخبز (تقاس بعدد العلب) خلال الفترة التجريبية.

وتمّ استخدام اثني عشر سوقا مركزيا لهذه الدراسة، تتشابه في حجوم المبيعات وعدد الزبائن، وخصص سوقان مركزيان بشكل عشوائي لكل من المعالجات الست وفقا لتصميم تام العشوائية، وتم عرض الخبز في كل محل وفقا لمواصفات المعالجة في ذلك المحل. ورُصدت مبيعات الخبز وقدمت هذه النتائج في الجدول (١٨-٧).

ترميز

يوضح الجدول (١٨-٧) الترميز الذي سنستخدمه للدراسات ثنائية العامل. فهو امتداد مباشر لترميز الدراسات وحيدة العامل. ويرمز لمشاهدة ما بالرمز Y_{ijk}. وتحدد الرموز i و j مستويات العاملين A، B، على الترتيب، ويعود الرمز k لأي مشاهدة أو محاولة لمعالجة معينة (أي لتركيبة من مستويات العاملين).

وتشير النقطة كبديل عن دليل ملحق على التجميع أو حساب المتوسط فوق المتغير الممثل بذلك الدليل. فعلى سبيل المثال، مجموع المشاهدات للمعالجة التي توافق المستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B هو:

$$Y_{ij.} = \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \tag{18.27a}$$

ومتوسط هذه المشاهدات هو:

$$\overline{Y}_{ij.} = \frac{Y_{ij.}}{n} \tag{18.27b}$$

الجدول (١٨-٧) بيانات عينة ورموز لدراسة ذات عاملين - مثال مخبز كامل

العامل A (ارتفاع رف العرض) i	العامل B (اتساع رف العرض) j B_1 عادي	B_2 عريض	مجموع الصف	المتوسط لعامل ارتفاع رف العرض
A_1 (الأسفل)	$47(Y_{111})$	$46(Y_{121})$		
	$43(Y_{112})$	$40(Y_{122})$		
المجموع	$90(Y_{11.})$	$86(Y_{12.})$	$176(Y_{1..})$	
المتوسط	$45(\bar{Y}_{11.})$	$43(\bar{Y}_{12.})$		$44(\bar{Y}_{1..})$
A_2 (الوسط)	$62(Y_{211})$	$67(Y_{221})$		
	$68(Y_{212})$	$71(Y_{222})$		
المجموع	$130(Y_{21.})$	$138(Y_{22.})$	$268(Y_{2..})$	
المتوسط	$65(\bar{Y}_{21.})$	$69(\bar{Y}_{22.})$		$67(\bar{Y}_{2..})$
A_3 (القمة)	$41(Y_{311})$	$42(Y_{321})$		
	$39(Y_{312})$	$46(Y_{322})$		
المجموع	$80(Y_{31.})$	$88(Y_{32.})$	$168(Y_{3..})$	
المتوسط	$40(\bar{Y}_{31.})$	$44(\bar{Y}_{32.})$		$42(\bar{Y}_{3..})$
مجموع العمود	$300(Y_{.1.})$	$312(Y_{.2.})$	$612(Y_{...})$	
المتوسط لعامل اتساع رف العرض	$50(\bar{Y}_{.1.})$	$52(\bar{Y}_{.2.})$		$51(\bar{Y}_{...})$

ومجموع كل المشاهدات عند المستوى i للعامل A هو:

$$Y_{i..} = \sum_{i}^{b} \sum_{k}^{n} Y_{ijk} \quad (18.27c)$$

والمتوسط المقابل له هو:

$$\bar{Y}_{i..} = \frac{Y_{i..}}{bn} \quad (18.27d)$$

وبشكل مشابه، يُرمز لمجموع كل المشاهدات عند المستوى j للعامل B ولمتوسطها

بالرمزين:

$$Y_{.j.} = \sum_{i}^{a} \sum_{k}^{n} Y_{ijk} \quad (18.27e)$$

$$\overline{Y}_{.j.} = \frac{Y_{.j.}}{an} \quad (18.27f)$$

وأخيراً يُرمز لمجموع كل المشاهدات في الدراسة بالرمز:

$$Y_{...} = \sum_{i}^{a} \sum_{j}^{b} \sum_{k}^{n} Y_{ijk} \quad (18.27g)$$

والمتوسط الكلي هو:

$$\overline{Y}_{...} = \frac{Y_{...}}{anb} \quad (18.27h)$$

توفيق نموذج تحاين

نموذج متوسطات الخلايا (18.15) سنقوم بتوفيق نموذج تحاين متوسطات الخلايا ثنائي العامل (18.15) بطريقة المربعات الدنيا. ومقياس المربعات الدنيا هنا هو:

$$Q = \sum_{i} \sum_{j} \sum_{k} (Y_{ijk} - \mu_{ij})^2 \quad (18.28)$$

وعندما نجعل Q أصغر مايمكن، نحصل على تقديرات المربعات الدنيا:

$$\hat{\mu}_{ij} = \overline{Y}_{ij.} \quad (18.29)$$

وهكذا فإن القيم التوفيقية هي متوسطات المعالجات المقدَّرة:

$$\hat{Y}_{ijk} = \hat{\mu}_{ij} = \overline{Y}_{ij.} \quad (18.30)$$

وكما هو معتاد، فإن الرواسب تعرَّف بالفرق بين القيم المشاهدة والقيم التوفيقية:

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} = Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.} \quad (18.31)$$

وكما كانت في النماذج الإحصائية الأخرى، فإن الرواسب مفيدة للغاية في تقويم مصداقية نموذج التحاين ثنائي العامل (18.15).

نموذج تأثيرات العوامل (18.23) بالنسبة للنموذج المكافئ، وهو نموذج تأثيرات العوامل (18.23)، فإننا نجعل مقياس المربعات الدنيا التالي أصغر ما يمكن:

$$Q = \sum_{i} \sum_{j} \sum_{k} \left[Y_{ijk} - \mu_{..} - \alpha_i - \beta_j - (\alpha\beta)_{ij} \right]^2 \quad (18.32)$$

خاضعا للقيود التالية:

$$\sum_i \alpha_i = 0 \quad \sum_j \beta_j = 0 \quad \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

وعندما نقوم بهذه العملية، نحصل على تقديرات المربعات الدنيا للمعالم التالية:

التقدير ـ المعلمة

المقدّر	المعلمة	
$\hat{\mu}_{..} = \hat{Y}_{...}$	$\mu_{..}$	(18.33a)
$\hat{\alpha}_i = \hat{Y}_{i..} - \hat{Y}_{...}$	$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu_{..}$	(18.33b)
$\hat{\beta}_j = \overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...}$	$\beta_j = \mu_{.j} - \mu_{..}$	(18.33c)
$\left(\widehat{\alpha\beta}\right)_{ij} = \overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...}$	$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..}$	(18.33d)

ويتضح بشكل جلي التقابل بين مقـدرات المربعـات الدنيـا وتعـاريف المعـالم. إن القيم التوفيقية والرواسب في نموذج تأثيرات العوامل (18.23) هي نفسـها تمامـا كتلـك التي حصلنا عليها في نموذج متوسطات الخلايـا (18.15). وعلـى وجـه التحديـد، فـإن القيم التوفيقية لنموذج التحاين (18.23) هي:

$$\begin{aligned} Y_{ijk} &= \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\widehat{\alpha\beta})_{ij} \qquad (18.34) \\ &= \overline{Y}_{...} + (\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}) + (\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...}) + (\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...}) \\ &= \overline{Y}_{ij.} \end{aligned}$$

ومرة أخرى تكون الرواسب كالتالي:

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.} \qquad (18.35)$$

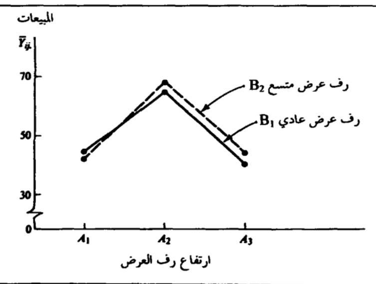
ملاحظة

تقديرات المربعات الدنيا في (18.29) و (18.33) هي نفسـها الـتي حصلنـا عليهـا بطريقة الامكانية العظمى.

مثال. في مثال شركة كاسل للمعجنات، القيم التوفيقية هي المتوسـطات المقـدرة للمعالجات $\overline{Y}_{ij}$ الموضحة في الجدول (١٨-٧). ويوضح الشـكل (١٨ـ٥) تمثيـلا بيانيـا

لهذه المتوسطات المقدَّرة للمعالجات. ونرى من هذا الشكل أن متوسط المبيعات للرفوف ذات الارتفاع المتوسط أعلى بشكل جوهري من متوسط المبيعات لمستويي ارتفاع الرفوف الآخرين أي العادي والمتسع.ولايبدو أن لاتساع الرفوف أي تأثير كبير على الإطلاق. وفي الواقع، قد لايوجد أي تأثير لاتساع الرفوف، إذ يكون التغير بين المتوسطات المقدَّرة للمعالجات، لأي ارتفاع للرفوف، من طبيعة عشوائية. وفي هذه الحالة، لن يكون هناك أي تفاعلات بين ارتفاع رفوف العرض وبين اتساعها. ويختلف الشكل (١٨-٥) عن الأشكال السابقة التي توضح تأثيرات العوامل، ذلك لأن الأشكال السابقة قدمت متوسطات المعالجات الفعلية μ_{ij}، بينما يوضح الشكل (١٨-٥) تقديرات العينة. ولذلك، فإننا نحتاج لاختبار ما إذا كانت التأثيرات الموضحة في الشكل (١٨-٥) تأثيرات فعلية أم أنها تمثل تغيرات عشوائية، فقط. ولإجراء مثل هذه الاختبارات، نحتاج إلى تفكيك مجموع المربعات الكلي، وهذا ماسنناقشه في الفقرة التالية.

الشكل (١٨-٥) رسم للمتوسطات المقدَّرة للمعالجات - مثال شركة كاسل للمعجنات



تفكيك مجموع المربعات الكلي

تفكيك الانحراف الكلي. سنفكك انحراف مشاهدة ما Y_{ijk} عن المتوسط الكلي $\bar{Y}_{...}$ على مرحلتين. في البداية سنحصل على تفكيك للانحراف الكلي $Y_{ijk} - \bar{Y}_{...}$

وذلك باعتبار الدراسة تتكون من ab من المعالجات:

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{...} = \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...} + Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.} \quad (18.36)$$

الانحراف حول المتوسط المقدّر للمعالجات	انحراف المتوسط المقدَّر للمعالجات حول المتوسط الكلي	الانحراف الكلي

ولاحظ أن الانحراف حول المتوسط المقدر للمعالجات هو ببساطة الراسب e_{ijk}:

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.}$$

وسنفكك بعد ذلك انحراف المتوسط المقـدر للمعالجـات $\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...}$ بدلالـة مركبـات تعكس التأثير الرئيس للعامل A، التأثير الرئيس للعامل B والتفاعل AB:

$$\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...} = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...} + \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...} + \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} \bar{Y}_{...} \quad (18.37)$$

تأثير التفاعل AB	التأثير الرئيس للعامل B	التأثير الرئيس للعامل A	إنحراف المتوسط المقدر للمعالجات حول المتوسط الكلي

مجموع مربعات المعالجات والخطأ. عندما نربع (18.36) ونقـوم بـالتجميع فـوق كل المشاهدات، فإن الحد الجدائي يتلاشى ونحصل على:

$$SSTO = SSTR + SSE \quad (18.38)$$

حيث:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...}) \quad (18.38a)$$

$$SSTR = n \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...})^2 \quad (18.38b)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2 = \sum_i \sum_j \sum_k e_{ijk}^2 \quad (18.38c)$$

ويعكس $SSTR$ التشتت بين الـ ab من المتوسطات المقـدَّرة للمعالجـات، وهـو في الوقـت نفسـه مجمـوع مربعـات المعالجـات الاعتيـادي، ويعكـس SSE التشـتت ضمـن المعالجات وهو مجموع مربعات الخطأ الاعتيادي. والفرق الوحيـد بـين هـذه المعـادلات وتلك في الحالة وحيدة العامل هو استخدام الرمزين i وj لتسمية المعالجة.

مثال. يحوي الجدول (١٨-٨) تفكيك لمجموع المربعات الكلي (18.38) لمثال شركة كاسل للمعجنات. وهذا هو جدول التحاين الاعتيادي عند معاملة الدراسة كدراسة وحيدة العامل بـ $ab = r = 6$ معالجات. ونحصل على مجموع المربعات كما يلي:

$$SSTO = (47-51)^2 + (43-51)^2 + (46-51)^2 + \ldots + (46-51)^2 = 1{,}642$$
$$SSTR = 2[(45-51)^2 + (43-51)^2 + (65+51)^2 + \ldots + (44-51)^2] = 1{,}580$$
$$SSE = (47-45)^2 + (43-45)^2 + (46-43)^2 + \ldots + (46-44)^2 = 62$$

جدول (١٨-٨) جدول تحاين مع إهمال التركيب العاملي - مثال شركة كاسل للمخابز

مصدر التغير	SS	df	MS
ما بين المعالجات	1,580	5	316
الخطأ	62	6	10.3
المجموع	1,642	11	

وعند هذه النقطة، يمكن للمرء أن يختبر باستخدام إحصاءة الاختبار (14.53) ما إذا كانت متوسطات المعالجات الستة متساوية أم لا. وإذا كانت كذلك، فإنه ليس لأي من العاملين أي تأثير. وعلى أية حال، فإنه لاتجري عادة أية اختبارات لتأثيرات العوامل حتى يتم إجراء تفكيك إضافي لمجموع مربعات المعالجات وذلك ليعكس الطبيعة العاملية للدراسة.

تفكيك مجموع مربعات المعالجات. عندما نربع (18.37) ونقوم بالجمع فوق كل المعالجات وفوق كل المشاهدات المرتبطة بمتوسط المعالجات المقدّر $\bar{Y}_{ij.}$ ، فإن جميع الحدود الجدائية تتلاشى ونحصل على:

$$SSTR = SSA + SSB + SSAB \qquad (18.39)$$

حيث:

$$SSA = nb\sum_i(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) \qquad (18.39a)$$

$$SSB = na\sum_j(\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}) \qquad (18.39b)$$

$$SSAB = n\sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}) \qquad (18.39c)$$

ويسمى SSA بمجموع مربعات العامل A، وهو يقيس تشتت متوسطات مستويات العامل A المقدَّرة $\bar{Y}_{i..}$ فكلما كانت أكثر تشتتا، كلما كبر SSA. وبشكل مشابه، يسمى SSB بمجموع مربعات العامل B، وهو يقيس تشتت متوسطات مستويات العامل B المقدرة $\bar{Y}_{.j.}$. وأخيرا، يسمى $SSAB$ بمجموع مربعات التفاعل AB، وهو يقيس تشتت التفاعلات المقدرة $(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})$ للـ ab من المعالجات. تذكّر أن متوسط كل التفاعلات المقدرة هو الصفر، وبالتالي لاتظهر انحرافات التفاعلات المقدَّرة حول متوسطها بشكل صريح كما كانت الحالة في SSA و SSB. وكلما كبرت التفاعلات المقدَّرة (مع إهمال الاشارة)، كلما كبرت قيمة $SSAB$.

يسمى تفكيك $SSTR$ إلى المركبات SSA، SSB و $SSAB$ بالتفكيك المتعامد. والتفكيك المتعامد هو التفكيك الذي يكون مجموع المركبات فيه يساوي مجموع المربعات الكلي (وهو هنا $SSTR$)، وكذلك الحال بالنسبة لدرجات الحرية. وهكذا، فإن تفكيك $SSTO$ إلى $SSTR$ و SSE للدراسات وحيدة العامل وثنائية العامل هو، أيضا، تفكيك متعامد. وبينما توجد عدة تفكيكات متعامدة هنا، إلا أن التفكيك الذي يعطي المركبات SSA و SSB و $SSAB$ هو تفكيك مهم بالنسبة لنا، ذلك لأن هذه المركبات الثلاث، وكما سنرى قريبا، تزودنا بمعلومات عن التأثيرات الرئيسة للعامل A، التاثيرات الرئيسة للعامل B، والتفاعلات AB ، على الترتيب.

صيغ حسابية. لأغراض الحسابات باليد، نستخدم، عادة، المعادلات التالية والتي تكون متطابقة جبريا مع المعادلات التعريفية التي أعطيت سابقا:

ونحصل عادة على مجموع مربعات التفاعل كباق:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{nab}^2}{nab} \qquad (18.40a)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}}{n} \qquad (18.40b)$$

$$SSA = \frac{\sum_i Y_{.j.}^2}{nb} - \frac{Y_{...}^2}{nab} \qquad (18.40c)$$

$$SSB = \frac{\sum_j Y_{.j.}^2}{na} - \frac{Y_{...}^2}{nab} \qquad (18.40d)$$

ونحصل عادة على مجموع مربعات التفاعل كباق:

$$SSAB = SSTO - SSE - SSA - SSB \qquad (18.40e)$$

أو من:

$$SSAB = SSTR - SSA - SSB \qquad (18.40f)$$

حيث:

$$SSTR = \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{n} - \frac{Y_{...}^2}{nab} \qquad (18.40g)$$

مثال: لمثال شركة كاسل للمعجنات، نحصل على التفكيك التالي لـ SSTR باستخدام البيانات في الجدول (١٨-٧)، والمعادلات الحسابية في (18.40):

$$SSA = \frac{(176)^2 + (268)^2 + (168)^2}{2(2)} - \frac{(612)^2}{2(3)(2)} = 1{,}544$$

$$SSB = \frac{(300)^2 + (312)^2}{2(3)} - \frac{(612)^2}{2(3)(2)} = 12$$

$$SSAB = 1{,}580 - 1{,}544 - 12 = 24$$

وبالتالي لدينا:

$$1{,}580 = 1{,}544 + 12 + 24$$
$$SSTR = SSA + SSB + SSAB$$

تلخيص. بضم التفكيكات في (18.38) و(18.39) فقد توصلنا إلى:

$$SSTO = SSA + SSB + SSAB + SSE \qquad (18.41)$$

حيث عُرّفت مركبات مجاميع المربعات في (18.40).

وقد وجدنا لمثال شركة كاسل للمعجنات مايلي:

$$1{,}642 = 1{,}544 + 12 + 24 + 62$$
$$SSTO = SSA + SSB + SSAB + SSE$$

وهكذا، فإن معظم التشتت الكلي في هذا المثال يرتبط بتأثيرات العامل A (ارتفاع رف العرض).

تفكيك درجات الحرية

اعتدنا في تحليل التباين أحادي العامل على كيفية تقسيم درجات الحرية بين مركبات المعالجات والخطأ. ويوجد لدينا n من المشاهدات لكل معالجة في الدراسات ثنائية العامل، وفي الإجمال يوجد لدينا $n_T = nab$ من المشاهدات و $r = ab$ من المعالجات، ولذلك تكون درجات الحرية المرتبطة بـ $SSTO$، $SSTR$ و SSE هي $nab - 1$، $ab - 1$ و $nab - ab = (n-1)\,ab$، على الترتيب. وتكون درجات الحرية هذه لمثال شركة كاسل للمعجنات هي $2(3)(2)-1 = 11$، $3(2) -1 = 5$ و $(2)(3)(2-1) = 6$، على الترتيب، وذلك كما هو موضح في الجدول (١٨-٨).

ووفقا للتفكيك الإضافي لمجموع مربعات المعالجات، يمكننا، أيضا، الحصول على التفكيك المرافق لدرجات الحرية ab-1 ويرتبط بـ SSA ، $a-1$ درجة حرية. ويوجد a من الانحرافات $\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}$ ولكن تُفقد درجة حرية واحدة لأن هذه الانحرافات تخضع لقيد واحد، أي أن $\Sigma(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}) = 0$. وبشكل مشابه، يرتبط بـ SSB، $b - 1$ درجة حرية. ودرجات الحرية المرتبطة بـ $SSAB$، أي مجموع مربعات التفاعل، هي الباقي:

$$(ab - 1)(a - 1) - (b - 1) = (a - 1)(b - 1)$$

ويمكن فهم درجات الحرية المرتبطة بـ $SSAB$ كما يلي: يوجد ab من حدود التفاعل، وتخضع هذه لـ b من القيود، وذلك لأن:

$$\sum_i (\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} + \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...}) = 0 \qquad j = 1,\ldots,b$$

ويوجد a من القيود الاضافية، لأن:

$$\sum_j (\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} + \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...}) = 0 \qquad j = 1,\ldots,a$$

ولكن من ضمن القيود الأخيرة، يوجد، فقط، $a - 1$ قيدا مستقلا، وذلك لأن القيد الأخير موجود ضمنا في القيود الـ b السابقة. ولذلك، يوجد في الاجمال $b + (a-1)$ من القيود المستقلة. وبالتالي تكون درجات الحرية هي:

$$ab - (b + a - 1) = (a - 1)(b - 1)$$

مثال: في مثال شركة كاسل للمعجنات، يرتبط مع SSA، $3 - 1 = 2$ من درجات الحرية، ويرتبط مع SSB ، $2 - 1 = 1$ درجة حرية، ويرتبط مع $SSAB$، $(3 -1)(2-1) = 2$ من درجات الحرية.

متوسط المربعات

نحصل على متوسط المربعات بالطريقة المعتادة، بقسمة مجموع المربعات على درجات الحرية المرتبطة بها. وبذلك نحصل على:

$$MSA = \frac{SSA}{a-1} \quad (18.42a)$$

$$MSB = \frac{SSB}{b-1} \quad (18.42b)$$

$$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)} \quad (18.42c)$$

مثال. يكون متوسط المربعات لمثال شركة كاسل للمعجنات كالتالي:

$$MSA = \frac{1,544}{2} = 772$$

$$MSB = \frac{12}{1} = 12$$

$$MSAB = \frac{24}{2} = 12$$

لاحظ أن متوسط المربعات لايساوي متوسط مربعات المعالجات، $MSTR = 1,580/5 = 316$ ونرى مرة أخرى أن متوسط المربعات ليس تجميعيا.

توقع متوسط المربعات

وبالطريقة نفسها التي استُخدمت في الحالة أحادية العامل، يمكن تبيان أن لمتوسط المربعات في نموذج التحاين ثنائي العامل (18.23) التوقعات التالية:

$$E\{MSE\} = \sigma^2 \quad (18.43a)$$

$$E\{MSA\} = \sigma^2 + nb\frac{\Sigma\alpha_i^2}{a-1} = \sigma^2 + nb\frac{\Sigma(\mu_{i.} - \mu_{..})^2}{a-1} \quad (18.43b)$$

$$E\{MSB\} = \sigma^2 + na\frac{\Sigma\beta_j^2}{b-1} = \sigma^2 + na\frac{\Sigma(\mu_{.j} - \mu_{..})^2}{b-1} \quad (18.43c)$$

$$E\{MSEB\} = \sigma^2 + n\frac{\Sigma\Sigma(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)} \quad (18.43d)$$

$$= \sigma^2 + n\frac{\Sigma\Sigma(\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..})^2}{(a-1)(b-1)}$$

جدول (١٨-٩) جدول تحاين لدراسة ثنائية العامل مع مستويات عوامل مثبتة

مصدر التغيرات	SS	df	MS	E{MS}
ما بين المعالجات	$SSTR = n\Sigma\Sigma(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{...})^2$	$ab - 1$	$MSTR = \frac{SSTR}{ab-1}$	$\sigma^2 + \frac{n}{ab-1}\Sigma\Sigma(\mu_{ij} - \mu_{..})^2$
العامل A	$SSA = nb\Sigma(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...})^2$	$a - 1$	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$\sigma^2 + \frac{bn}{a-1}\Sigma(\mu_{i.} + \mu_{..})^2$
العامل B	$SSB = na\Sigma(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...})^2$	$b - 1$	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$\sigma^2 + \frac{an}{b-1}\Sigma(\mu_{.j} - \mu_{..})^2$
التفاعلات AB	$SSAB = n\Sigma\Sigma(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...})^2$	$(a - 1)(b - 1)$	$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma^2 + \frac{bn}{(a-1)(b-1)}\Sigma\Sigma(\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..})^2$
الخطأ	$SSE = \Sigma\Sigma\Sigma(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2$	$ab(n - 1)$	$MSE = \frac{SSE}{ab(n-1)}$	σ^2
المجموع	$SSTO = \Sigma\Sigma\Sigma(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...})^2$	$nab - 1$		

وتبين هذه التوقعات أنه إذا لم تكن هناك تأثيرات رئيسة للعامل A (أي أن جميع الـ $\mu_{i.}$ متساوية، أو أن جميع الـ $\alpha_i = 0$)، فإن لـ MSA و MSE التوقع نفسه، وإلا فإن MSA سينحو إلى أن يكون أكبر من MSE. وبشكل مشابه، إذا لم يكن هناك تأثيرات رئيسة للعامل B، فإن لـ MSB و MSE التوقع نفسه، وإلا فإن MSB سينحو إلى أن يكون أكبر من MSE وأخيرا، إذا لم يكن هناك تفاعلات [أي إذا كانت جميع الـ $(\alpha\beta)_{ij} = 0$] بحيث تكون تأثيرات العوامل تجميعية، فإن لـ $MSAB$ التوقع نفسه مثل MSE ، وإلا فإن $MSAB$ سينحو لأن يكون أكبر من MSE. وهذا يقترح أن إحصاءات الاختبار F^* المبنية على النسب MSA/MSE، MSB/MSE و $MSAB/MSE$ ستزودنا بمعلومات عن التأثيرات الرئيسة والتفاعلات لكلي العاملين، على الترتيب، مع كون القيم الكبيرة لإحصاءات الاختبار تشير إلى وجود تأثيرات للعوامل. وسنرى قريبا أن الاختبارات المبنية على هذه الاختبارات هي اختبارات F الاعتيادية.

جدول (١٨ـ١٠) جدول تحاين لدراسة ثنائية العامل ـ مثال شركة كاسل للمعجنات

مصدر التغير	SS	df	MS
ما بين المعالجات	1,580	5	316
العامل A (ارتفاع رف العرض)	1,544	12	772
العامل B (اتساع رف العرض)	12	1	12
التفاعلات AB	24	2	12
الخطأ	62	6	10.3
المجموع	1,640	11	

جدول تحليل التباين

يوضح الجدول (١٨ـ٩) تفكيك مجموع المربعات الكلي إلى مركبات المعالجات والخطأ، بالإضافة إلى التفكيك الإضافي لمجموع مربعات المعالجات إلى المركبات العاملية المتعددة. ويوضح الجدول، أيضا، درجات الحرية المرتبطة بها، ومتوسط المربعات، وتوقع متوسط المربعات. ويحوي الجدول (١٨ـ١٠) تحليل التباين ثنائي العامل لمثال شركة كاسل للمعجنات.

(٥-١٨) تقويم مصداقية نموذج تحاين

من المرغوب فيه قبل أخذ أي طرق رسمية للاستقراء أن نقوِّم مصداقية نموذج تحاين، ثنائي العامل (18.23). ولاتبرز أية مشاكل جديدة هنا.

ويمكن فحص الرواسب في (18.35):

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.}$$

من أجل الطبيعية، وثبات تباين الخطأ، واستقلال حدود الخطأ، بالطريقة نفسها التي استُخدمت في الدراسة وحيدة العامل.

ويمكن الاستفادة من التحويلات لتثبيت تباين الخطأ لجعل توزيعات الخطأ أقرب إلى التوزيع الطبيعي.

وتنطبق تماما مناقشتنا لهذا الموضوع في الفصل ١٦ في الحالة وحيدة العامل، على الحالة ثنائية العامل.

وأخيرا، تنطبق بشكل كامل مناقشتنا السابقة لآثار الحيود عن النموذج على الحالة ثنائية العامل، وعلى وجه الخصوص، فإن استخدام حجوم عينات متساوية لكل معالجة يجعل آثار عدم تساوي التباينات في حدوده الدنيا.

مثال

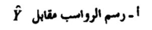
يوجد تكراران، فقط، لكل معالجة في مثال شركة كاسل للمعجنات. وكذلك فقد قُرّبت البيانات لجعل الحسابات التوضيحية بسيطة قدر المستطاع. وكنتيجة لذلك، سيكون تحليل الرواسب ذا فائدة محدودة هنا. وحصلنا على الرواسب وفقا لـ (18.35). وعلى سبيل المثال، نجد باستخدام البيانات في الجدول (١٨-٧):

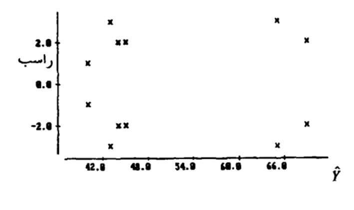
$$e_{111} = 47 - 45 = 2$$
$$e_{121} = 46 - 43 = 3$$

ورُسمت هذه الرواسب مقابل القيم التوفيقية $\hat{Y}_{ijk} = \bar{Y}_{ij.}$ في الشكل (١٨-٦)أ، ومقابل القيم المتوقعة تحت فرض الطبيعية في الشكل (١٨-٦)ب. ولايوجد دليل قوي على عدم تساوي تباينات الخطأ للمعالجات المختلفة في الشكل (١٨-٦)أ. والرسم في الشكل (١٨-٦)ب خطي بشكل معتدل مع كون الخطوات المنبسطة في الرسم ترجع

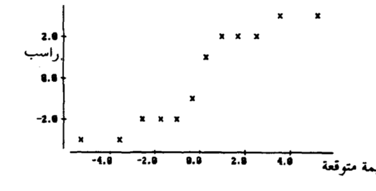
لعملية تقريب البيانات. ومعامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية هو 0.940 ،وهي قيمة تنحو إلى دعم افتراض توزيع تقريبي طبيعي.

شكل (١٨-٦) رسوم رواسب تشخيصية - مثال شركة كاسل للمعجنات (*MINITAB* المرجع [18-1])





ب - رسم احتمال طبيعي



وعلى ضوء مناعة طرق الاستقراء لنموذج التحاين المثبت، يبدو من المعقول المضي قدما في مثال شركة كاسل للمعجنات بإجراء اختبارات لتأثيرات العوامل واستخدام طرق استقراء أخرى.

(١٨-٦) اختبارات F

وعلى ضوء الخاصية التجميعية لمجموع المربعات ودرجات الحرية، فإن نظرية كوكران (3.60) تكون قابلة للتطبيق عندما لاتوجد تأثيرات للعوامل. وبالتالي، ستتبع إحصاءات الاختبار F^* المبنية على متوسطات المربعات المناسبة، توزيع F، مما سيؤدي إلى اختبارات F المعتادة لتأثيرات العوامل.

اختبارات للتفاعلات

يبدأ، عادة، تحليل دراسة ثنائية العامل باختبار لتحديد ما إذا كان العاملان يتفاعلان أم لا:

$$H_0: \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..} = 0 \quad \text{من أجل جميع } j, i$$
$$H_a: \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..} \neq 0 \quad \text{من أجل جميع } j, i \qquad (18.44)$$

أو بشكل مكافئ:

$$H_0: \text{جميع الـ } (\alpha\beta)_{ij} \text{ تساوي الصفر}$$
$$H_a: \text{ليست جميع الـ } (\alpha\beta)_{ij} \text{ تساوي الصفر} \qquad (18.44a)$$

وكما لاحظنا من فحص لتوقع متوسط المربعات في الجدول (١٨-٩) ،فإن إحصاءة الاختبار المناسبة هي:

$$F^* = \frac{MSAB}{MSE} \qquad (18.45)$$

وتشير القيم الكبيرة لـ F^* إلى وجود تفاعلات. وعندما تكون H_0 صحيحة، فإن F^* ستتبع التوزيع $F[(a-1)(b-a)(n-1)ab]$. وبذلك تكون قاعدة القرار المناسبة للتحكم في الخطأ من النوع I عند α هي:

$$\text{إذا كانت } F^* \leq F[1-\alpha; (a-1)(b-1), (n-1)ab] \text{ استنتج } H_0$$
$$\text{إذا كانت } F^* > F[1-\alpha; (a-1)(b-1), (n-1)ab] \text{ استنتج } H_a \qquad (18.46)$$

حيث $F[1-\alpha; (a-1)(b-1), (n-1)ab]$ هو المئين $(1-\alpha)100$ للتوزيع F المناسب.

اختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل A

تتبع اختبارات التأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B عادة اختبار التفاعلات وذلك عندما لاتوجد تفاعلات قوية. ولاختبار ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة للعامل A أم لا:

$$H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \ldots = H_a \tag{18.47}$$
H_a: ليست جميع الـ μ_i مساوية للصفر

أو بشكل مكافئ:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_a = 0 \tag{18.47a}$$
H_a: ليست جميع الـ α_i مساوية للصفر

ونستخدم إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{MSA}{MSE} \tag{18.48}$$

ومرة أخرى، فإن القيم الكبيرة لـ F^* ستدل على وجود تاثيرات رئيسة للعامل A. وبما أن F^* تتبع التوزيع $F[a-1, (n-1)ab]$ عندما تكون H_0 صحيحة، فإن قاعدة القرار المناسبة لضبط مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I عند α هي:

(18.49)
إذا كانت $F^* \leq F[1-\alpha; (a-1)(b-1), (n-1)ab]$ استنتج H_0
إذا كانت $F^* > F[1-\alpha; (a-1)(b-1), (n-1)ab]$ استنتج H_a

اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B

هذا الاختبار مماثل لاختبار التاثيرات الرئيسة للعامل A. وتكون الفرضيات البديلة هي:

$$H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \ldots = H_{.b} \tag{18.50}$$
H_a: ليست جميع الـ $\mu_{.j}$ مساوية للصفر

أو بشكل مكافئ:

$$H_0: \beta_{1.} = \beta_{2.} = \ldots = \beta_{b.} = 0 \tag{18.50a}$$
H_a: ليست جميع الـ β_j مساوية للصفر

وتكون إحصاءة الاختبار هي:

$$F^* = \frac{MSB}{MSE} \tag{18.51}$$

وقاعدة القرار المناسبة لضبط مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I عند α هي:

$$\begin{aligned} &\text{إذا كانت } F^* \leq F[1-\alpha ; (a-1)(b-1),(n-1)ab] \text{ استنتج } H_0 \\ &\text{إذا كانت } F^* > F[1-\alpha ; (a-1)(b-1),(n-1)ab] \text{ استنتج } H_a \end{aligned} \tag{18.52}$$

مثال:

سنبحث لمثال شركة كاسل للمعجنات عن وجود تأثيرات لارتفاع الرفوف واتساعها، وذلك باستخدام مستوى معنوية $\alpha = .05$ لكل اختبار. وسنبدأ أولا باختبار ما إذا كان يوجد تأثيرات تفاعل أم لا:

$$H_0: \text{جميع } (\alpha\beta)_{ij} \text{ تساوي الصفر}$$

$$H_a: \text{ليست جميع الـ } (\alpha\beta)_{ij} \text{ مساوية للصفر}$$

وباستخدام البيانات في الجدول (١٨ـ١٠) في إحصاءة الاختبار (18.45)، نحصل على:

$$F^* = \frac{12}{10.3} = 1.17$$

وبما أننا سنتحكم في مخاطرة ارتكاب خطأ من النوع I عند $\alpha = .05$، فإننا سنحتاج للقيمة $F(.95 ; 2,6) = 5.14$ وتكون بذلك قاعدة القرار هي:

$$\text{إذا كانت } F^* \leq 5.14 \text{ استنتج } H_0$$

$$\text{إذا كانت } F^* > 5.14 \text{ استنتج } H_a$$

وبما أن $F^* = 1.17 \leq 5.14$ ، فإننا نستنتج H_0 ، أي أن ارتفاع الرفوف واتساعها لاتتفاعل في تأثيراتها على المبيعات. والقيمة ـP لهذا الاختبار هي: $P\{F(2,6) > 1.17\} = .37$.

وبما أن العاملين لايتفاعلان، فإننا نتوجه إلى اختبار التأثيرات الرئيسة لارتفاع الرفوف (العامل A)، وتُعطى الفرضيات البديلة في (18.47). وتصبح إحصاءة الاختبار (18.48) في مثالنا كالتالي:

$$F^* = \frac{772}{10.3} = 75.0$$

ولقيمة $\alpha = .05$، سنحتاج للقيمة $F(.95;2,6) = 5.14$ وبما أن $F^* = 75.0 > 5.14$، فنستنتج H_a ، أي أنه ليست كل متوسطات مستويات العامل A، $\mu_{i.}$، متساوية، أو أنه توجد تأثيرات مؤكدة مرتبطة بارتفاع الرفوف. والقيمة ـP لهذا الاختبار هي $P\{F(2,6) > 75.0\} = .0001$.

وبعد ذلك نختبر التأثيرات الرئيسة لعرض (اتساع) الرفوف (العامل B)، وتُعطي الفرضيات البديلة في (18.50). وتصبح إحصاءة الاختبار في مثالنا كالتالي:

$$F^* = \frac{12}{10.3} = 1.17$$

ولقيمة $\alpha = .05$، فسنحتاج للقيمة $F(.95,1,6) = 5.99$. وبما أن $F^* = 1.17 \le 5.99$، فنستنتج H_0 ، أي أن جميع الـ $\mu_{.j}$ متساوية، أو أنه ليس لعرض الرفوف أي تأثير على المبيعات. والقيمة ـP لهذا الاختبار هي $P\{F(1,6) > 1.17\} = .32$.

وهكذا ، فإن اختبارات تحليل التباين تؤكد الانطباعات الأولية التي تولدت لدينا من رسوم المتوسطات المقدَّرة للمعالجات $\bar{Y}_{ij.}$ في الشكل (١٨ـ٥)، أي أن لارتفاع الرفوف، فقط، تاثير على المبيعات في حالة المعالجات المدروسة. ومن الواضح، عند هذا الحد، أنه يُستحسن إجراء تحليلات إضافية عن طبيعة تأثيرات ارتفاع الرفوف. وسنناقش مثل هذه التحليلات لتأثيرات العوامل في الفصل ١٩.

تعليقات

١ ـ إذا أجري اختبار التفاعلات عند مستوى المعنوية α_1، واختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A عند مستوى المعنوية α_2، واختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B عند مستوى المعنوية α_3، فإن مستوى المعنوية α لعائلة الاختبارات الثلاثة سيكون أكبر من مستويات المعنوية منفردة. ويمكننا استنباط المتراجحة التالية من متراجحة بونفيروني في (5.5):

$$\alpha \le \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \tag{18.54}$$

وللحالة التي اعتبرت هنا، يمكننا استخدام متراجحة أضيق نوعا ما، وهي متراجحة كيمبل، وهي تستخدم حقيقة أن البُسُط في إحصاءات الاختبار الثلاث مستقلة وأن المقام هو نفسه في كل حالة. وتنص هذه المتراجحة على أن:

$$\alpha \le 1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3) \qquad (18.54)$$

ولمثال شركة كاسل للمعجنات، حيث $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = .05$، تعطي متراجحة بونفيروني كحد لمستوى معنوية العائلة:

$$\alpha \le .05 + .05 + .05 = .15$$

بينما تعطي متراجحة كيمبل الحد:

$$\alpha \le 1 - (.95)(.95)(.95) = .143$$

ويبين هذا التوضيح بشكل جليّ أن مستوى معنوية عائلة الاختبارات الثلاثة يمكن أن يكون أكبر بشكل جوهري من مستويات المعنوية للاختبارات المنفردة.

٢ ـ يمكن الحصول على إحصاءات الاختبار F^* في (18.45)، (18.48) و (18.51) بطريقة الاختبار الخطي العام المشروحة في الفصل الثالث. فعلى سبيل المثال، لاختبار وجود تأثيرات التفاعل، فإن الفرضيات البديلة هي تلك المعطاة في (18.44) والنموذج التام هو نموذج التحاين في (18.23):

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad \text{النموذج التام} \qquad (18.55)$$

ويقود توفيق هذا النموذج التام إلى القيم التوفيقية $\overline{Y}_{ijk} - \overline{Y}_{ij.}$ وإلى مجموع مربعات الخطأ:

$$SSE(F) = \Sigma\Sigma\Sigma(\hat{Y}_{ijk} - Y_{ijk})^2 \; \Sigma\Sigma\Sigma(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2 = SSE \qquad (18.56)$$

وهذا هو مجموع مربعات الخطأ المعتاد لنموذج التحاين في (18.38c). ويرتبط بمجموع مربعات الخطأ هذا $ab(n\text{-}1)$ درجة حرية.

وتحت الفرضية $H_0 : (\alpha\beta)_{ij} \equiv 0$ ، فإن النموذج المخفض هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \qquad \text{النموذج المخفض} \qquad (18.57)$$

ويمكن إثبات أن القيم التوفيقية للنموذج المخفض هي $\hat{Y}_{ijk} = \overline{Y}_{i..} + \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...}$ ، بحيث يكون مجموع مربعات الخطأ للنموذج المخفض كالتالي:

$$SSE(R) = \Sigma\Sigma\Sigma(Y_{ijk} - Y_{ijk})^2 = \Sigma\Sigma\Sigma(Y_{ijk} - \overline{Y}_{h..} + \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...})^2 \qquad (18.58)$$

ويمكن إثبات أنه يرتبط بمجموع مربعات الخطأ هذا $nab - a - b + 1$ درجة حرية. وبالتالي ، فإن إحصاءة الاختبار في (3.69) تختصر لتصبح $F^* = MSAB/MSE$، كما في (18.45).

وبشكل مشابه، لاختبار وجود تأثيرات رئيسة للعامل A، فإن النموذج التام هو نموذج التحاين في (18.23)، والفرضيات البديلة هي تلك في (18.47)، والنموذج المخفض هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad \text{النموذج المخفض} \tag{18.59}$$

شكل (١٨-٧) جزء من مُخرجات الحاسب الآلي لنموذج تحليل التباين ثنائي العامل - مثال شركة كاسل للمعجنات (BMDBV8، المرجع [18.2]).

$n_T\bar{Y}^2_{...}$

	SOURCE	SUM OF SQUARES	D.F.	MEAN SQUARE	F	PROB.
1	MEAN	31212.000	1	31212.000	3020.52	0.0000
2	A	1544.000	2	772.000	74.71	0.0001
3	B	12.000	1	12.000	1.16	0.3226
4	AB	24.000	2	12.000	1.16	0.3747
5	S(AB)	62.000	6	10.333		
	Error	SSE		MSE	F^*	One-sided P-value

GRAND MEAN 51.00000 ← $\bar{Y}_{...}$

CELL AND MARGINAL MEANS

A =	1	2	3	
	44.00000	67.00000	42.00000	← $\bar{Y}_{i..}$

B =	1	2	
	50.00000	52.00000	← $\bar{Y}_{.j.}$

	B =	1	2	
A =	1	45.00000	43.00000	
	2	65.00000	69.00000	← $\bar{Y}_{ij.}$
	3	40.00000	44.00000	

CELL DEVIATIONS

A =	1	2	3	
	-7.00000	16.00000	-9.00000	← $\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$

B =	1	2	
	-1.00000	1.00000	← $\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}$

	B =	1	2	
A =	1	2.00000	-2.00000	
	2	-1.00000	1.00000	← $\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}$
	3	-1.00000	1.00000	

(١٨-٧) مُدخلات ومُخرجات الحاسب الآلي

تتغير بشكل كبير أشكال الادخال والاخراج لنماذج التحاين ثنائية العامل في الحاسب الآلي من برنامج لآخر. ويوضح الشكل (١٨-٧) مطبوعة للحاسب الآلي، لمثال شركة كاسل للمعجنات، وهو نتاج حزمة الحاسب الآلي BMDP (المرجع [18.2]).

ويوضح القطاع الأول من المخرجات نتائج تحاين شبيهة بتلك التي قدمت في الجدول (١٨-١٠) ولم يُوضّح مجموع مربعات المعالجات SSTR منفردا ، حيث أنه يمكن الحصول عليه بجمع SSA، SSB و SSAB. وبدلا من ذلك أعطي مصدر للتغير يُعزى للمتوسط. ويمكن استخدام هذا السطر في جدول التحاين لاختبار ما إذا كان $\mu_{..} = 0$ ولكن هذا، عادة، غير مهم (انظر جدول (٣-٤)، فهو جدول تحاين انحدار مشابه لهذا). ومعامل التصحيح لمتوسط مجموع المربعات هنا هو $n_T\bar{Y}_{..}^2$ حيث ترتبط به درجة حرية واحدة. ولمثال شركة كاسل للمعجنات لدينا $n_T\bar{Y}_{..}^2 = 12(15)^2 = 31,212$.

ويقدم الجزء الثاني عدة متوسطات مقدرة، بينما يوضح الجزء الأخير تقديرات نقطية للتأثيرات (سميت انحرافات الخلايا) $\alpha_i = \mu_{i.} - \mu_{..}$ ، $\beta_j = \mu_{.j} - \mu_{..}$ و $(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..}$ لأجل $i = 1, 2, 3$ و $j = 1, 2$.

(١٨-٨) أسلوب الانحدار لتحليل التباين ثنائي العامل

سنشرح طريقة الانحدار لتحليل التباين ثنائي العامل عن طريق نموذج تأثيرات العوامل (18.23):

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad (18.60)$$

وكما نعلم من (18.24)، فإن متوسطات الاستجابة لهذا النموذج تعطى بـ:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} \qquad (18.61)$$

ولتمثيل هذا النموذج بالشكل المصفوفي، نستمر بالطريقة نفسها التي استُخدمت في أسلوب الانحدار لنموذج تحاين وحيد العامل. وبما أن $\sum\alpha_i = 0$، فنحن في حاجة إلى $a - 1$ من المعالم α_i في نموذج الانحدار وسنمثل المعلمة α_a كمايلي:

$$\alpha_a = -\alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_{a-1} \qquad (18.62)$$

ولذلك سنستخدم للمعالم α_i، a-1 من المتغيرات المؤشرة التي يمكن أن تأخذ القيم 1، 1- أو 0، وذلك كما جرى في تمثيل نموذج تحاين وحيد العامل. وبشكل

مشابه، سنحتاج «فقط» لـ $b - 1$ من المعالم β_j، في نموذج الانحدار وسنمثل المعلمة β_b كمايلي:

$$\beta_b = -\beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_{b-1} \qquad (18.63)$$

ولذلك سنستخدم للمعالم B_i، $b - 1$ من المتغيرات المؤشرة التي يمكن أن تأخذ القيم 1 ، 1 - أو 0.

ولمعالم التفاعل، نحتاج لملاحظة أن:

$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad j = 1,\ldots,b \qquad \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad i = 1,\ldots,a \qquad (18.64)$$

ولذلك، سنمثل المعالم $(\alpha\beta)_{ib}$ و $(\alpha\beta)_{aj}$ كما يلي:

$$(\alpha\beta)_{ib} = -(\alpha\beta)_{i1} - (\alpha\beta)_{i2} - \ldots - (\alpha\beta)_{i,b-1} \qquad (18.65)$$

$$(\alpha\beta)_{aj} = -(\alpha\beta)_{1j} - (\alpha\beta)_{2j} - \ldots - (\alpha\beta)_{a-1,j} \qquad (18.66)$$

وفي الحقيقة سنحتاج، في نموذج الانحدار، إلى $(a-1)(b-1)$ «فقط» من الحدود $(\alpha\beta)_{ij}$ وذلك بسبب العلاقات المتداخلة بين القيود في (18.64). وهذه هي الحدود المرتبطة بالجداءات المتصالبة بين المتغيرات المؤشرة الخاصة بالتاثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B، كما سنوضح الآن.

مثال:

نقدم في الجدول (١٨-١١) المتجهات $\mathbf{Y}$, β , ε والمصفوفة $\mathbf{X}$ لمثال شركة كاسل للمعجنات. ونعرف المتغيرات X كما يلي:

$X_1 =$
- 1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 1 للعامل A.
- 1- إذا كانت المشاهدة من المستوى 3 للعامل A.
- 0 خلاف ذلك.

$X_2 =$ (18.67)
- 1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 2 للعامل A.
- 1- إذا كانت المشاهدة من المستوى 3 للعامل A.
- 0 خلاف ذلك.

$X_3 =$
- 1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 1 للعامل B.
- 1- إذا كانت المشاهدة من المستوى 2 للعامل B.

وبالتالي ،فإن المعالم α_i التي يتضمنها المتجه β هي α_1 و α_2 و β_1 هـي المعلمـة β_j الوحيدة الواردة هنا. وحدود التفاعل في المتجه β هي تلك المرتبطة بالمتغيرات المسـتقلة $X_4 = X_1X_3$ و $X_5 = X_2X_3$. ويشير المتغير X الوارد علـى الصـورة X_1X_3 إلى المستوى $i = 1$ للعـامل A والمستوى $j = 1$ للعـامل B، وبالتـالي ، فـإن معلمـة التفـاعل الموافقـة هـي $(\alpha\beta)_{11}$. ووفقا لذلك، فإن المتغير X الوارد علـى الصـورة X_2X_3 يشـير إلى المسـتويات i =2، $j = 1$، وتكون معلمة التفاعل الموافقة هي $(\alpha\beta)_{21}$.

وللتأكد من أن التمثيل للمصفوفة **X** يعطـي النمـوذج الملائـم، نقـدم في الجـدول (١٨-١٢) متجه المتوسطات $\mathbf{E\{Y\} = X\beta}$. ونرى على سبيل المثال، أن:

$$E\{Y_{111}\} = \mu_{..} + \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha\beta)_{11}$$

ونرى كذلك أن:

$$E\{Y_{121}\} = \mu_{..} + \alpha_1 - \beta_1 - (\alpha\beta)_{11}$$
$$= \mu_{..} + \alpha_1 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{12}$$

وذلـك لأن $\beta_2 = -\beta_1$ اسـتنادا إلى (18.63) و $(\alpha\beta)_{12} = -(\alpha\beta)_{11}$ اسـتنادا إلى (18.65) وبشكل مشابه، نرى أن:

$$E\{Y_{322}\} = \mu_{..} - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 + (\alpha\beta)_{11} + (\alpha\beta)_{21}$$
$$= \mu_{..} + \alpha_3 + \beta_2 + (\alpha\beta)_{32}$$

وذلك لأن:

$\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2$ استنادا إلى (18.62).

$\beta_2 = -\beta_1$ استنادا إلى (18.63).

$(\alpha\beta)_{11} = -(\alpha\beta)_{12}$ و $(\alpha\beta)_{21} = -(\alpha\beta)_{22}$ استنادا إلى (18.65).

$(\alpha\beta)_{32} = -(\alpha\beta)_{22} - (\alpha\beta)_{12}$ استنادا إلى (18.66).

وهكـذا ، فـإن تمثيـل النمـوذج الخطي في الجـدول (١٨-١١) يعطي متوسـط الاستجابة الملائم لكل مشاهدة.

وبالتالي يكون نموذج الانحدار المتعدد المكافئ لنموذج تحـاين ثنـائي العـامل لمثـال شركة كاسل للمعجنات كمايلي:

جدول (١٨-١١) تمثيل الانحدار لنموذج تحاين ثنائي العامل - مثال شركة كاسل للمعجنات

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} Y_{111}\\ Y_{112}\\ Y_{121}\\ Y_{122}\\ Y_{211}\\ Y_{212}\\ Y_{221}\\ Y_{222}\\ Y_{311}\\ Y_{312}\\ Y_{321}\\ Y_{322} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}=\begin{array}{c} \begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 & X_1X_3 & X_2X_3 \end{matrix}\\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} \mu_{..}\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \beta_1\\ (\alpha\beta)_{11}\\ (\alpha\beta)_{21} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix} \varepsilon_{111}\\ \varepsilon_{112}\\ \varepsilon_{121}\\ \varepsilon_{122}\\ \varepsilon_{211}\\ \varepsilon_{212}\\ \varepsilon_{221}\\ \varepsilon_{222}\\ \varepsilon_{311}\\ \varepsilon_{312}\\ \varepsilon_{321}\\ \varepsilon_{322} \end{bmatrix}$$

جدول (١٨-١٢) متجه المتوسطات لمثال شركة كاسل للمعجنات

$$\mathbf{E\{Y\}}=\begin{bmatrix} E\{Y_{111}\}\\ E\{Y_{112}\}\\ E\{Y_{121}\}\\ E\{Y_{122}\}\\ E\{Y_{211}\}\\ E\{Y_{212}\}\\ E\{Y_{221}\}\\ E\{Y_{222}\}\\ E\{Y_{311}\}\\ E\{Y_{312}\}\\ E\{Y_{321}\}\\ E\{Y_{321}\} \end{bmatrix} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_{.}+\alpha_1+\beta_1+(\alpha\beta)_{11}\\ \mu_{.}+\alpha_1+\beta_1+(\alpha\beta)_{11}\\ \mu_{.}+\alpha_1-\beta_1-(\alpha\beta)_{11}\\ \mu_{.}+\alpha_1-\beta_1-(\alpha\beta)_{11}\\ \mu_{.}+\alpha_2+\beta_1+(\alpha\beta)_{21}\\ \mu_{.}+\alpha_2+\beta_1+(\alpha\beta)_{21}\\ \mu_{.}+\alpha_2-\beta_1-(\alpha\beta)_{21}\\ \mu_{.}+\alpha_2-\beta_1-(\alpha\beta)_{21}\\ \mu_{.}-\alpha_1-\alpha_2+\beta_1-(\alpha\beta)_{11}-(\alpha\beta)_{21}\\ \mu_{.}-\alpha_1-\alpha_2+\beta_1-(\alpha\beta)_{11}-(\alpha\beta)_{21}\\ \mu_{.}-\alpha_1-\alpha_2-\beta_1+(\alpha\beta)_{11}+(\alpha\beta)_{21}\\ \mu_{.}-\alpha_1-\alpha_2-\beta_1+(\alpha\beta)_{11}+(\alpha\beta)_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{.}+\alpha_1+\beta_1+(\alpha\beta)_{11}\\ \mu_{.}+\alpha_1+\beta_1+(\alpha\beta)_{11}\\ \mu_{.}+\alpha_1+\beta_2+(\alpha\beta)_{12}\\ \mu_{.}+\alpha_1+\beta_2+(\alpha\beta)_{12}\\ \mu_{.}+\alpha_2+\beta_1+(\alpha\beta)_{21}\\ \mu_{.}+\alpha_2+\beta_1+(\alpha\beta)_{21}\\ \mu_{.}+\alpha_2+\beta_2+(\alpha\beta)_{22}\\ \mu_{.}+\alpha_2+\beta_2+(\alpha\beta)_{22}\\ \mu_{.}+\alpha_3+\beta_1+(\alpha\beta)_{31}\\ \mu_{.}+\alpha_3+\beta_1+(\alpha\beta)_{31}\\ \mu_{.}+\alpha_3+\beta_2+(\alpha\beta)_{32}\\ \mu_{.}+\alpha_3+\beta_2+(\alpha\beta)_{32} \end{bmatrix}$$

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \underbrace{\alpha_1 X_{ijk1} + \alpha_2 X_{ijk2}}_{\text{التأثير الرئيس } A} + \underbrace{\beta_1 X_{ijk3}}_{\text{التأثير الرئيس } B} \tag{18.68}$$

النموذج التام

$$+ \underbrace{(\alpha\beta)_{11} X_{ijk1} X_{ijk3} + (\alpha\beta)_{21} X_{ijk2} X_{ijk3}}_{\text{تأثير التفاعل } AB} + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1,2,3;\ j = 1,2;\ k = 1,2$$

وترمز X_{ijk1} هنا لقيمة المتغير المستقل X_1 في حالة المشاهدة k من المعالجة التي يكون فيها العامل A عند المستوى i والعامل B عند المستوى j، وتملك X_{ijk2} و X_{ijk3} معانٍ مماثلة. [لقد عُرفت هذه المتغيرات المستقلة في (18.67)]. وأخيرا، فإن معالم الانحدار هي معالم نموذج التحاين، .. μ (حد التقاطع)، و $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ ، $(\alpha\beta)_{11}$ و $(\alpha\beta)_{21}$ (معالم الانحدار).

وتتضمن اختبارات تأثيرات التفاعل، والتأثيرات الرئيسة للعامل A، والتأثيرات الرئيسة للعامل B لمثال شركة كاسل للمعجنات اختبار ما إذا كانت بعض معاملات الانحدار في نموذج الانحدار (18.68) تساوي الصفر أم لا وذلك كما يلي:

اختبار لتاثيرات التفاعل:

$$H_0: (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{21} = 0 \tag{18.69}$$
H_a: ليس كل من $(\alpha\beta)_{11}$ و $(\alpha\beta)_{21}$ تساوي الصفر

اختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل A:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \tag{18.70}$$
H_a: ليس كل من α_1 و α_2 تساوي الصفر

اختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل B:

$$H_0: \beta_1 = 0 \qquad H_a: \beta_1 \neq 0 \tag{18.71}$$

وهكذا، فإن إحصاءة الاختبار في كل حالة هي الاحصاءة F^* في (8.25)، وما يختلف هنا هو ،فقط، مجموع المربعات الإضافي وعدد درجات الحرية الملائمان للاختبارات الثلاثة.

ولإجراء اختبارات تحليل التباين لمثال شركة كاسل للمعجنات بأسلوب الانحدار، نستفيد من نموذج الانحدار (18.68). والمشاهدات Y_{ijk} معطاة في الجدول (١٨ـ٧). والمصفوفة $\mathbf{X}$ في الجدول (١٨ـ١١). وقد أعطت تشغيلة لحزمة حاسب آلي خاصة بالانحدار المتعدد على هذه البيانات النتائج الموضحة في الجدول (١٨-١٣)، والتي تتضمن مجاميع المربعات الإضافية لكل متغير X وفق ترتيب المتغيرات X في نموذج الانحدار.

ويمكن تبيان أنه عندما تتساوى حجوم العينات لكل المعالجات، كما هو الحال في مثال شركة كاسل للمعجنات، فإن إجمالي مجاميع المربعات الإضافية لحدود الانحدار للعامل A يساوي SSA. وبشكل مشابه ، فإن إجمالي مجاميع المربعات الإضافية لحدود الانحدار للعامل B ولحدود الانحدار للتفاعل تساوي SSB و $SSAB$، على الترتيب. وبسبب التوازن في المصفوفة **X** عندما تتساوى حجوم العينات لجميع المعالجات، فإن إجماليات مجاميع المربعات الإضافية ستكون هي نفسها، بغض النظر عن ترتيب مجاميع المربعات الإضافية للعامل A، للعامل B ولحد التفاعل.

جدول (١٨-١٣) أسلوب الانحدار لتحليل التباين ثنائي العامل - مثال شركة كاسل للمعجنات

(أ) دالة الانحدار التوفيقية

$$\hat{Y} = 51.0 - 7.0X_1 + 16.0X_2 - 1.0X_3 + 2.0X_1X_3 - 1.0X_2X_3$$

(ب) جدول التحاين

مصدر التغير	SS	df	MS
انحدار	1.580	5	$MSTR = 316$
X_1 $X_2 \mid X_1$	8 1,536 } $SSA = 1,544$	1 1 } 2	$MSA = 772$
$X_3 \mid X_1, X_2$	12 } $SSB = 12$	1 } 1	$MSB = 12$
$X_1X_3 \mid X_1, X_2, X_3$ $X_2X_3 \mid X_1, X_2, X_3, X_1, X_3$	18 6 } $SSAB = 24$	1 1 } 2	$MSAB = 12$
الخطأ	62	6	$MSE = 10.3$
المجموع	1,642	11	1

ونرى من الجدول (١٨-١٣) أن إجماليات مجاميع المربعات الإضافية الخاصة بـ SSA , SSB , $SSAB$ وكذلك مجموع مربعات الخطأ SSE التي حصلنا عليها بأسلوب الانحدار هي نفسها كما في الجدول (١٨-١٠) عندما حصلنا عليها باستخدام صيغ التحاين.

ومن هذه النقطة فصاعدا، فإن طرق الاختبار المعتمدة على أسلوب الانحدار متطابقة مع اختبارات تحليل التباين التي شرحت سابقا.

(١٨-٩) أساليب أخرى لتحليل التباين.

نناقش الآن باختصار أسلوبين آخرين لتحليل التباين المقدَّم في هذا الفصل.

مراجعة نموذج تحاين

يفترض الأسلوب الذي قُدِّم في هذا الفصل أن نموذج التحاين (18.23) هو النموذج التام لجميع اختبارات تأثيرات العوامل، وذلك بغض النظر عن النتائج التي يتم التوصل إليها في أي من هذه الاختبارات. والمنطق وراء هذا الأسلوب هو أن نموذج التحاين (18.23) يعتمد على المتطابقة (18.22) لمتوسطات المعالجات μ_{ij}. وحالما تبين تحليلات الرواسب والتشخيصات الأخرى أن هذا هو النموذج الملائم، فإنه يُستخدم في جميع الاختبارات.

ويعتقد بعض الإحصائيين أنه تنبغي مراجعة نموذج التحاين (18.23) إذا أدى اختبار تأثيرات التفاعل إلى استنتاج عدم وجود تفاعلات. ويكون النموذج التام الذي يؤخذ في الاعتبار لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B، وذلك عندما يؤدي اختبار تأثيرات التفاعل إلى استنتاج عدم وجود تفاعلات، هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \qquad (18.72)$$ النموذج التام

وكما ذكرنا قبل قليل في أسلوب الانحدار لمثال شركة كاسل للمعجنات، فإن مجاميع المربعات الإضافية للتأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B لاتعتمد على ترتيب مجاميع المربعات الإضافية لتاثيرات العوامل عندما تتساوى حجوم العينات لجميع المعالجات. ولذلك، فإن البسط في إحصاءة الاختبار F^* لايتأثر بعملية المراجعة في النموذج التام عندما تتساوى حجوم عينات المعالجات. ولكن المقام في إحصاءة الاختبار F^* يتأثر بهذه العملية، مما يؤدي إلى مجموع مربعات الخطأ التالي للنموذج التام:

$$SSE(F) = SSE + SSAB \qquad (18.73)$$

وهكذا، فإن مجموع مربعات الخطأ للنموذج التام وفق هذا الأسلوب يتضمن دمج مجموعي مربعات الخطأ والتفاعل. وبالطريقة نفسها يتم دمج درجات الحرية، وتكون درجات الحرية المرتبطة بـ $SSE(F)$ هي:

$$df_F = (a-1)(b-1) + (n-1)ab = nab - a - b + 1$$

ولمثال شركة كاسل للمعجنات، فإن مجموع مربعات الخطأ بعد الدمج لاختبار التاثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B هو جدول (١٨ـ١٠):

$$SSE(F) = 62 + 24 = 86$$

ودرجات الحرية المندمجة هي:

$$df_F = 6 + 2 = 8$$

ولذلك، فإن متوسط مربعات الخطأ لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A أو العامل B وفقا لأسلوب مراجعة النموذج سيكون $10.75 = 86/8$.

إن عملية الدمج هذه تؤثر على كل من مستوى المعنوية وقوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B، بطرق غير مفهومة بشكل كامل حتى الآن. ولذلك، فقد اقترح بعض الإحصائين أن لايتم اللجوء إلى عملية الدمج إلا إذا كانت: (١) ـ درجات الحرية المرتبطة بـ MSE صغيرة، ربما 5 أو أقل، و (٢) ـ إحصاءة الاختبار $MSAB/MSE$ تقع بعيدا تحت القيمة الحرجة في قاعدة القرار، ربما عندما يكون $MSAB/MSE < 2$ لقيمة $\alpha = .05$. ولقد صُمم الجزء الأول في هذه القاعدة كي تقتصر عملية الدمج على الحالات التي ستكون فيها الاستفادة كبيرة، بينما صمم الجزء الثاني لإعطاء ضمانات معقولة إلى أنه بالفعل لاتوجد تفاعلات.

متوسطات معالجات غير متساوية الأهمية

عندما لا تكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية، فإن اختبار تأثيرات التفاعل لايتأثر في هذه الحالة. ولكن معادلات تحليل التباين للتأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B التي قُدمت في هذا الفصل لن تكون ملائمة. وبدلا من ذلك سنحتاج عادة لطريقة الاختبار الخطي العام بدلالة المصفوفات التي شُرحت في الفقرة (٨ ـ ٦).

افترض، في مثال شركة كاسل للمعجنات، أن الارتفاعين الأوسط والعلوي لرفوف الخبز الإيطالي قد استُخدما ضعف عدد مرات استخدام الارتفاع الأسفل

للرفوف. ولاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B (اتساع الرفوف)، فإن متوسط الاستجابة الذي يهمنا لاتساع الرفوف العادي سيكون عندئذٍ:

$$\mu_R = \frac{\mu_{11} + 2\mu_{21} + 2\mu_{31}}{5}$$

ومتوسط الاستجابة للرفوف المتّسعة سيكون:

$$\mu_W = \frac{\mu_{12} + 2\mu_{22} + 2\mu_{32}}{5}$$

ولذلك، فإن اختبار تأثير اتساع الرف سيتضمن الفرضيات البديلة التالية:

$$\begin{array}{lcl} H_0: \mu_R = \mu_W & \text{أو} & H_0: \mu_R - \mu_W = 0 \\ H_a: \mu_R \neq \mu_W & & H_a: \mu_R - \mu_W \neq 0 \end{array}$$

لاحظ أن هذه الفرضيات البديلة تتألف من تراكيب خطية من متوسطات الخلايا μ_{ij}:

$$\begin{aligned} &H_0: \frac{\mu_{11} + 2\mu_{21} + 2\mu_{31}}{5} - \frac{\mu_{12} + 2\mu_{22} + 2\mu_{32}}{5} = 0 \\ &H_a: \frac{\mu_{11} + 2\mu_{21} + 2\mu_{31}}{5} - \frac{\mu_{12} + 2\mu_{22} + 2\mu_{32}}{5} \neq 0 \end{aligned} \quad (18.74)$$

ولذلك، سنحتاج عادة لطريقة الاختبار الخطي العام بدلالة المصفوفات. وسنوضح طريقة الاختبار هذه عندما لاتكون متوسطات المعالجات بالأهمية نفسها في الفقرة ٢١-٣.

وعلى العكس، فإن طرق التقدير عندما لاتكون متوسطات المعالجات بالأهمية نفسها هي في الأساس غير مختلفة عن طرق التقدير عندما تكون لجميع متوسطات المعالجات الأهمية نفسها. وسنوضح عملية تقدير التأثيرات الرئيسة عندما لاتكون متوسطات المعالجات بالأهمية نفسها في الفقرة ١٩-٤.

مراجع ورد ذكرها

[18.1] *MINITAB Reference Manual, Release.* 7. State College, Pa.: Minitab, Inc., 1989.

[18.2] Dixon, W.J., chief editor. *BMDP Statistical Software manual*, vols. 1 and 2. Berkeley, Calif.: University of California Press, 1988.

مسائل

(١٨-١) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SENIC. يرغب محلل في بحث تاثيرات انتماء المدرسة الطبية (العامل A) والمنطقة الجغرافية (العامل B) على خطورة

العدوى. وستتضمن الدراسة جميع تراكيب مستويات العوامل في الدراسة.

أ - ماهو عدد المعالجات المدروسة؟

ب - ماهو متغير الاستجابة هنا؟

(١٨-٢) عرض أحد الطلبة في مناقشة في فصل ما: «المعالجة هي المعالجة، سواء أكانت الدراسة تتضمن عاملا واحدا أم عدة عوامل. وعدد العوامل هو وحده الـذي يؤثر على تحليل النتائج». ناقش.

(١٨-٣) تحقّق من التفاعلات في الجدول (١٨-٣)ب.

(١٨-٤) في دراسة ثنائية العامل، كانت متوسطات المعالجات μ_{ij} كمايلي:

العامل A	العامل B		
	B_1	B_2	B_3
A_1	34	23	36
A_2	40	29	42

أ - أوجد متوسطات مستويات العامل A.

ب - أوجد التاثيرات الرئيسة للعامل A.

جـ - هل تدل حقيقة أن $\mu_{12} - \mu_{11} = -11$ بينما $\mu_{13} - \mu_{12} = 13$، على تفـاعل العاملين B, A؟ اشرح.

د - أرسم متوسطات الاستجابة μ_{ij} في هيئة الشكل (١٨-٢) وحـدد مـا إذا كان العاملان يتفاعلان. ماذا وجدت؟

(١٨-٥) في دراسة ذات عاملين، كانت متوسطات المعالجات μ_{ij} كمايلي:

العامل A	العامل B			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	250	265	268	269
A_2	288	273	270	269

أ - أوجد التأثيرات الرئيسة للعامل B. ماذا تتضمن نتائجك بالنسبة للعامل B؟

ب ـ ارسم متوسطات الاستجابة μ_{ij} في هيئة الشكل (١٨ـ٢) وحدد ما إذا كان العاملان يتفاعلان، كيف تعرف أنه توجد تفاعلات؟ هل التفاعلات مهمة أم غير مهمة؟

جـ ـ قم بتحويل لوغاريتمي لـ μ_{ij}، وارسم القيم المحوَّلة للتعرّف على ما إذا كان التحويل مفيدا في تخفيض التفاعلات. ماذا وجدت؟

(١٨ـ٦) فيما يلي ثلاث مجموعات لمتوسطات المعالجات μ_{ij} لدرجات الطلاب في مقرر ما، حيث العامل A هو تخصص الطالب (A_1: علوم الحاسب، A_2: الرياضيات) والعامل B هو مستوى الطالب الدراسي (B_1 مستوى قبل النهائي ـ B_2: نهائي ـ B_3: دراسات عليا).

	مجموعة ٣				مجموعة ٢				مجموعة ١		
	B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3		B_1	B_2	B_3
A_1	75	80	85	A_1	75	80	90	A_1	80	80	80
A_2	75	85	100	A_2	80	86	97	A_2	90	90	90

ارسم كل مجموعة من المتوسطات μ_{ij} في هيئة الشكل (١٨ـ٢) لدراسة تأثيرات التفاعل. حلل كل رسم واعرض نتائجك. في حالة وجود التفاعلات، صف طبيعتها وحدد ما إذا كانت مهمة أم غير مهمة.

(١٨ـ٧) بالرجوع إلى المسألة (١٨ـ٤) افترض أن $\sigma = 1.4$ و $n = 10$.

أ ـ أوجد $E\{MSE\}$ و $E\{MSA\}$

ب ـ هل $E\{MSA\}$ أكبر بشكل جوهري من $E\{MSE\}$؟ ماهي النتائج المترتبة على هذا؟

(١٨ـ٨) بالرجوع إلى المسألة (١٨ـ٥). افترض أن $\sigma = 4$ و $n = 6$.

أ ـ أوجد $E\{MSE\}$ و $E\{MSAB\}$.

ب ـ هل $E\{MSAB\}$ أكبر بشكل جوهري من $E\{MSE\}$؟ ماهي النتائج المترتبة على هذا؟

(١٨-٩) ذكر أخصائي في علم النفس: «أشعر بعدم الارتياح للتقرير في أي دراسة بحثية عن كون التفاعلات مهمة أم غير مهمة. وأُفضل أن يقوم الاحصائي بعملية التقرير». علّق.

(١٨-١٠) بالرجوع إلى **مسألة العروض النقدية** (١٤-١٣). استخدم ستة من المتطوعين الذكور وستّ من المتطوعات الإناث في كل مجموعة أعمار. وصنفت المشاهدات (بمئات الدولارات) وفقا للعمر (العامل A) والجنس المالك (العامل B) وكانت كمايلي:

العامل A (العمر)	العامل ب (جنس المالك) ذكر	أنثى
$i = 1$ شاب	21	21
	23	22
	19	20
	22	21
	22	19
	23	25
$i = 2$ كهل	30	26
	29	29
	26	27
	28	28
	27	27
	27	29
$i = 3$ شيخ	25	23
	22	19
	23	20
	21	21
	22	20
	21	20

وفيما يلـي ملخـص لبعـض النتـائج الحسـابية: $SSA = 316.722$، $SSB = 5.444$، $SSAB = 5.056$، $SSE = 71.667$.

أ ـ أوجد القيم التوفيقية لنموذج التحاين (18.23).

ب ـ أوجد الرواسب. هل مجموعها يساوي الصفر لكل معالجة؟

جـ ـ جهز رسوما نقطية مصطفّة للمعالجات. ماهي الانحرافات عن نموذج التحاين، (18.23) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم. وما هي نتائجك؟

د ـ جهز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟

هـ ـ تم الحصول على المشاهدات لكل معالجة وفق الترتيب الموضح. جهز رسوما تسلسلية للرواسب وحللها. ماهي نتائجك؟

(١٨-١١) بالرجوع إلى مسائل **العروض النقدية** (١٤-١٣) و (١٨-١٠) افترض أن نموذج التحاين (18.23) ملائم.

أ ـ أرسم متوسطات الاستجابة المقدرة $\bar{Y}_{ij.}$ في هيئة الشكل (١٨-٥). هل يبدو أنه توجد أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب ـ اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدرا يفسر معظم التشتت الكلي في دراسة العروض النقدية؟ اشرح.

جـ ـ اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات تفاعل أم لا، استخدم $\alpha = .05$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟

د ـ اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة للعمر والجنس، واستخدم في كل حالة $\alpha = .05$، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـ P للاختبار؟ هل لاختبار التأثيرات الرئيسة للعوامل معنى هنا؟ اشرح.

هـ ـ أوجد حدا أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الأجزاء (جـ) و (د)، استخدم متراجحة كيمبل.

و - هل النتائج في الفقرات (جـ) و (د) تؤكد تحليلك البياني في الجزء (أ)؟
ز - ماهي العلاقات بين مجموع المربعات في تحليل التباين ثنائي العامل في الفقرة (ب) ومجموع المربعات في تحليل التباين وحيد العامل في المسألة (١٤-١٣)جـ؟ وهل تصّح العلاقات نفسها بالنسبة لدرجات الحرية؟

(١٨-١٢) **تأثير النظر إلى العدسة.** في دراسة عن تأثير النظر إلى العدسة (العامل A) وجنس مسؤول شئون الموظفين (العامل B) على تقويم المسؤول لإمكانية نجاح متقدم لوظيفة في عمله، تمّ تقديم صورة أمامية لوجه المتقدم إلى الوظيفة إلى عشرة من الذكور وعشر من الإناث من مسؤولي شؤون الموظفين وطُلب منهم تقدير درجة نجاح المتقدم للوظيفة على مقياس يتراوح بين 0 (فشل تام) إلى 20 (نجاح تام). وتمّ اختيار نصف المسؤولين من كل من الجنسين عشوائيا ليتلقوا نسخة من صورة كان المتقدم للوظيفة يحدِّق فيها بشكل تام في العدسة. بينما تلقى النصف الآخر من المسؤولين نسخة من صورة لم يكن فيها المتقدم يحدق في العدسة. وفيما يلي تقديرات النجاح.

العامل A (العمر) (النظر إلى العدسة)	العامل B (جنس المسؤول) $j=1$ ذكر	$j=2$ أنثى
$i=1$ موجود	11	15
	7	12
	12	14
	6	11
	10	16
$i=2$ غير موجود	12	14
	16	17
	10	13
	13	20
	14	18

ملخص لبعض النتائج الحسابية: $SSA = 54.15$، $SSB = 76.05$، $SSAB = 1.25$، $SSE = 97.2$.

أ ـ أوجد القيم التوفيقية لنموذج التحاين (18.23).

ب ـ أوجد الرواسب وهل مجموعها يساوي الصفر لكل معالجة؟

جـ ـ جهّز رسوم نقطية مصطفة للمعالجات. ماهي الانحرافات عن نموذج التحاين (18.23) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم. ماهي استنتاجاتك؟

د ـ جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟

هـ ـ تمّ الحصول على المشاهدات لكل معالجة وفق الترتيب الموضح. جهز رسوم تسلسلية للرواسب وحللها. ماهي استنتاجاتك؟

(١٨ـ١٣) بالرجوع إلى مسألة **النظر إلى العدسة** (١٨ـ١٢). افترض أن نموذج التحاين (18.23) ملائم.

أ ـ ارسم متوسطات الاستجابة المقدرة $\bar{Y}_{ij.}$ في هيئة الشكل (١٨ـ٥). هل يبدو أن هناك تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب ـ اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدرا يفسر معظم التغير الكلي في تقويم النجاح في الدراسة؟ اشرح.

جـ ـ اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات تفاعل أم لا، استخدم $\alpha = .01$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟

د ـ اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة للنظر إلى العدسة والجنس. واستخدم في كل حالة $\alpha = .01$ واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟ وهل لاختبار التأثيرات الرئيسة للعوامل معنى هنا؟ اشرح.

هـ ـ أوجد حدا أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الجزئين (جـ) و (د)، استخدم متراجحة كيمبل.

و ـ هل تؤكد النتائج في الجزئين (جـ) و (د) تحليلك البياني في الجزء (أ)؟

(١٨-١٤) **علاج حمّى العلف.** كان مختبر أبحاث يطور مركبا جديدا لعلاج الحالات الخطيرة لحمّى العَلَف. ففي تجربة تتضمن 36 متطوعا، تمّ تغيير كميات العنصرين النشطين (العاملان A, B) عند ثلاثة مستويات لكل عامل، واستخدمت التعشية لتخصيص أربعة متطوعين لكل معالجة من المعالجات التسع.وفيما يلي عدد ساعات الشفاء:

العامل A (العنصر 1)	العامل B (العنصر 2) $j = 1$ خفيف	$j = 2$ متوسط	$j = 3$ شديد
$i = 1$ خفيف	2.4	4.6	4.8
	2.7	4.2	4.5
	2.3	4.9	4.4
	2.5	4.7	4.6
$i = 2$ متوسط	5.8	8.9	9.1
	5.2	9.1	9.3
	5.5	8.7	8.7
	5.3	9.0	9.4
$i = 3$ شديد	6.1	9.9	13.5
	5.7	10.5	13.0
	5.9	10.6	13.3
	6.2	10.1	13.2

أ ـ أوجد القيم التوفيقية لنموذج التحاين (18.23)

ب ـ أوجد الرواسب.

جـ - ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية. ماهي الانحرافات عن نموذج التحاين (18.23) التي يمكن دراستها من هذا الرسم؟ ماهي استنتاجاتك؟

د - جهِّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟

(١٨-١٥) بالرجوع إلى مسألة **علاج حُمَّى العلف** (١٨-١٤). افترض أن نموذج التحاين (18.23) ملائم.

أ - ارسم متوسطات الاستجابة المقدَّرة $\bar{Y}_{ij.}$ في هيئة الشكل (١٨-٥). هل يقترح رسمك أن هناك أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب - اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدرا يفسر معظم التغير الكلي في عدد ساعات الشفاء في الدراسة؟ اشرح.

جـ - اختبر ما إذا كان العاملان يتفاعلان أم لا، استخدم $\alpha = .05$، أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

د - اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة للعنصرين أم لا. استخدم $\alpha = .05$ في كل حالة، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار. وهل لاختبار التاثيرات الرئيسة معنى هنا؟ اشرح.

هـ - أوجد حدا أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الجزئين (جـ) و(د)، استخدم متراجحة كيمبل.

و - هل النتائج في الجزئين (جـ) و (د) تؤكد تحليلك البياني في الجزء (أ)؟

(١٨-١٦) **صيانة مساق القرص.** تتضمن هيئة العمل في مركز لصيانة معدات اليكترونية على ثلاثة فنيين متخصصين في صيانة ثلاثة أنواع من مساقات

الأقراص شائعة الاستخدام في أجهزة الحاسب الآلي الشخصية. وترغب في دراسة تأثيرات الفني (العامل A) ونوع مساق القرص (العامل B) على الوقت اللازم للصيانة، وتوضح البيانات التالية عدد الدقائق اللازمة لاستكمال عملية الاصلاح وذلك في دراسة جرى فيها تخصيص كل فني عشوائيا إلى خمس عمليات إصلاح لكل نوع من أنواع مساقات الأقراص.

العامل A (الفني)	العامل B (نوع المساق) $j=1$ نوع 1	$j=2$ نوع 2	$j=3$ نوع 3
$i=1$ فني 1	62	57	59
	48	45	53
	63	39	67
	57	54	66
	69	44	47
$i=2$ فني 2	51	61	55
	57	58	58
	45	70	50
	50	66	69
	39	51	49
$i=3$ فني 3	59	58	47
	65	63	56
	55	70	51
	52	53	44
	70	60	50

أ - أوجد القيم التوفيقية لنموذج التحاين (18.23).

ب - اوجد الرواسب.

جـ - ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية. ماهي الانحرافات عن نموذج التحاين (18.23) التي يمكن دراستها من هذا الرسم؟ وماهي استنتاجاتك؟

د ـ جهز رسم احتمال طبيعي للرواسب. وأيضـا، أوجـد معـامل الارتبـاط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فـرض الطبيعيـة. هـل يبـدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟

هـ ـ تم الحصول على المشاهدات لكل معالجة وفق الترتيب الموضـح. جهـز رسوم تسلسلية للرواسب وحللها. ماهي استنتاجاتك؟

(١٨ـ١٧) بالرجوع إلى مسألة **صيانة مسـاق القـرص** (١٨ـ١٦). افـترض أن نمـوذج التحاين (18.23) ملائم.

أ ـ ارسم متوسطات الاستجابة المقدرة $\overline{Y}_{ij.}$ في هيئة الشكل (١٨ـ٥). هـل يقترح رسمك وجود أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب ـ اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصـدرا يفسـر معظـم التغير الكلي؟

جـ ـ اختبر ما إذا كان العاملان يتفاعلان أم لا، استخدم $\alpha = .01$، أذكـر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟

د ـ اختبر ما إذا كانت هناك تأثيرات رئيسة للفني ونوع المسـاق. استـخدم $\alpha = .01$ في كـل حالـة، واذكـر الفرضيـات البديلـة، قـاعدة القـرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار. وهل لاختبار التـأثـيرات الرئيسـة معنى هنا؟ اشرح.

هـ ـ أوجد حدا أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الجزئين (جـ) و (د)، استخدم متراجحة كيمبل.

و ـ هل تؤكد النتائج في الجزئين (جـ) و (د) تحليلك البياني في الجزء (أ)؟.

(١٨ـ١٨) **التنويم في المستشفى بسبب الفشل الكلوي**. مـن الشـائع معالجـة مرضـى الفشل الكلوي بأجهزة غسل الكليتين وذلك لتنقية الدم من المواد السـامة. وتعتمد «الجرعة» الملائمة للحصول على العـلاج الفعّـال، مـن بـين أشـياء

أخرى، على فترة العلاج والوزن المكتسب مابين فترتي علاج وذلك نتيجة لتراكم السوائل. ولدراسة تأثيرات هذين العاملين على عدد الأيام التي قضيت في المستشفى خلال عام (بسبب هذا المرض)، فقد تمّ الحصول على عينة عشوائية من عشرة مرضى في كل مجموعة من اللذين تلقوا العلاج في منشأة كبيرة للغسل الكلوي. وقد صنفت فترة العلاج (العامل A) إلى مجموعتين: فترة قصيرة (متوسط فترة الغسل فوق عام كامل هو أقل من أربع ساعات) وفترة طويلة (متوسط فترة الغسل فوق عام كامل هو أربع ساعات أو أكثر). وصنف متوسط الوزن المكتسب مابين فترات العلاج (العامل B) خلال العام إلى ثلاث مجموعات: خفيف، متوسط وشديد. وفيما يلي بيانات عدد الأيام التي قضيت في المستشفى:

العامل B (الوزن المكتسب)

العامل A (فترة العلاج)	$j=1$ خفيف		$j=2$ متوسط		$j=3$ شديد	
$i=1$ قصيرة	0	2	2	4	15	16
	2	0	4	3	10	7
	1	5	7	1	8	30
	3	6	12	5	5	3
	0	8	15	20	25	27
$i=2$ طويلة	0	2	5	1	10	15
	1	7	3	3	8	4
	1	4	2	6	12	9
	0	0	0	7	3	6
	4	5	1	9	7	1

وستستخدم البيانات المحولة $Y' = \log_{10}(Y+1)$ في التحليل.

أ ـ حوّل البيانات.

ب ـ أوجد القيم التوفيقية والرواسب لنموذج التحاين (18.23) للبيانات المحوّلة.

جـ ـ جهِّز رسوم نقطية مصطفة للمعالجات. ماهي الانحرافات عن نموذج التحاين (18.23) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم. ماهي استنتاجاتك؟

د ـ جهز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟

(١٨-١٩) **بالرجوع إلى مسألة التنويم في المستشفى بسبب الفشل الكلوي** (١٨-١٨). افترض أن نموذج التحاين (18.23) ملائم.

أ ـ ارسم متوسطات الاستجابة المقدرة $\bar{Y}'_{ij.}$ في هيئة الشكل (١٨-٥). هل يقترح رسمك وجود أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب ـ اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدرا يفسر معظم التغير الكلي؟

جـ ـ اختبر ما إذا كان العاملان يتفاعلان أم لا، استخدم $\alpha = .05$، أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟

د ـ اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة لفترة العلاج والوزن المكتسب. استخدم $\alpha = .05$ في كل حالة، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار. وهل لاختبار التاثيرات الرئيسة معنى هنا؟ اشرح.

هـ ـ أوجد حدا أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الجزئين (جـ) و(د)، استخدم متراجحة كيمبل.

و ـ هل تؤكد النتائج في الجزئين (جـ) و(د) تحليلك البياني في الجزء (أ)؟.

(١٨-٢٠) **احتياجات مبرمج.** كانت شركة لبرامج الحاسب الآلي تواجه صعوبات في عملية التنبؤ باحتياجات مبرمج لمشروع برمجة واسع النطاق. وكجزء من دراسة لتلافي هذه الصعوبات، فقد صنف 24 مبرمجا إلى مجموعات متساوية

وفقا لنوع الخبرة (العامل A) ومقدار الخبرة (العامل B)، ومن ثَمَّ طُلب منهم أن يتنبؤوا بعدد الأيام اللازمة للمبرمج كي ينهي مشروعا كبيرا على وشك البدء. وبعد الانتهاء من هذا المشروع تمَّ تحديد أخطاء التنبؤ (عدد أيام المبرمج الفعلية مطروحا منها العدد المتنبأ به). وفيما يلي بيانات أخطاء التنبؤ.

العامل A (نوع الخبرة)	العامل B سنوات الخبرة $j = 1$ أقل من 5	$j = 2$ 5 وأقل من 10	$j = 3$ أكثر من 10
$i = 1$ أنظمة صغيرة فقط	240	110	56
	206	118	60
	217	103	68
	225	95	58
$i = 2$ أنظمة صغيرة وكبيرة	71	47	37
	53	52	33
	68	31	40
	57	49	45

أ ـ أوجد القيم التوفيقية لنموذج التحاين (18.23).

ب ـ أوجد الرواسب.

جـ ـ جهِّز رسوما نقطية مصطفَّة للمعالجات. ماهي الانحرافات عن نموذج التحاين (18.23) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم. ماهي استنتاجاتك؟

د ـ جهِّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟

(١٨ـ٢١) بالرجوع إلى مسألة **احتياجات مبرمج** (١٨ـ٢٠). افترض أن نموذج التحاين (18.23) ملائم.

أ ـ ارسم متوسطات الاستجابة المقدَّرة $\bar{Y}_{ij.}$ في هيئة الشكل (١٨ـ٥). هل يقترح رسمك أن وجود أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب ـ اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدراً يفسر معظم التغير الكلي؟

جـ ـ اختبر ما إذا كان العاملان يتفاعلان أم لا، استخدم $\alpha = .01$، أذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟

د ـ اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة لنوع الخبرة ولسنوات الخبرة. استخدم $\alpha = .01$ في كل حالة، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـ P للاختبار؟. وهل لاختبار التاثيرات الرئيسة معنى هنا؟ اشرح.

هـ ـ أوجد حدا أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الجزئين (جـ) و (د)، استخدم متراجحة كيمبل.

و ـ هل تؤكد النتائج في الجزئين (جـ) و (د) تحليلك البياني في الجزء (أ)؟.

(١٨ـ٢٢) كيف تختلف تعشية تخصيص المعالجات في دراسة ثنائية العامل عندما يكون كلا العاملين تجريبين وعندما يكون أحدهما فقط عاملا تجريبيا؟

(١٨ـ٢٣) بالرجوع إلى مسألة **النظر إلى العدسة** (١٨ـ١٢).

أ ـ اشرح كيف يمكنك تخصيص مسؤولي شؤون الموظفين إلى المعالجات في هذه الدراسة ثنائية العامل. قم بجميع التعشيات المناسبة.

ب ـ هل قمت بتعشية المسؤولين إلى المستويات العاملية لكل عامل؟

(١٨ـ٢٤) بالرجوع إلى مسألة **حُمَّى العَلَف** (١٨ـ١٤).

أ ـ اشرح كيف يمكنك تخصيص المتطوعين إلىالمعالجات في هذه الدراسة. قم بجميع التعشيات المناسبة.

ب ـ هل قمت بتعشية المتطوعين إلىالمستويات العاملية لكل عامل.

(١٨ـ٢٥) بالرجوع إلى مسألة **صيانة مساق القرص** (١٨ـ١٦).

أ - هل تحتاج إلى أية تعشية لتخصيص المعالجات في هذه الدراسة؟ هل تم استخدام أية تعشية؟ اشرح.

ب - هل تعتبر هذه دراسة تجريبية في طبيعتها؟ اشرح.

(١٨-٢٦) بالرجوع إلى مسألة **النظر إلى العدسة** (١٨-١٢).

أ - عدل نموذج الانحدار (18.68) بحيث يمكن تطبيقه في هذه الدراسة ثنائية العامل باستخدام $a = 2$ و $b = 2$.

ب - اكتب المصفوفات $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ و β لنموذج الانحدار في الجزء (أ).

جـ - أوجد $\mathbf{X}\beta$. تحقق من صحة القيم المتوقعة.

د - أوجد دالة الانحدار التوفيقية. مالذي يتم تقديره بواسطة حد التقاطع؟

هـ - اكتب جدول تحليل التباين للانحدار معتمدا على مجاميع المربعات الإضافية الملائمة.

و - اختبر على انفراد كلا من تأثيرات التفاعل، التأثيرات الرئيسة للعامل A، والتأثيرات الرئيسة للعامل B. استخدم $\alpha = .01$ لكل اختبار، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.

(١٨-٢٧) بالرجوع إلى مسألة **علاج حُمّى العلف** (١٨-١٤).

أ - عدِّل نموذج الانحدار (18.68) بحيث يمكن تطبيقه في هذه الدراسة ثنائية العامل باستخدام $b = 3$ و $a = 3$.

ب - اكتب المصفوفات $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ و β لنموذج الانحدار في الجزء (أ).

جـ - أوجد $\mathbf{X}\beta$. تحقق من صحة القيم المتوقعة.

د - أوجد دالة الانحدار التوفيقية. مالذي يتم تقديره بواسطة α_1؟

هـ - اكتب جدول تحليل التباين للانحدار معتمدا على مجاميع المربعات الاضافية الملائمة.

و - اختبر على انفراد كلا من تأثيرات التفاعل، التأثيرات الرئيسة للعامل A، والتأثيرات الرئيسة للعامل B. استخدم $\alpha = .05$ لكل اختبار، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.

(١٨-٢٨) بالرجوع إلى مسألة **صيانة مساق القرص** (١٨-١٦).

أ - عدّل نموذج الانحدار (18.68) بحيث يمكن تطبيقه في هذه الدراسة ثنائية العامل باستخدام $a = 3$ و $b = 3$.

ب - أوجد دالة الانحدار التوفيقية. مالذي يتم تقديره بواسطة $\hat{\beta}_1$؟

جـ - اكتب جدول تحليل التباين للانحدار معتمدا على مجاميع المربعات الإضافية الملائمة.

د - اختبر على انفراد كلا من تأثيرات التفاعل، التأثيرات الرئيسة للعامل A، والتأثيرات الرئيسة للعامل B. استخدم $\alpha = .01$ لكل اختبار، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة.

(١٨-٢٩) بالرجوع إلى مسألة **العروض النقدية** (١٨-١٠). المطلوب اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B عن طريق الاختبار الخطي العام وطريقة المصفوفات.

أ - اكتب المصفوفات $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$, $\boldsymbol{\beta}$ للنموذج التام (18.15) كما هو موضح في (18.19).

ب - أوجد معاملات الانحدار المقدَّرة للنموذج التام باستخدام (8.64).

جـ - عبر عن الفرضيات البديلة بالشكل المصفوفي (8.66).

د - أوجد $SSE(R) - SSE(F)$ باستخدام (8.70). وهل نتيجتك تساوي $SSB = 5.444$ كما ينبغي أن تكون؟

تمارين

(١٨-٣٠) استنبط (18.7a) من (18.7).

(١٨-٣١) أثبت النتيجة في (18.9b).

(١٨-٣٢) (يحتاج إلى حساب التفاضل). اكتب دالة الإمكانية العظمى لنموذج التحاين (18.15). عندما تكون $a = 2$، $b = 2$ و $n = 2$. أوجد تقديرات الإمكانية العظمى. وهل هي نفسها تقديرات المربعات الدنيا في (18.29).

(١٨-٣٣) (يحتاج إلى حساب التفاضل). استنبط (18.29).

(١٨-٣٤) استنبط (18.39) من (18.37).

(١٨-٣٥) بيِّن التكافؤ بين التعابير في (18.40c) و (18.39a).

مشاريع

(١٨-٣٦) بالرجوع إلى مجموعة البيانات **SENIC**. يراد اعتبار المستشفيات التالية في دراسة لتأثيرات المنطقة (العامل A: المتغير 9) ومتوسط عمر المريض (العامل B: المتغير 3) على متوسط مدة بقاء المريض في المستشفى (المتغير 2):

1-44 46 48 51 53 57 58 60 63 66 74
76 79 80 83 84 88 94 101 103 111

ولأغراض دراسة التحاين هذه، يراد تصنيف متوسط العمر إلى فئتين: أقل من أو يساوي 53.9 سنة و 54.0 سنة أو أكثر.

أ ـ جمِّع البيانات المطلوبة وأوجد القيم التوفيقية لنموذج التحاين (18.23).

ب ـ أوجد الرواسب.

جـ ـ ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية. ماهي الانحرافات عن نموذج التحاين (18.23) التي يمكن دراستها من هذا الرسم؟ وما هي استنتاجاتك؟

د ـ جهِّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟

(١٨-٣٧) بالرجوع إلى مجموعة البيانات **SENIC** وإلى المشروع (١٨-٣٦). افترض أن نموذج التحاين (18.23) ملائم.

أ ـ ارسم متوسطات المعالجات المقدَّرة $\bar{Y}_{ij.}$ في هيئة الشكل (١٨-٥). هل يبدو أن هناك أية تأثيرات للعوامل. اشرح.

ب ـ اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدرا يفسر معظم التغير الكلي في تقويم النجاح في الدراسة؟ اشرح.

جـ ـ اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات تفاعل أم لا، استخدم $\alpha = .05$.
اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

د ـ اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة للمنطقة والعمر. واستخدم في كل حالة $\alpha = .05$، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار. وهل لاختبار التأثيرات الرئيسة للعوامل معنى هنا؟ اشرح.

هـ ـ أوجد حدا أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الجزئين (جـ) و (د)، استخدم متراجحة كيمبل.

و ـ هل تؤكد النتائج في الجزئين (جـ) و (د) تحليلك البياني في الجزء (أ)؟

(١٨ـ٣٨) بالرجوع إلى مجموعة البيانات **SMSA**. يراد اعتبار المساحات الحضرية التالية في دراسة لتأثير المناطق (العامل A: المتغير 12) ونسبة السكان في المدن الرئيسة (العامل B: المتغير 4) على معدل الجريمة (المتغير 11 ÷ المتغير 3):

1-36 38 39 45 46 49 53 62 71 73 101 123 130

ولأغراض دراسة التحاين هذه، يراد تصنيف النسبة المئوية للسكان في المدن المركزية إلى فئتين: أقل من أو تساوي 38.9 في المئة، و 39.0 في المئة أو أكثر.

أ ـ جمّع البيانات المطلوبة وأحسب القيم التوفيقية لنموذج التحاين (18.23).

ب ـ أوجد الرواسب.

جـ ـ جهّز رسوما نقطية مصطفّة للمعالجات. ماهي الانحرافات عن نموذج التحاين (18.23) التي يمكن دراستها من هذه الرسوم؟ وما هي استنتاجاتك؟

د - جهِّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت فرض الطبيعية. هل يبدو فرض الطبيعية ملائما هنا؟

(١٨-٣٩) بالرجوع إلى مجموعة البيانات SMSA والمشروع (١٨-٣٨). افترض أن نموذج التحاين (18.23) ملائم.

أ - ارسم متوسطات المعالجات المقدَّرة $\bar{Y}_{ij.}$ في هيئة الشكل (١٨-٥). هل يبدو أن هناك أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب - اكتب جدول تحليل التباين. هل يبدو أن هناك مصدرا يفسر معظم التغير الكلي في تقويم النجاح في الدراسة؟ اشرح.

جـ - اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات تفاعل أم لا، استخدم $\alpha = .01$. اذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟

د - اختبر ما إذا كانت توجد تأثيرات رئيسة للمنطقة والنسبة المئوية للسكان في المدن المركزية. أم لا. واستخدم في كل حالة $\alpha = .01$، واذكر الفرضيات البديلة، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار. وهل لاختبار التأثيرات الرئيسة للعوامل معنى هنا؟ اشرح.

هـ - أوجد حدا أعلى لمستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الجزئين (جـ) و (د)، استخدم متراجحة كيمبل.

و - هل تؤكد النتائج في الجزئين (جـ) و (د) تحليلك البياني في الجزء (أ)؟

تحليل وتخطيط دراسات ثنائية العامل
حجوم متساوية العينات

عندما تشير اختبارات تحليل التباين المعروضة في الفصل الثامن عشر إلى وجود تأثيرات عوامل في دراسات ثنائية العامل، تكون الخطوة التالية هي تحليل طبيعة تأثيرات العوامل هذه. ونناقش هنا كيفية القيام بمثل هذه التحاليل. ونستمر في دراسة نموذج التحاين المثبت (18.23) بعاملين حيث توجد n مشاهدة لكل معالجة وتتمتع جميع متوسطات المعالجات بالأهمية نفسها. ونتابع أولا تحليل تأثيرات العوامل عندما يكون كلا العاملين وصفيا ثم ننتقل إلى تحليلها عندما يكون أحد العاملين أو كلاهما كميا.

ونختتم هذا الفصل بمناقشة موجزة لتخطيط حجوم العينات في دراسات ثنائية العامل، وهذا التخطيط يشكل عنصرا رئيسا في تصميم مثل هذه الدراسات.

(١٩-١) استراتيج للتحليل

يقترح ما استعرضناه في الفصل الثامن عشر عن معنى عناصر النموذج الاستراتيج الأساسي التالي لتحليل تأثيرات العوامل في دراسات ثنائية العامل:

١- اختبر ما إذا كان العاملان يتفاعلان.

٢- إذا لم يتفاعلا، اختبر ما إذا كان للعاملين A و B تأثيرات رئيسة مهمة. وفي حال تأثيرين رئيسين مهمين صف طبيعة هذه التأثيرات بدلالة متوسطات مستويات العاملين $\mu_{i.}$ أو $\mu_{.j}$ ، على الترتيب. وفي بعض الحالات الخاصة قد نهتم، أيضا، بمتوسطات المعالجات μ_{ij}.

٣- إذا كان العاملان متفاعلين، اختبر ما إذا كانت التفاعلات مهمة أو غير مهمة.

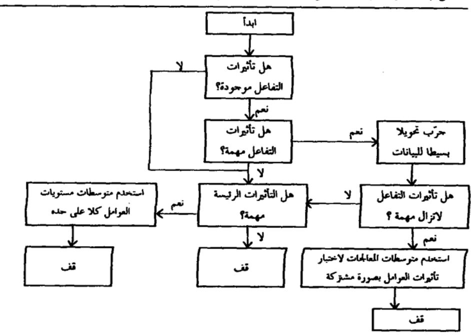
٤- إذا كانت التفاعلات غير مهمة، تابع الخطوة ٢.

٥ـ إذا كانت التفاعلات مهمة، ادرس إمكانية جعلها غير مهمة عن طريق تحويل بسيط ذي مغزى لسلّم القياس. وإذا كانت الإمكانية موجودة، فقم بالتحويل ثم تابع كما في الخطوة ٢.

٦ـ وفي حالة تفاعلات مهمة لايمكن جعلها غير مهمة عن طريق تحويل بسيط، حلل تأثيرات العاملين بصورة مشتركة بدلالة متوسطات المعالجات μ_{ij}. وفي بعض الحالات الخاصة، قد نهتم، أيضا، بمتوسطات مستويات العاملين $\mu_{i.}$ و $\mu_{.j}$. ونقدم في الشكل (١٩ـ١) جدول تدفق لهذا الاستراتيج.

وقد نوقشت الخطوة ١ من هذا الاستراتيج، أي اختبار تأثيرات التفاعل، في الفصل ١٨. كما ناقشنا هناك، أيضا، الخطوة ٥ أي إمكانية إلغاء التفاعلات المهمة بتحويل بسيط ذي مغزى، بالإضافة إلى كيفية اختبار وجود تأثيرات رئيسة للعوامل. ونعود الآن إلى الخطوتين ٢ و٦ من خطوات استراتيج التحليل، ونقصد كيفية مقارنة متوسطات مستويات العاملين $\mu_{i.}$ و $\mu_{.j}$ عندما لاتوجد تفاعلات، أو عندما توجد تفاعلات غير مهمة، وكيف نقارن متوسطات المعالجات μ_{ij} عند وجود تفاعلات مهمة. ونبدأ بمناقشة تحليل تأثيرات العوامل عندما لايتفاعل العاملان أو يتفاعلان، فقط، بطريقة غير مجدية.

شكل (١٩ـ١) استراتيجية تحليل دراسات ثنائية العامل.



(١٩-٢) تحليل تأثيرات العوامل عندما لايتفاعل العاملان

كما رأينا لتوّنا، فإن تحليل تأثيرات العوامل يتضمن عـادة متوسـطات مسـتويات العوامل $\mu_{i.}$ و $\mu_{.j}$ ، فقط، وذلك عندما لايتفاعل العاملان، أو عندما يتفـاعلان، فقـط، بصورة غير مهمة. وقبـل المضيّ في طـرق التقديـر الرسميـة، مـن المفيـد، عـادة، رسـم متوسطات مستويات العوامل المقـدَّرة في رسـم احتمـال طبيعـي كمـا هـو موضـح في الفقرة ١٥-١ من أجل دراسات أحادية العامل.

تقدير متوسط مستوى عامل

المقدَّرات النقطية غير المنحازة لِـ $\mu_{i.}$ و $\mu_{.j}$ هي:

$$\hat{\mu}_{i.} = \bar{Y}_{i..} \qquad (19.1a)$$

$$\hat{\mu}_{.j} = \bar{Y}_{.j.} \qquad (19.1b)$$

حيث $\bar{Y}_{i..}$ و $\bar{Y}_{.j.}$ معرفان في (18.27d) و (18.27f) ، على الترتيب، وتباين $\bar{Y}_{i..}$ هو :

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{i..}\} = \frac{\sigma^2}{bn} \qquad (19.2a)$$

باعتبار أن $\bar{Y}_{i..}$ يتضمن bn من المشـاهدات المستقلة، ولكـل منهـا تبـاين σ^2. ولدينـا بصورة مشابهة:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{.j.}\} = \frac{\sigma^2}{an} \qquad (19.2b)$$

ونحصل على مقدَّرات غير منحازة لهذه التباينات بوضع MSE بدلا من σ^2:

$$s^2\{\bar{Y}_{i..}\} = \frac{MSE}{bn} \qquad (19.3a)$$

$$s^2\{\bar{Y}_{.j.}\} = \frac{MSE}{an} \qquad (19.3b)$$

وتستخدم حدود الثقة لِـ $\mu_{i.}$ و $\mu_{.j}$، كالعادة، التوزيع t :

$$\bar{Y}_{i..} \pm t[1-\alpha/2;(n-1)ab]s\{\bar{Y}_{i..}\} \qquad (19.4a)$$

$$\bar{Y}_{.j.} \pm t[1-\alpha/2;(n-1)ab]s\{\bar{Y}_{.j.}\} \qquad (19.4b)$$

ودرجات الحرية $(n-1)ab$ هي تلك المصاحبة لِـ MSE .

تقدير مقارنة متوسطات مستويات عامل

تُقدَّر المقارنة بين متوسطات مستويات العامل $\mu_{i.}$، وهي :

$$L = \sum c_i \mu_{i.} \qquad \text{حيث: } \sum c_i = 0 \tag{19.5}$$

تقديرا غير منحاز بالمقدار:

$$\hat{L} = \sum c_i \overline{Y}_{i..} \tag{19.6}$$

ومن استقلال $\overline{Y}_{i..}$ نجد أن تباين هذا المقدَّر هو:

$$\sigma^2\{\hat{L}\} = \sum c_i^2 \sigma^2\{\overline{Y}_{i..}\} = \frac{\sigma^2}{bn} \sum c_i^2 \tag{19.7}$$

والمقدَّر غير المنحاز لهذا التباين هو:

$$s^2\{\hat{L}\} = \frac{MSE}{bn} \sum c_i^2 \tag{19.8}$$

وأخيرا، فإن حدي الثقة للمقارنة L ، بمعامل ثقة $(1 - \alpha)$ هما:

$$\hat{L} \pm t[1 - \alpha/2; (n-1)ab] s\{\hat{L}\} \tag{19.9}$$

ولتقدير المقارنة بين متوسطات مستويات العامل $\mu_{.j}$:

$$L = \sum c_i \mu_{.j} \qquad \text{حيث: } \sum c_j = 0 \tag{19.10}$$

نستخدم المقدَّر:

$$\hat{L} = \sum c_i \overline{Y}_{.j.} \tag{19.11}$$

وبتباينه المقدَّر:

$$s^2\{\hat{L}\} = \frac{MSE}{an} \sum c_j^2 \tag{19.12}$$

والـ $(1-\alpha)$ حدي ثقة في (19.9) للمقارنة L لاتزال قابلة للتطبيق، حيث $\hat{L}$ و $s\{\hat{L}\}$ معرفان الآن في(19.11) و (19.12)، على الترتيب.

تقدير تركيب خطي في متوسطات مستويات عامل

يمكن تقدير التركيب الخطي في متوسطات مستويات العامل $\mu_{i.}$، وهو:

$$L = \sum c_i \mu_{i.} \tag{19.13}$$

تقديرا غير منحـاز بالإحصـاءة $\hat{L}$ في (19.6). وتبـاين هـذا المقـدّر معطى في (19.7).

والمقدّر غير المنحاز لهذا التباين معطى في (19.8) . والـ $(1-\alpha)$ حدي ثقة للمقدار L معطيان في (19.9).

وهناك نتائج مشابهة لتركيب خطي في متوسطات مستويات العامل μ_j:

$$L = \sum c_j \mu_{.j} \tag{19.14}$$

مقارنات ثنائية متعددة لمتوسطات مستويات عامل

نهتم عادة بأكثر من مقارنة واحدة، ويمكن تطبيق المقارنات المتعددة في الفصل ١٥ بعد تعديلات طفيفة، فقط. وإذا أردنا القيام بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات مستويات عامل $\mu_{i.}$ ، أو بعدد كبير منها، وهي مقارنات من الشكل:

$$D = \mu_{i.} - \mu_{i'.}$$

فإن طريقة توكي في (15.25) هي طريقة مناسبة. وتكون الصيغ كمايلي (وهي تعكس حالة حجوم عينات متساوية التي نعتبرها هنا):

$$\hat{D} = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{i'..} \tag{19.16a}$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2\,MSE}{bn} \tag{19.16b}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1-\alpha; a, (n-1)ab] \tag{19.16c}$$

وحدا الثقة هما كالمعتاد:

$$\hat{D} = \pm Ts\{\hat{D}\} \tag{19.17}$$

واحتمال أن تكون هذه العائلة من العبارات جميعها صحيحة هو عندئذ $(1 - \alpha)$.

ومن أجل مقارنات ثنائية بين متوسطات مستويات العامل μ_j تكون التغييرات الوحيدة هي:

$$D = \mu_{.j} - \mu_{.j'} \tag{19.18a}$$

$$\hat{D} = \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{.j'.} \tag{19.18b}$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2\,MSE}{an} \tag{19.18c}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1-\alpha; b, (n-1)ab] \tag{19.18d}$$

وإذا أردنا القيام بعدد قليل، فقط، من المقارنات الثنائية، فقد تكون طريقة

بونفيروني أفضل. وجميع الصيغ السابقة تبقى في هذه الحالة قابلة للتطبيق، باستثناء أننا نستبدل مضاعف بونفيروني B بمضاعف توكي T:

$$B = t[1 - \alpha/2g; (n-1)ab] \tag{19.19}$$

حيث g هو عدد العبارات في العائلة.

وإذا رغبنا بمعامل ثقة عائلي $(1 - \alpha)$ لمجموعة مشتركة من المقارنات الثنائية تتضمن كلا من متوسطات العاملين A و B، فيمكن استخدام طريقة بونفيروني مباشرة، حيث يمثل g العدد الكلي من العبارات في المجموعة المشتركة. وكبديل لذلك يمكن استخدام طريقة بونفيروني مقترنة مع طريقة توكي. ولتوضيح هذا الاستخدام افترض أن المقارنات الثنائية للعامل A قد تمت بطريقة توكي وبمعامل ثقة عائلي 0.95، وكذلك الأمر بالنسبة للمقارنات الثنائية للعامل B. فعندئذٍ تؤكد لنا متباينة بونفيروني أن معامل الثقة العائلي للمجموعة المشتركة من المقارنات للعاملين كليهما هو، على الأقل 0.90 .

مقارنات متعددة لمتوسطات مستويات عامل

عندما نهتم بعدد كبير من المقارنات بين متوسطات مستويات العامل $\mu_{i.}$ أو $\mu_{.j}$، فينبغي استخدام طريقة شيفّه. وإذا تضمنت المقارنات $\mu_{i.}$ ، كما في (19.5) ، فالمقدِّر غير المنحاز معطى في (19.6) وتباينه المقدَّر في (19.8). وفي هذه الحالة نعرف مضاعف شيفّه بالعلاقة:

$$S^2 = (a-1)F[1-\alpha; a-1, (n-1)ab] \tag{19.20}$$

مما يقود إلى حدي الثقة L:

$$\hat{L} \pm S s\{\hat{L}\} \tag{19.21}$$

للمقارنة L. وعندئذ يمثل $(1 - \alpha)$ احتمال أن تكون كل فترة ثقة (19.21) ، في عائلة جميع المقارنات الممكنة، صحيحة.

وإذا رغبنا بمقارنات بين متوسطات مستوى العامل $\mu_{.j}$ ، فالمقدِّر النقطي غير المنحاز معطى في (19.11)، وتباينه المقدَّر معطى في (19.12)، ويكون حدا ثقة شيفّه (19.21) مناسبين مع:

$$S^2 = (b - 1)F[1 - \alpha; b - 1, (n - 1)ab] \qquad (19.22)$$

وعندما يكون عدد المقارنات موضع الاهتمام صغيرا فقد تكون طريقة بونفيروني أفضل. وعندئذ نحتاج إلى تعديل حدي الثقة (19.21) بوضع مضاعف بونفيروني B:

$$B = t[1 - \alpha/2g; (n-1)ab] \qquad (19.23)$$

بدلا من S مضاعف شيفّه، حيث g عدد العبارات في العائلة.

وعندما نرغب الحصول على معامل ثقة عائلي للمجموعة المشتركة من المقارنات العاملية فهناك عدة إمكانيات:

١- يمكن استخدام طريقة بونفيروني مباشرة، حيث يمثل g عدد العبارات الكلي في المجموعة المشتركة.

٢- يمكن استخدام طريقة بونفيروني لدمج عائلتي المجموعتين من مقارنات شيفّه المتعددة، وذلك بالطريقة نفسها المشروحة آنفا لدمج مجموعتي توكي.

٣- يمكن تعديل طريقة شيفّه فنستخدم المضاعف S المعرّف بالعلاقة:

$$S^2 = (a + b - 2)F[1 - \alpha; a + b - 2, (n - 1)ab] \qquad (19.24)$$

وعند استخدام هذا المضاعف S في المجموعتين كلتيهما من المقارنات المتعددة، فإن $(1 - \alpha)$ يمثل احتمال أن تكون جميع العبارات في العائلة الموحدة عبارات صحيحة.

ويمكن أن نجرّب الأساليب الثلاثة هذه لنرى أيها يقود إلى فترات الثقة الأضيق، وذلك دون التأثير في مشروعية الطريقة.

تقديرات مبنية على متوسطات معالجات

عند تحليل تأثيرات العوامل في دراسات ثنائية العامل مع عدم وجود تفاعل، قد يهتم المحلل، من وقت لآخر، بمتوسطات معالجات μ_{ij} بعينها. وعلى سبيل المثال، في دراسات ثنائية العامل تتناول تأثيرات السعر ونوع الدعاية على المبيعات، قد نهتم بتقدير متوسط المبيعات لمستويين مختلفين للسعر وذلك عند استخدام دعاية معينة. وفي مثل هذه الحالات تكون طرق تحليل دراسات أحادية العامل التي ناقشناها في الفصل ١٥مناسبة. وعدد المعاجات الآن هو، ببساطة، $r = ab$ وعدد درجات الحرية المصاحب لـ MSE هو $n_T - r = nab - ab = (n - 1)ab$، ومتوسطات المعالجات المقدّرة

هي $\bar{Y}_{ij.}$ مبنيّ، كل منها، على n من المشاهدات.

مثال ١ ـ مقارنات مثنى مثنى لمتوسطات مستويات عامل

في مثال شركة كاسل للمعجنات في الفصل ١٨، اقترح رسم المتوسطات المقدّرة للمعالجات في الشكل (١٨ـ٥) عدم وجود تأثيرات تفاعل، وقد دعّم تحليل التباين الرسمي المبني على الجدول (١٨ـ١٠) هذه النتيجة. لنفترض الآن أننا لم نقم بأية اختبارات حول التأثيرات الرئيسة للعوامل، وأننا نرغب في تحليل تأثيرات عرض الرف وارتفاعه بواسطة طرق التقدير.

وسنقوم بالتحليل بدلالة متوسطات مستويات العامل باعتبار أنه لاتوجد تأثيرات تفاعل. نرسم أولا متوسطات مستويات العامل المقدّرة المعطاة في الجدول (١٨ـ٧) في رسوم احتمال طبيعي. ويتضمن الشكل (١٩ـ٢)أ رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل A المقدّرة وهي $\bar{Y}_{i..}$، كما يتضمن الشكل (١٩ـ٢)ب رسما مماثلا لمتوسطات مستويات العامل B المقدّرة وهي $\bar{Y}_{.j.}$، وهذه الرسومات معدّة بالطريقة نفسها كتلك الموجودة في الشكل (١٥ـ٣)ب لدراسة أحادية العامل. ومرة أخرى، نبيّن في كل رسم خط: القيمة المتوقعة = y، وهي تمثل القيم المتوقعة جميعها لو أن متوسطات مستويات العوامل كانت متساوية. ونحصل على القيم المتوقعة كما يلي:

العامل A:
$$\bar{Y}_{...} + z\left(\frac{i-.375}{a+.25}\right)\sqrt{\frac{MSE}{bn}}$$

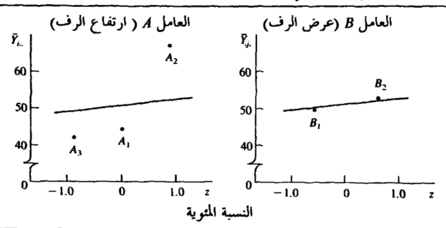
العامل B:
$$\bar{Y}_{...} + z\left(\frac{i-.375}{b+.25}\right)\sqrt{\frac{MSE}{an}}$$

ويقترح الشكل (١٩ـ٢)أ أن المستوى الثاني للعامل A (ارتفاع متوسط للرفّ) يؤدي إلى مبيعات أكبر بصورة مهمة من المستويين الآخرين للعامل. ويشير الشكل (١٩ـ٢)ب. وهو من الطراز نفسه كالشكل (١٥ـ٢)أ، إلى عدم وجود تأثيرات لمستويات عرض الرف.

وبالعودة الآن إلى طرق التقدير الرسمية فسنقوم الآن بمقارنات ثنائية بين متوسطات مستويات العامل وذلك لكل من العوامل المدروسة، وبمعامل ثقة عائلي

90% للمقارنات كافة. وسنستخدم طريقة توكي للمقارنات المتعددة بمعامل ثقة 95% للمقارنات المتعلقة بارتفاع الرف، وكذلك الأمر بالنسبة للمقارنات المتعلقة بعرض الرف. وتضمن متباينة بونفيروني عندئذ معامل ثقة عائلي لايقل عن 90% لمجموعة المقارنات كلها.

شكل (١٩-٢) رسوم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل المقدّرة ـ مثال شركة كاسل للمعجنات



ولمقارنة متوسطات ارتفاع الرف (i=1 يمثل الأدنى، i=2 يمثل الوسط، i=3 يمثل الأعلى) نجد من الجدولين (١٨-٧) و(١٨-٨) ما يلي:

$$MSE = 10.3 \qquad \bar{Y}_{2..} - \bar{Y}_{1..} = 67 - 44 = 23$$

$$a = 3$$

$$b = 2 \qquad \bar{Y}_{1..} - \bar{Y}_{3..} = 44 - 42 = 2$$

$$n = 2$$

$$(n-1)ab = 6 \qquad \bar{Y}_{2..} - \bar{Y}_{3..} = 67 - 42 = 25$$

وبالتالي نجد من (19.16):

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2(10.3)}{2(2)} = 5.15$$

$$q(.95;3,6) = 4.34$$

$$T = \frac{4.34}{\sqrt{2}} = 3.07$$

$$Ts\{\hat{D}\} = 3.07\sqrt{5.15} = 7.0$$

وبصورة مماثلة، نجد من أجل مقارنة متوسطات عرض الرف (j=1 يمثل عادي،

$j=2$ يمثل عريض) ما يلي مستخدمين (19.18):

$$\overline{Y}_{2.}-\overline{Y}_{1.}=52-50=2$$

$$s^2\{\hat{D}\}=\frac{2(10.3)}{3(2)}=3.43$$

$$q(.95;2,6)=3.46$$

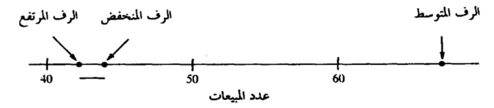
$$T=\frac{3.46}{\sqrt{2}}=2.45$$

$$Ts\{\hat{D}\}=2.45\sqrt{3.43}=4.5$$

وبالتالي نحصل على فترات الثقة التالية لجميع المقارنات الثنائية لمتوسطات مستويات عامل:

$$16=23-7.0\le\mu_{2.}-\mu_{1.}\le 23+7.0=30$$
$$-5=2-7.0\le\mu_{1.}-\mu_{3.}\le 2+7.0=9$$
$$18=25-7.0\le\mu_{2.}-\mu_{3.}\le 25+7.0=32$$
$$-2.5=2-4.5\le\mu_{2}-\mu_{1.}\le 2+4.5=6.5$$

وبمعامل ثقة عائلي 90 في المائة للمجموعة المشتركة من المقارنات يمكن أن نستنتج من فترات الثقة هذه أن الرف متوسط الارتفاع أفضل بكثير من الارتفاعين العالي أو المنخفض، وذلك من أجل المُنتَج المدروس، وأنواع المخازن التي تناولتها التجربة، وأن الارتفاعين الأخيرين، المنخفض والعالي، لايختلفان بصورة مهمة في تأثيرهما على المبيعات. ومعامل الثقة العائلي 90% يُغطّي هذ النتائج كافة. ويمكن تلخيص تأثير ارتفاع الرف بصورة بيانية كما يلي:



مثال ٢ ـ تقدير متوسطات معالجات

يتوفر حيِّز كاف، فقط، لرفوف متوسطة العرض في سوق مركزية مشابهة، من حيث الزبائن وحجم المبيعات، للأسواق المركزية التي شملتها دراسة "شركة كاسل للمعجنات"، ويرغب مدير هذه السوق في الحصول على تقديرات لمتوسط مبيعات كل من الرف متوسط الارتفاع والرف عالي الارتفاع. وسنحصل على تقديري فترة

بمعامل ثقة عائلي 90% مستخدمين طريقة بونفيروني.

لدينا من الجدولين (١٨-٧) و(١٨-٨)، ما يلي:

$$\overline{Y}_{21.} = 65 \qquad \overline{Y}_{31.} = 40 \qquad MSE = 10.3$$

ونحصل بالتالي على:

$$s^2\{\overline{Y}_{21.}\} = s^2\{\overline{Y}_{31.}\} = \frac{MSE}{n} = \frac{10.3}{2} = 5.15$$

$$s\{\overline{Y}_{21.}\} = s\{\overline{Y}_{31.}\} = 2.27$$

ومن أجل $g = 2$ ، نحتاج إلى $B = t[1-\alpha/2g;(n-1)ab] = t(.975;6) = 2.447$ وهكذا نجد حدي الثقة:

$$65 \pm 2.447(2.27) \qquad 40 \pm 2.447(2.27)$$

وفترتا الثقة المطلوبتان هما:

$$59.4 \le \mu_{21} \le 70.6 \qquad 34.4 \le \mu_{31} \le 45.6$$

(١٩-٣) تحليل تأثيرات العوامل عندما تكون التفاعلات مهمة

عند وجود تفاعلات مهمة لا يمكن جعلها غير مهمة عن طريق تحويل بسيط، فيجب أن يُبنى تحليل تأثيرات العوامل، بصورة عامة، على متوسطات المعالجات μ_{ij}. وبصورة تقليدية، سيتضمن هذا التحليل مقارنات متعددة أو اختبارات بدرجة واحدة من الحرية لمتوسطات المعالجات.

مقارنات ثنائية متعددة لمتوسطات المعالجات

إذا أردنا مقارنة أزواج من متوسطات المعالجات μ_{ij} ، فيمكن استخدام أي من طريقتي بونفيروني أو توكي للمقارنات المتعددة، ويعتمد هذا على الطريقة منهما الأكثر فائدة. وفي الواقع، يكافئ التحليل هنا التحليل في حالة عامل وحيد بعدد من المعالجات يساوي $r = ab$. ودرجات الحرية المصاحبة لِـ MSE هي هنا $n_T - r = (n-1)ab$ ومتوسط المعالجة المقدَّر، ونرمز له الآن بالرمز $\overline{Y}_{ij.}$ ، ينطوي على n من المشاهدات. وتصبح الصيغة (15.25) لطريقة توكي لمقارنات متعددة $D = \mu_{ij} - \mu_{i'j'}$، مع حجوم متساوية

للعينات:

$$\hat{D} \pm Ts\{\hat{D}\} \qquad i, j \neq i', j' \tag{19.25}$$

حيث:

$$\hat{D} = \overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i'j'.} \tag{19.25a}$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2\,MSE}{n} \tag{19.25b}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q\left[1-\alpha; ab, (n-1)ab\right] \tag{19.25c}$$

وإذا استخدمنا طريقة بونفيروني يكون المضاعف B في فترة الثقة:

$$B = t[1 - \alpha / 2g; (n-1)ab] \tag{19.26}$$

حيث g عدد العبارات في العائلة.

متضادات متعددة لمتوسطات المعالجات

يمكن، بصورة مباشرة، تطبيق طريقة شيفّه لمقارنات متعددة في دراسات وحيدة العامل، وذلك لتقدير متضادات تتضمن متوسطات المعالجات μ_{ij}. ونرمز لهذه المتضادات كما يلي:

$$L = \sum\sum c_{ij}\mu_{ij} \quad \text{حيث:} \quad \sum\sum c_{ij} = 0 \tag{19.27}$$

والمقدِّر النقطي للمتضادة L هو:

$$\hat{L} = \sum\sum c_{ij}\overline{Y}_{ij.} \tag{19.28}$$

والتباين المقدَّر لهذا المقدِّر هو:

$$s^2\{\hat{L}\} = \frac{MSE}{n}\sum\sum c_{ij}^2 \tag{19.29}$$

ومضاعف شيفّه، S ، معطى بالعلاقة:

$$S^2 = (ab - 1)F[1 - \alpha; ab - 1, (n - 1)ab] \tag{19.30}$$

والحدود المشتركة للثقة هي كالعادة:

$$\hat{L} \pm Ss\{\hat{L}\} \tag{19.31}$$

ومع عدد قليل من المتضادات، يمكن أن تكون طريقة بونفيروني أفضل. ويمكن ببساطة تعديل فترتي الثقة (19.31) بوضع B، كما عرفناها في (19.26) ، بدلا من S.

اختبارات بدرجة واحدة من الحرية لمتوسطات معالجات

قد تكون اختبارات بدرجة واحدة من الحرية لمتوسطات معالجات μ_{ij} مهمة أحيانا، عند وجود تفاعلات مهمة. والبدائل ثنائية الجانب لاختبار بدرجة واحدة من الحرية هي هنا كما يلي:

$$\begin{aligned} H_0&: \sum\sum c_{ij}\,\mu_{ij} = c \\ H_a&: \sum\sum c_{ij}\mu_{ij} \neq c \end{aligned} \qquad (19.32)$$

حيث c_{ij} و c ثوابت مناسبة.

ولاختبار البدائل (19.32) يمكن استخدام إحصاءة الاختبار t^*، حيث:

$$t^* = \frac{\sum\sum c_{ij}\overline{Y}_{ij.} - c}{\sqrt{\frac{MSE}{n}\sum\sum c_{ij}^2}} \qquad (19.33)$$

وهي تتبع، عندما تكون H_0 صحيحة، التوزيع t بدرجات حرية عدّتها $(n\text{-}1)ab$. وبصورة بديلة، يمكن استخدام إحصاءة الاختبار $F^* = (t^*)^2$ التي تتبع التوزيع F بدرجات من الحرية 1 و $(n\text{-}1)ab$)، وذلك عندما تكون صحيحة H_0.

وعند القيام بعدد من الاختبارات بدرجة واحدة من الحرية مع مستوى معنوية عائلي محدد، ينبغي استخدام طريقة مقارنات متعددة مناسبة (توكي، شيفّه، بونفيروني) لتحديد فترات ثقة مناسبة. وستبيّن فترات الثقة أي البديلين (في بديل ثنائي الجانب) ينبغي أخذه في الاعتبار في كل حالة، وذلك وفقا لما شرحنا في الفصل ١٥ في حالة دراسات وحيدة العامل.

مثال ١ـ مقارنات ثنائية لمتوسطات المعالجات

قامت كلية متوسطة بدراسة تأثيرات طريقة التعليم (عامل A) والمقدرة الكمية للطالب (عامل B) على تعلّم رياضيات الكلية. وقد دُرست طريقتان للتعليم ـ الطريقة المعتادة في التعليم (وسنسميها الطريقة القياسية)، والطريقة التي تؤكد على تعليم المفاهيم بصورة مجردة قبل المضي إلى المهارات التطبيقية (وسنسميها الطريقة المجردة). وحُددت المقدرة الكمية للطالب من خلال اختبار قابلية قياسي، صنّف الطالب على

أساسه إلى ممتاز أو جيد أو معتدل في قدرته الكمية. وهكذا يكـون للعـامل A في هـذه الدراسة (طريقة التعليم) $a = 2$ من المستويات، وللعامل B (المقـدرة الكميـة للطـالب) $b = 3$ مستويات.

وقد اختير لكل من فئات المقدرة الكمية 42 طالبا وخُصِّصوا بصورة عشوائية إلى فصول دراسية وفقا لطرق التعليـم المحددة بحيث يتضمـن كـل فصـل دراسـي أعـدادا متساوية من الطلاب من كل مستوى من مستويات المقدرة الكمية. وللتبسيط، افترض أن أية تأثيرات يمكن نسبتها إلى الفصول هي تأثيرات مهملة.

وكان المتغير التابع هو مقدار التعلّم من رياضيات الكليـة مقاسـا باختبـار قياسـي للتحصيل الرياضي. و نتائج الدراسة ملخصة في الجـدول (١٩ــ١) (البيانـات الأصليـة غير معطاة) و المتوسـطات المقـدَّرة للمعالجـات مبينـة في الجـدول (١٩ــ١)أ، وجـدول تحليل التباين معطى في الجدول (١٩ـ١)ب.

ويتضمـن الشـكل (١٩ــ٣) رسمـين للمتوسـطات المقـدَّرة للمعالجـات $\bar{Y}_{ij.}$. وفي الشكل (١٩ـ٣)أ يمثل المنحنيان المستويين المختلفين للعامل A، وفي الشكل (١٩ــ٣)ب تمثل المنحنيات الثلاثة المستويات المختلفة للعامل B. ويقترح النقص الواضح في تـوازي المنحنيات وجود تأثـيرات تفـاعل بـين طريقـة التعليـم والمقـدرة الكميـة للطـالب علـى حصيلة التعلّم من الرياضيات. ويؤكد اختبار رسمي للتفاعل هذه النتيجة. فمن الجـدول (١٩ـ١)ب، لدينا $F^* = MSAB / MSE = 325.5 / 28 = 11.625$ ومن أجل $\alpha = .01$ نحتاج إلى $F(.99;2,120) = 4.79$ وبما أن $F^* = 11.625 > 4.79$، فنسـتنتج وجـود تأثيرات تفاعل. والقيمة ـP لهذا الاختبار هي 0^+.

ويقـترح الشـكل (١٩ــ٣) أن التفـاعلات مهمـة: الطـلاب ذوو المقـدرة الكميـة الممتازة لم يتأثروا إلا قليلا بطريقة التعليم (ربما كـان أداؤهـم أفضـل قليـلا في الطريقـة المجردة)، والطلاب ذوو القدرات الكمية الجيدة أو المعتدلة تعلموا أفضل بكثـير بطريقـة التعليم القياسية. وبالتالي، فسنتحرّى أولا ما إذا كـان يمكـن لتحويـل بسـيط أن يجعـل التفاعلات غير مهمة. ونقوم بذلك بطريقة تقريبيـة بتـأمل بعـض التحويـلات لِـ $\bar{Y}_{ij.}$.

ونقدّم في الشكل (١٩-٤)أ منحنيي طريقة التعليم من أجل $\overline{Y}'_{ij.}=\sqrt{\overline{Y}_{ij.}}$، وفي الشكل (١٩-٤)ب نقدّم منحنيي طريقة التعليم من أجل $\overline{Y}'_{ij.}=\log_{10}\overline{Y}_{ij.}$. ولم تصبح التفاعلات غير مهمة في أي من التحويلين، وهكذا يبدو أن التفاعلات هنا غير قابلة للتحويل.

جدول (١٩-١) نتائج دراسة تعلّم الرياضيات

أ) متوسطات درجات التعلّم

طريقة التعليم	المقدرة الكمية (j) ممتاز	جيد	معتدل
مجرّدة	$92(\overline{Y}_{11.})$	$81(\overline{Y}_{12.})$	$73(\overline{Y}_{13.})$
قياسية	$90(\overline{Y}_{21.})$	$86(\overline{Y}_{22.})$	$82(\overline{Y}_{23.})$

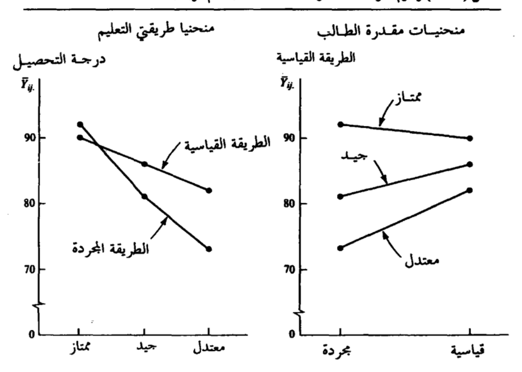
ب) جدول التحاين

مصدر التغير	*SS*	*df*	*MS*
ما بين المعالجات	4,998	5	999.6
عامل A (طريقة التعلم)	504	1	504
عامل B (المقدرة الكمية)	3,843	2	1,921.5
تفاعلات $A B$	651	2	325.5
الخطأ	3,360	120	28
المجموع	8,358	125	

ونمضي الآن إلى دراسة طبيعة تأثيرات التفاعل في الشكل (١٩-٣) ونقوم بذلك من خلال تقدير مدى الفرق في متوسط التعلّم بالنسبة لطريقتي التعليم وذلك بصورة منفصلة من أجل كل من فئات الطلاب ذوي المقدرة الكمية الممتازة والجيدة والمعتدلة، وهكذا نرغب في تقدير:

$$D_1 = \mu_{11} - \mu_{21}$$
$$D_2 = \mu_{21} - \mu_{22} \qquad (19.34)$$
$$D_3 = \mu_{13} - \mu_{23}$$

شكل (١٩-٣) رسوم المتوسطات المقدّرة للمعالجات - مثال تعلّم الرياضيات.



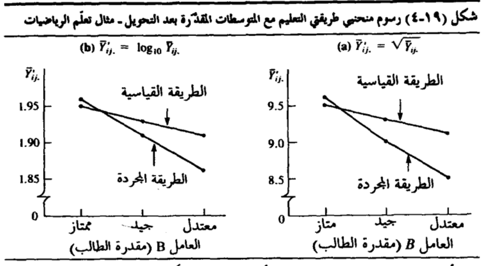
وسنستخدم طريقة المقارنات المتعددة لبونفيروني بمعامل ثقة عائلي 0.95.

(بما أن اهتمامنا يقتصر هنا على ثلاث مقارنات ثنائية، فقط، فإن طريقة بونفيروني تنتج تقديرات أكثر دقة من طريقة توكي).

وباستخدام بيانات الجدول (١٩-١)أ، نجد التقديرات النقطية التالية للمقارنات الثنائية:

$$\hat{D}_1 = 92 - 90 = 2$$
$$\hat{D}_2 = 81 - 86 = -5 \qquad (19.35)$$
$$\hat{D}_3 = 73 - 82 = -9$$

شكل (١٩-٤) رسوم منحني طريقتي التعليم مع المتوسطات المقدّرة بعد التحويل - مثال تعلّم الرياضيات



وبما أن $n = 21$ ، فنجد من (19.25b) أن التباينات المقدَّرة لهذه التقديرات هي:

$$s^2\{\hat{D}_1\} = s^2\{\hat{D}_2\} = s^2\{\hat{D}_3\} = \frac{2(28)}{21} = 2.667$$

وبذلك يكون:

$$s\{\hat{D}_1\} = s\{\hat{D}_2\} = s\{\hat{D}_3\} = 1.633$$

وأخيرا، من أجل معامل ثقة عائلي $\alpha = 0.95\text{-}1$ و $g = 3$ ، نحتاج إلى $B = t[1\text{-}.05/2(3);120] = t(.99167;120) = 2.428$ وبالتالي، ومن (19.25) تكون حدود الثقة:

$$2 \pm 2.428(1.633) \quad -5 \pm 2.428(1.633) \qquad -9 \pm 2.428(1.633)$$

والـ 95% فترات ثقة لعائلة المقارنات هي:

$$-1.96 \le \mu_{11} - \mu_{21} \le 5.96$$
$$-8.96 \le \mu_{12} - \mu_{22} \le -1.04$$
$$-12.96 \le \mu_{13} - \mu_{23} \le -5.04$$

ومن هذه العائلة من فترات الثقة يمكن أن نستخلص النتائج التالية، بمعامل ثقة عائلي 95%: (١) من أجل الطلاب ذوي المقدرة الكمية الممتازة لا يختلف متوسطا درجة التعلم لطريقتي التعليم. (٢) من أجل كل من فئتي الطلاب ذوي المقدرة الكمية الجيدة والمعتدلة يكون متوسط درجة التعلّم المجردة أقل مما هو في الطريقة القياسية وقد يكون تفوق طريقة التعليم القياسية أقوى في حالة الطلبة ذوي القدرات الكمية

المعتدلة.

مثال ٢ ـ متضادات متوسطات المعالجات

رغب مدير مدرسة في معرفة ما إذا كان مقدار الكسب في التحصيل في مثال تعلّم الرياضيات العائد لطريقة التعليم القياسية بالمقارنة مع الطريقة المجردة أكبر في حالة الطلاب ذوي المقدرة الكمية المعتدلة منه في حالة الطلاب ذوي المقدرة الكمية الجيدة. وقد أثير هذا التساؤل قبل بدء الدراسة. وسنقدّر هنا المتضادة الوحيدة:

$$L = (\mu_{23} - \mu_{13}) - (\mu_{22} - \mu_{12}) \qquad (19.36)$$

مستخدمين حد الثقة الأدنى في فترة ثقة وحيدة الجانب، وباستخدام النتائج في الجدول (١٩ـ١)أ نجد أن التقدير النقطي للمقدار L هو $\hat{L} = (82 - 73) - (86 - 81) = 4$. ومن (19.29) نجد أن التباين المقدّر هو:

$$s^2\{\hat{L}\} = \frac{28}{21}\left[(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2\right] = 5.333$$

أي أن الانحراف المعياري هو $s\{\hat{L}\} = 2.09$ ولمعامل ثقة 95% نحتاج إلى $t(.05;120) = -1.658$. وبالتالي يكون حد الثقة الأدنى $4 - 1.658(2.309)$ وفترة الثقة المرغوبة هي :

$$L \geq .17$$

ونستنتج بالتالي، وبمعامل ثقة 95 بالمائة، أن الكسب في التعلّم في طريقة التعليم القياسية فوق الطريقة المجردة هو أكبر في حالة الطلاب ذوي المقدرة المعتدلة منه في حالة الطلاب ذوي المقدرة الجيدة، والفرق في الكسب هو في المتوسط 0.17 نقطة على الأقل.

(١٩ـ٤) التحليل عندما لاتكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية

ذكرنا في الفصل ١٨ أنه عندما لاتكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية، ولاتكون صيغ التحاين المعتادة لاختبار تأثيرات العوامل صيغا مناسبة لاختبار التأثيرات الرئيسة للعاملين A و B وأننا نحتاج بدلا من ذلك إلى استخدام أسلوب الاختبار الخطي العام.

وعلى أي حال، فلأغراض تقدير تأثيرات العوامل، لا تبرز تعقيدات إضافية عندما لاتكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية. ولاتزال صيغ الفقرة ١٩ـ٣ الخاصة بمتضادات متوسطات المعالجات وبالاختبارات ذات الدرجة الواحدة من الحرية

قابلة للتطبيق في هذه الحالة.

ونوضح تحليل تأثيرات العوامل، عندما لاتكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية، بالعودة إلى مثال تعلم الرياضيات.

مثال

في مثال تعلّم الرياضيات طلب مدير مدرسة معلومات عن طريقة التعليم التي تقود إلى تعلم أفضل لرياضيات الكلية عندما يكون لعشرين بالمائة من الطلاب في الفصل مقدرة كمية ممتازة، ولخمسين بالمئة مقدرة جيدة، ولثلاثين بالمائة مقدرة معتدلة. ومتوسطا درجات التعلم في فصل مختلط كهذا هما، من أجل طريقتي التعليم، التركيبان الخطيان التاليان في متوسطات المعالجات:

(19.37) طريقة مجردة: $L_1 = .2\mu_{11} + .5\mu_{12} + .3\mu_{13}$

طريقة قياسية: $L_2 = .2\mu_{21} + .5\mu_{22} + .3\mu_{23}$

ويفترض هذا أن متوسط درجات التعلم لطلاب ذوي قدرات مختلفة سوف لايتأثر بوجود خليط في الفصل مختلف إلى حد ما عما افتُرض في الدراسة التجريبية.

ويمكننا هنا تنفيذ اختبار بدرجة واحدة من الحرية من أجل تأثير طريقة التعليم أو استنباط تقدير بفترة، وسنقوم بهذا الأخير لأن فترة الثقة ستُقدِّم معلومات ليس عن اتجاه أي فرق موجود بين طريقتي التعليم، فقط، ولكن، أيضا، عن مدى هذا الفرق.

والتقديرات النقطية للمتوسطات في (19.37) هي:

$$\hat{L}_1 = .2(92) + .5(81) + .3(73) = 80.8$$

$$\hat{L}_2 = .2(90) + .5(86) + .3(82) = 85.6$$

والفرق بين المتوسطين في (19.37) هو متضادة :

$$L = L_1 - L_2 \qquad (19.38)$$

وتقدير هذه المتضادة هو:

$$\hat{L} = \hat{L}_1 - \hat{L}_2 = 80.8 - 85.6 = -4.8$$

والتباين المقدّر للتقدير $\hat{L}$ هو، باستخدام (19.29):

$$s^2\{\hat{L}\} = \frac{28}{21}\left[(.2)^2 + (.5)^2 + (.3)^2 + (-.2)^2 + (-.5)^2 + (-.3)^2\right] = 1.013$$

أي أن الانحراف المعياري المقدَّر هو $s\{\hat{L}\}=1.006$. ومن أجل 95% معامل ثقة، نحتاج إلى $t(.975;120) = 1.980$. وبالتالي يكون حدا الثقة $-4.8 \pm 1.980(1.006)$ وفترة الثقة المرغوبة هي:

$$-6.79 \leq L \leq -2.81$$

ونستنتج بمعامل ثقة 95% أن طريقة التعليم القياسية هي الأفضل لهذا الخليط المحدد من الطلاب، وتقود إلى متوسط درجة تعلّم أكبر من متوسط درجة التعلم بالطريقة المجرَّدة بما لايقل عن 2.8 نقطة وربما كان أكبر بـ 6.8 من النقاط.

ولو رغبنا في اختبار رسمي لما إذا كان متوسط درجة التعلم (L_2) في الفصل المختلط، كما حدده مدير المدرسة، الخاص بطريقة التعليم القياسية يتجاوز ذلك الخاص بالطريقة المجردة (L_1) أم لا، فستكون البدائل:

$$H_0: L_2 \leq L_1 \quad \text{أو} \quad H_0: L_1 - L_2 \geq 0$$

$$H_a: L_2 > L_1 \quad \text{أو} \quad H_a: L_1 - L_2 < 0$$

حيث L_1 و L_2 معرفان في (19.37). وبالنظر إلى الطبيعة وحيدة الجانب للبدائل، سنستخدم إحصاءة الاختبار t^* في (19.33):

$$t^* = \frac{\hat{L}-0}{s\{\hat{L}\}} = \frac{-4.8}{1.006} = -4.77$$

وبافتراض أن مستوى المعنوية هو $\alpha = .05$ نحتاج إلى $t(.05;120) = -1658$ وتكون قاعدة القرار بالتالي:

إذا كان $t^* \geq -1.658$ استنتج H_0،

وإذا كان $t^* < -1.658$ استنتج H_a.

وبما أن $t^* = -4.77 < -1.658$ فنستنتج H_a، أي أن متوسط درجة التعلّم للطريقة القياسية يتجاوز ذلك الخاص بالطريقة المجردة عندما يكون خليط الفصل بالشكل المحدد. والقيمة ـP وحيدة الجانب لهذا الاختبار هي 0^+.

(١٩ـ٥) التحليل عندما يكون أحد العاملين أوكلاهما كميا

عندما يكون أحد العاملين أوكلاهما كميا في دراسة ثنائية العامل، فيمكن المضي في تحليل تأثيرات العوامل إلى ماوراء المقارنات المتعددة بحيث يتضمن دراسة لطبيعة

دالة الاستجابة. وبماأن الطرق المألوفة لتحليل الانحدار، والتي ناقشناها سابقا، تقفز هنا إلى موقع الاعتبار، فسنناقش بإيجاز هذه التوسعة لتحليل الانحدار، ويمكن أن تكون الدراسة الابتدائية لتأثيرات العوامل بطرق المقارنات المتعددة مفيدة جدا في اختبار شكل دالي مناسب لعلاقة الانحدار.

تحليل دالة الاستجابة عندما يكون أحد العوامل كميا

(تفترض هذه الفقرة أن الفصل العاشر قد دُرس سابقا)

لنعتبر تجربة يُدرس فيها تأثير نوع خليط الكعك (عامل A) ودرجة الحرارة (عامل B) على طراوة نسيج الكعكة مقاسا بصورة مناسبة. وقد دُرس نوعان من خليط الكعك (G ،H) وأربع درجات حرارة ($300°, 315°, 330°, 345°$). وقد يرغب المحلل في هذه الحالة بتوسعة دراسة تأثيرات العوامل لتتناول طبيعة دالة الاستجابة فيربط بين نسيج الكعكة ودرجة حرارة الفرن، وبما أن العامل A نوعي، فسنستخدم المتغيرات المؤشرة لتمثيله في دالة الاستجابة. وإذا لم يكن نوع خليط الكعك ودرجة الحرارة متفاعلين فقد يكون النموذج التالي من المرتبة الأولى مناسبا:

$$Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 X_{ijk1} + \beta_2 X_{ijk2} + \varepsilon_{ijk} \qquad (19.39)$$

حيث:

$$X_{ijk1} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت المشاهدة وفق المستوى الأول للعامل } A \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

درجة حرارة الفرن لكل مشاهدة = X_{ijk2}

وترمز المقادير β المعالم الانحدار، و X_{ijk2} ، X_{ijk1} هي القيم الموافقة للمتغيرين X_1 و X_2، على الترتيب، وذلك من أجل المشاهدة k أو التكرار k للمعالجة الموافقة للمستوى i من العامل A والمستوى j من العامل B.

ونعلم من الفصل ١٠ أن نموذج الانحدار (19.39) يتضمن علاقة خطية بين نسيج الكعكة ودرجة الحرارة، وبحيث يكون لها الميل نفسه من أجل كل من خليطي الكعك ولكن بارتفاعين مختلفين. ويقدم الشكل (١٠-١) توضيحا لهذا النموذج.

وإذا تفاعل خليط الكعك ودرجة الحرارة، فيمكن أن يكون النموذج المناسب:

$$Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 X_{ijk1} + \beta_2 X_{ijk2} + \beta_3 X_{ijk1} X_{ijk2} + \varepsilon_{ijk} \quad (19.40)$$

ونعلم من الفصل العاشر أن هذا النموذج يتضمن علاقة خطية بين نسيج الكعكة ودرجة الحرارة بميلين مختلفين ومقطوعين مختلفين لنوعي خليط الكعك. ويقدم الشكل (١٠-٣) توضيحا لهذا النموذج.

وإذا كانت علاقة الانحدار تربيعية ولاتوجد تفاعلات بين العاملين، فقد يكون النموذج المناسب:

$$Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 X_{ijk1} + \beta_2 x_{ijk2} + \beta_3 x_{ijk2}^2 + \varepsilon_{ijk} \quad (19.41)$$

حيث :

$$x_{ijk2} = X_{ijk2} - \overline{X}_2$$

تحليل دالة الاستجابة عندما يكون العاملان كلاهما كميين

عندما يكون العاملان كلاهما كميين ينطوي تحليل طبيعة دالة الاستجابة على انحدار متعدد عادي. وسنرمز للمتغيرين العاملين بـ X_1 و X_2. وعندئذ يمكن أن يكون النموذج من المرتبة الأولى:

$$Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 X_{ijk1} + \beta_2 X_{ijk2} + \varepsilon_{ijk} \quad (19.42)$$

حيث X_{ijk1} و X_{ijk2} قيمتا X_1 و X_2 ، على الترتيب، من أحل المشاهدة k أو التكرار k للمعالجة الموافقة للعامل A في مستواه الـ i والعامل B في مستواه الـ j .

والنموذج من المرتبة الثانية مع وجود تفاعلات يمكن أن يكون:

$$Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 x_{ijk1} + \beta_2 x_{ijk2} + \beta_3 x_{ijk2}^2 + \beta_4 x_{ijk2}^2 + \beta_5 x_{ijk1} x_{ijk2} + \varepsilon_{ijk} \quad (19.43)$$

حيث:

$$x_{ijk1} = X_{ijk1} - \overline{X}_1$$
$$x_{ijk2} = X_{ijk2} - \overline{X}_2$$

ومناقشة سطوح الاستجابة في الفصل ٩ قابل هنا للتطبيق تماما.

مثال (مأخوذ من المرجع 19.1). نُفذت دراسة لتحسين فعالية "مزيل العُقَد" في آلة

لتمشيط نسيج صوفي. ويمكن تعديل البكرات في مزيل العقد بالنسبة لسرعتها أو للمسافات بينها. وقد استخدمت أربع مسافات وثلاث سرع في الدراسة كما هو مبين في الجدول (١٩-٢). وقد كُررت كل معالجة أربع مرات، ولكن الجدول (١٩-٢) يقدم المتوسطات المقدَّرة للمعالجات، فقط. والمتغير الملحوظ هو قياس لفعالية التمشيط. ويقدم الشكل (١٩-٥) رسما لمتوسطات المعالجات.

وباستخدام حزمة حاسب تمّ الحصول على تحليل تباين لهذه الدراسة ثنائية العامل. والنتائج ملخصة في الجدول (١٩-٣)أ. ويستخدم اختبار التفاعلات إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{MSAB}{MSE} = \frac{4.92}{1.32} = 3.73$$

جدول (١٩-٢) المتوسطات المقدَّرة للمعالجات في دراسة مزيل العقد ثنائية العامل، حيث العاملان كميان ($n = 4$)

المسافة الفاصلة	السرعة 300 *rpm*	السرعة 400 *rpm*	السرعة 500 *rpm*
1.0 *unit*	21.6	22.3	22.9
1.2 *units*	18.7	19.1	21.6
1.4 *units*	15.8	17.9	19.4
1.6 *units*	13.2	16.7	19.5

المصدر : أعيد طبعها من كتاب **planning of Experiments** لمؤلفه: *D.R.cox* : *New York*) *John Whiley * Sons*, 1958)., *P*. 124 بعد الإذن بذلك.

ولمستوى معنوية $\alpha = .05$، نحتاج $F(.95; 6, 36) = 2.36$ وبما أن $F^* = 3.73 > 2.36$، نستنتج أن المسافات والسرع تتفاعل. والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0.0055.

وهكذا يقترح الشكل (١٩-٥) بالإضافة إلى التحليل أن نموذجا من المرتبة الأولى مع إضافة تأثيرات تفاعل يمكن أن يكون مناسبا. ودالة الاستجابة لهذا النموذج هي:

$$E\{Y\} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_1 X_2 \qquad (19.44)$$

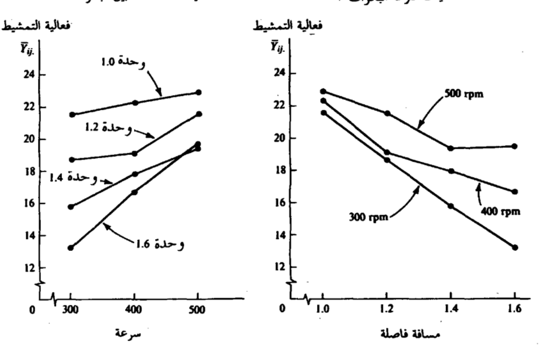
حيث يمثل X_1 المسافة الفاصلة ويمثل X_2 السرعة. وقد تمّ توفيق النموذج

باستخدام حزمة حاسب للانحدار المتعدد. والنتائج ملخصة في الجدول (١٩ـ٣)ب.

وبما أن الدراسة تضمنت تكرارات، فيمكن القيام باختيار صلاحية دالة الاستجابة. ويمكن بسهولة الحصول على مجموع مربعات نقص التوفيق لأن SSE لنموذج التحاين هو نفسه $SSPE$ لنموذج الانحدار. وبالتالي نجد:

$$SSLF = \underbrace{SSE}_{\text{جدول } 19.3b} - \underbrace{SSPE}_{\text{جدول } 19.3a} = 57.29 - 47.61 = 9.68$$

شكل (١٩ـ٥) رسوم المتوسطات المقدّرة للمعاجات مثال مُزيل العقد.



ويتضمن الجدول (١٩ـ٣)جـ التفكيك الذي نحتاجه لاختبار نقص التوفيق، فإحصاءة الاختبار المناسبة هي:

$$F^* = \frac{MSLF}{MSE} = \frac{1.21}{1.32} = .92$$

وبافتراض مستوى معنوية $\alpha = .05$ نحتاج إلى $F(.95;8,36) = 2.21$.وبما أن $F^* = .92 > 2.21$، فنستنتج أن دالة الاستجابة (19.44) مناسبة. والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0.51.

جدول (١٩-٣) جداول تحليل التباين لدراسة مزيل العقد

أ ـ نموذج تحليل التباين

مصدر التغير	SS	df	MSE
المسافة الفاصلة (A)	232.86	3	77.62
السرعة (B)	99.49	2	49.74
التفاعلات AB	29.53	6	4.92
الخطأ	47.61	36	1.32
المجموع	409.49	47	

ب ـ نموذج الانحدار

$$\hat{Y} = 45.09333 - 25.45.45000X_1 - .03340X_2 + .03925X_1X_2$$

مصدر التغير	SS	df	MSE
الانحدار	352.20	3	117.40
الخطأ	57.29	44	1.30
المجموع	409.49	47	

ج ـ تحاين اختبار نقص التوفيق

مصدر التغير	SS	df	MSE
الانحدار	352.20	3	117.40
الخطأ	57.29	44	1.30
نقص التوفيق	9.68	8	1.21
الخطأ البحْت	47.61	36	1.32
المجموع	409.49	47	

لنلقِ نظرة أقرب على دالة الاستجابة المقدَّرة:

$$\hat{Y} = 45.0933 - 25.45000X_1 - .03340X_2 + .03925X_1X_2$$

فنلاحظ أن b_3 موجب، وهذا يتضمن هنا (وتؤكد ذلك نظرة سريعة نلقيها على الشكل ١٩-٥) أن الفعالية تتناقص مع زيادة السرعة وذلك من أجل السرع كافة (مثلاً، إذا كان $X_2 = 300$، فإن $\hat{Y} = 35.073 - 13.675X_1$)، إلا أن التناقص أقل في السرع العالية. وبالمقابل، فإن الفعالية تزداد مع زيادة السرعة أياً كانت المسافة الفاصلة (مثلاً، إذا كان $X_1 = 1.0$ فإن $\hat{Y} = 19.643 + .00585X_2$)، إلا أن الزيادة تكون أكبر في حالة المسافات الفاصلة الكبيرة.

(١٩-٦) تخطيط حجوم العينات

نتناول تخطيط حجوم العينات لدراسات ثنائية العامل، في الأساس، بالطريقة نفسها التي ناقشناها في الفصل ١٧ في حالة دراسات وحيدة العامل. وبالتالي فإننا نكتفي هنا بقليل من التعليقات الموجزة، فقط، ونعتبر أولاً قوة الاختبارات F في دراسات ثنائية العامل، فالأسلوب الرئيس لتخطيط حجوم العينات هو من خلال التحكم بقوة الاختبار.

قوة الاختبارات F

يمكن التعرّف على قوة الاختبارات F للتفاعلات وللتأثيرات الرئيسة للعامل A والتأثيرات الرئيسة للعامل B بطريقة مماثلة لما رأيناه في حالة عامل بمفرده، وذلك باستخدام جداول بيرسون ـ هارتلي في الجدول أ-٨ . ومعلمة اللامركزية ϕودرجات الحرية المناسبة لكل من هذه الحالات هي كما يلي:

(19.45a) اختبار التفاعلات

$$\phi=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n\sum\sum(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)+1}}=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n\sum\sum(\mu_{ij}-\mu_{i.}-\mu_{.j}+\mu_{..})^2}{(a-1)(b-1)+1}}$$

$$\nu_1=(a-1)(b-1) \qquad \nu_2=ab(n-1)$$

(19.45b) اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A

$$\phi=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{nb\sum\alpha_i^2}{a}}=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{nb(\mu_{i.}-\mu_{..})^2}{a}}$$

$$\nu_1=a-1 \qquad \nu_2=ab(n-1)$$

(19.45c) اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B

$$\phi=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{na\sum\beta_i^2}{b}}=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{na\sum(\mu_{i.}-\mu_{..})^2}{b}}$$

$$\nu_1=b-1 \qquad \nu_2=ab(n-1)$$

مثال. نرغب في إيجاد القوة لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A (ارتفاع رف المعروضات)، في مثال مخبز كاسل في الفصل ١٨، وذلك عندما يكون $\mu_{1.}=50$، $\mu_{2.}=55$، $\mu_{3.}=45$ أو بما يكافئ ذلك، عندما يكون $\alpha_1=0$، $\alpha_2=+5$، أو $\alpha_3=-5$. افترض أننا نعلم من خبرة سابقة أن $\sigma=3$. ولدينا مماسبق لنا معرفته عن هذا الاختبار أن:

$$n=2 \quad a=3 \quad b=2 \quad \alpha=.05$$

وبالتالي يكون:

$$\phi=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2(2)\left[(0)^2+(5)^2+(-5)^2\right]}{3}}=2.7$$

ومن أجل $\nu_1=2$، $\nu_2=6$، $\alpha=.05$ و $\phi=2.7$ نجد من الجدول أ-٨ أن القوة هي حوالي 0.89. وهكذا، عندما يكون $\mu_{1.}=50$، $\mu_{2.}=55$ و $\mu_3=45$ و $\sigma=3$ فإن احتمال أن يكشف الاختبار F عن فروق في متوسطات ارتفاع رف المعروضات هو حوالي 0.89.

أساليب التخطيط

يمكن تخطيط حجوم العينات للدراسات ثنائية العامل مستخدمين إما أسلوب القوة أو أسلوب التقدير الذي ناقشناه في الفصل ١٧. وفي معظم الحالات نرغب في حجوم عينات متساوية لكل معالجة.

وفي أسلوب القوة نهتم تقليديا بكل من قوة كشف التأثيرات الرئيسة للعامل A وقوة كشف التأثيرات الرئيسة للعامل B . ويمكن أن نحدد أولا المدى الأصغر لمتوسطات مستويات العامل الذي نرغب، في حدوده، كشف التأثيرات الرئيسة للعامل A، ثم نحصل على حجوم العينات اللازمة من الجدول أ-١٠ ، حيث $r=a$. وحجم العينة الذي نحصل عليه هنا يمثل bn ، ومنه يمكن بسهولة حساب n. ويكون استخدام

الجدول أ-١٠ لهذه الغاية مناسبا شريطة أن لا يكون حجم العينة الناتج صغيرا ، وعلى وجه التحديد ، شريطة أن يكون $a(bn - 1) \geq 20$ وإذا لم يتحقق هذا الشرط، فينبغي استخدام جداول القوة لبيرسون وهارتلي المتوفرة في الجدول $A.8$ وتتطلب هذه الجداول، كما ذكرنا سابقا، طريقة تكرارية لتحديد حجوم العينات اللازمة.

وبالطريقة نفسها، عندئذ، يمكن تحديد المدى الأصغر لمتوسطات مستويات العامل B التي نرغب، في حدوده، كشف التأثيرات الرئيسة للعامل B، ثم نجد حجوم العينات التي نحتاجها. وإذا اختلفت حجوم العينات، التي حصلنا عليها من تحديد قوة العامل A وقوة العامل B اختلافا كبيرا ، فسنحتاج إلى اتخاذ قرار تسوية للوصول إلى حجوم العينات اللازمة.

وبصورة بديلة، أو بالإضافة إلى أسلوب القوة، يمكن تحديد المتضادات المهمة المراد تقديرها، ثم إيجاد حجوم العينات التي يتوقع أن تزودنا بمستوى الدقة اللازم لمعامل الثقة العائلي المرغوب. وكثيرا مايكون هذا الأسلوب أكثر فائدة من أسلوب القوة، مع أنه يمكن استخدام الأسلوبين هذين كليهما معا وصولا إلى تحديد لحجوم العينات اللازمة.

وإذا كان الغرض من الدراسة العاملية تحديد أفضل تركيب من التراكيب العاملية الـ ab ، فيمكن استخدام الجدول أ-١١ لإيجاد حجوم العينات اللازمة، وذلك كما وصفناه في الفقرة ١٧-٣. ولهذه الغاية يكون $r = ab$.

مرجع ورد ذكره في النص

[19.1] Cox, D.R. *Planning of Experiments. New York: John Wiley & Sons,* 1958.

مسائل

(١٩-١) لماذا اقترح في جدول التدفق في الشكل (١٩-١) أنه ينبغي القيام باختبار التفاعلات قبل اختبارات التأثيرات الرئيسة للعوامل؟ اشرح

(١٩-٢) نفذت دراسة ثنائية العامل فيها $a = 5$ ،$b = 5$ ،$n = 4$. و لم تلحظ تفاعلات بين العاملين B, A، ويرغب المحلل في تقدير جميع المقارنات الثنائية بين

متوسطات مستويات العامل A وجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات مستويات العامل B . ونريد معامل ثقة عائلي للمجموعة المشتركة من التقديرات بفترة يساوي 90 بالمائة.

أ ـ أيها أكثر فعالية استخدام طريقة بونفيروني للعائلة بأسرها أم استخدام طريقة توكي لكل عائلة من مقارنات متوسطات مستويات عامل ثم دمج العائلتين باستخدام طريقة بونفيروني؟

ب ـ هل سيختلف جوابك في حالة وجود ثلاثة مستويات لكل عامل، مع بقاء كل شيء آخر على حاله؟

(١٩-٣) نُفذت دراسة ثنائية العامل فيها $n = 10$ ، $b = 6$ ، $a = 6$ لم يوجد تفاعل بين العاملين A و B ، ونرغب الآن في تقدير خمس متضادات بين متوسطات مستويات العامل A وأربع متضادات بين متوسطات مستويات العامل B ، على أن يكون معامل الثقة العائلي للمجموعة المشتركة من التقديرات 95 بالمائة ، أي الطرق الثلاث على الصفحة ستكون هنا الأكثر فعالية؟

(١٩-٤) بالإشارة إلى مثال مخبز كاسل على الصفحة حيث قمنا بمقارنات ثنائية عدّة مستخدمين طريقة توكي، ثم ضُمَّت إلى بعضها بطريقة بونفيروني لإنتاج معامل ثقة عائلي 90 بالمائة للعائلة من المقارنات بأكملها، هل سيكون استخدام طريقة بونفيروني للعائلة من أربعة تقديرات بأكملها أكثر فعالية هنا؟ اشرح . هل ستكون طريقة شيفّه (19.24) أكثر فعالية هنا ؟

(١٩-٥) بالإشارة إلى مسائل **العروض النقدية** (١٨-١٠) و(١٨-١١). فيما يلي بعض النتائج الحسابية الإضافية:

i	$\overline{Y}_{i..}$	j	$\overline{Y}_{.j.}$	
1	21.50	1	23.94	
2	27.75	2	23.17	$MSE = 2.389$
3	21.42			

أ ـ قدِّر μ_{11} مستخدما 95% فترة ثقة وفسّر تقدير الفترة هذا.

ب ـ جهِّز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدَّرة لمستويات العامل B.

ماذا يقترح هذا الرسم فيما يتعلق بتساوي متوسطات مستويات العامل B؟

جـ ـ قدِّر $D = \mu_{.1} - \mu_{.2}$ مستخدما 95% فترة ثقة. هل تنسجم فترة الثقة هذه مع نتائج الاختبار في المسألة (١٨ـ١)د؟ هل تنسجم فترة الثقة مع ماوجدته في الفقرة ب؟ اشرح.

د ـ جهِّز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدَّرة لمستويات العامل A .

ماذا يقترح هذا الرسم حول التأثيرات الرئيسة للعامل A ؟

هـ ـ احسب جميع المقارنات الثنائية بين متوسطات مستويات العامل A، واستخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة. اعرض نتائجك بيانيا وقدّم ملخصا لها، هل تتفق نتائجك مع ماوجدته في د؟

و ـ هل طريقة توكي المستخدمة في الجزء هـ الطريقة الأكثر فعالية التي يمكن استخدامها هنا ؟ اشرح.

ز ـ قدِّر المتضادة:

$$L = \frac{\mu_{1.} + \mu_{3.}}{2} - \mu_{2.}$$

بـ 95% فترة ثقة. فسّر تقدير الفترة هذا.

ح ـ لنفترض أن 30% من مجتمع المالكات الإناث من الصبايا، و 60% من متوسطات العمر، و 10% من المسنّات. أوجد 95% فترة ثقة لمتوسط العرض النقدي في مجتمع المالكات.

(١٩ـ٦) بالإشارة إلى مسألتي **تأثيرات النظر إلى العدسة** (١٨ـ١٢) و(١٨ـ١٣)، فيما يلي بعض النتائج الحسابية الإضافية:

i	$\bar{Y}_{i.}$	j	$\bar{Y}_{.j}$	
1	11.4	1	11.1	
2	14.7	2	15.0	$MSE = 6.075$

أ ـ قدِّر μ_{21} بـ 99% فترة ثقة وفسّر تقدير الفترة هذا.

ب - قدّر $\mu_{1.}$ بـ 99% فترة ثقة وفسر تقدير الفترة هذا.

جـ - جهّز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل B المقدّرة. ماذا يقترح هذا الرسم حول التأثيرات الرئيسة للعامل B ؟

د - أوجد فترتي ثقة لـ $\mu_{.1}$ و $\mu_{.2}$ كلا بمعامل ثقة 99% وفسر فترتي الثقة. ماهو معامل الثقة العائلي لمجموعة التقديرين معا؟

هـ - جهّز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدّرة لمستويات العامل A. ماذا يقترح هذا الرسم حول التأثيرات الرئيسة للعامل A ؟

و - أوجد فترتي ثقة لِ $D_1 = \mu_{2.} - \mu_{1.}$ و $D_2 = \mu_{.2} - \mu_{.1}$ استخدم طريقة بونفيروني ومعامل ثقة عائلي 95 بالمائة. لخص نتائجك. هل تتفق نتائجك مع ما وجدته في الجزأين (جـ) و (هـ) ؟

ز - هل طريقة بونفيروني المستخدمة في الجزء (و)، الطريقة الأكثر فعالية التي يمكن أن نستخدمها هنا ؟ اشرح.

(١٩-٧) بالإشارة إلى مسألتي الشفاء من حمّى العَلَف (١٨-١٤) و(١٨-١٥)

أ - قدّر μ_{23} بـ 95% فترة ثقة. فسر فترة الثقة هذه.

ب - قدّر $D = \mu_{12} - \mu_{11}$ بـ 95% فترة ثقة. فسر فترة الثقة هذه.

جـ - قرر المحلل دراسة طبيعة تأثيرات التفاعل بين العوامل من خلال المتضادات التالية:

$$L_1 = \frac{\mu_{12} + \mu_{13}}{2} - \mu_{11} \qquad L_4 = L_2 - L_1$$

$$L_2 = \frac{\mu_{22} + \mu_{23}}{2} - \mu_{21} \qquad L_5 = L3 - L_1$$

$$L_3 = \frac{\mu_{32} + \mu_{33}}{2} - \mu_{31} \qquad L_6 = L_3 - L_2$$

أوجد فترات الثقة لهذه المتضادات، استخدم طريقة شيفّه للمقارنات المتعددة بمعامل ثقة عائلي 90%. فسر نتائجك.

د - رغب المحلل، أيضا، في تحديد المعالجة (المعالجات) التي تُنتج المتوسط الأطول لفترة عدم المعاناة من المرض. مستخدما طريقة توكي بمعامل

ثقة عائلي 90% حدّد المعالجة (المعالجات) التي تؤدي إلى المتوسط الأطول لفترة عدم المعاناة من المرض.

هـ - استخدم إحصاءة الاختبار (19.33) بدرجة واحدة من الحرية لتختار بين البديلين التاليين:

$$H_0: \mu_{32} - \mu_{31} \leq \mu_{33} - \mu_{32}$$
$$H_a: \mu_{32} - \mu_{31} > \mu_{33} - \mu_{32}$$

اضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = .05$، اعرض قاعدة القرار والنتيجة.

و - افحص ما إذا كان تحويل البيانات يمكن أن يجعل التفاعلات غير مهمة، ارسم بصورة منفصلة المتوسطات المقدَّرة للمعالجات بعد التحويل وذلك من أجل تحويلي المقلوب والجذر التربيعي وفي هيئة الشكل (١٩ـ٤) هل يمكن أن يؤدي أي من هذين التحويلين إلى جعل تأثيرات التفاعل غير مهمة؟ اشرح.

(١٩ـ٨) بالإشارة إلى مسألتي خدمة **مساق القرص** (*Disk Drive*) (١٨ـ٦) و(١٨ـ١٧).

أ - قدّر μ_{11} بـ 99% فترة ثقة، وفسر فترة التقدير هذه.

ب - قدّر $D = \mu_{22} - \mu_{21}$ بـ 99% فترة ثقة، وفسر فترة التقدير هذه.

جـ - نريد دراسة طبيعة تأثيرات التفاعل بالقيام، ومن أجل كل فني، بالمقارنات الثنائية الثلاث جميعها بين أنواع مساقات الأقراص كي نحدد، إذا أمكن، نوع المساق الذي يكون متوسط خدمة الفني من أجله هو المتوسط الأقل. ونريد معامل الثقة العائلي لكل مجموعة من ثلاث مقارنات مساويا لـ 95%. استخدم طريقة بونفيروني للقيام بجميع المقارنات الثنائية المطلوبة. لخص نتائجك.

د - يقدم مركز الخدمة في الوقت الراهن خدماته أسبوعيا لثلاثين مساق قرص من كل من الأنواع الثلاثة، بحيث يخدم كل فني عشر آلات من كل نوع. قدّر مقدار زمن الخدمة الكلي المتوقع الذي نحتاجه أسبوعيا لخدمة مساقات الأقراص التسعين استخدم 99% فترة ثقة.

هـ - كم من الزمن يمكن توفيره أسبوعيا، في المتوسط، إذا خصصنا الفني

الأول لخدمة النوع الثاني، فقط، والفني الثاني لخدمة النوع الأول، فقط، والفني الثالث لخدمة النوع الثالث، فقط؟ استخدم 99% فترة ثقة.

و - لفحص ما إذا كان يمكن لتحويل البيانات أن يجعل التفاعلات غير مهمة، ارسم بصورة منفصلة المتوسطات المقدّرة للمعالجات بعد التحويل وذلك من أجل تحويل المقلوب والتحويل اللوغاريتمي، وفي هيئة الشكل (١٩-٤). هل يمكن أن يؤدي أي من هذين التحويلين إلى جعل تأثيرات التفاعل غير مهمة؟ اشرح

(١٩-٩) بالإشارة إلى مسألتي معالجة الفشل الكلوي في المستشفى (١٨-١٨) و(١٨-١٩). استمر في العمل بالمشاهدات المحوّلة $Y' = \log_{10}(Y + 1)$.

أ - قدّر μ_{22} بـ 95% فترة ثقة ، وفسر فترة التقدير هذه.

ب - قدّر $D = \mu_{22} - \mu_{21}$ بـ 95% فترة ثقة، وفسر فترة التقدير هذه.

جـ - جهّز بصورة منفصلة ، رسوم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدّرة لمستويات العامل A والعامل B. ماذا تقترح هذه الرسوم حول التأثيرات الرئيسة للعامل؟

د - يرغب الباحث في دراسة التأثيرات الرئيسة لكل من العاملين من خلال القيام بجميع المقارنات الثنائية لمتوسطات مستويات العامل وبمعامل ثقة عائلي 90% لمجموعة المقارنات كافة. ما هي طريقة المقارنات المتعددة الأكثر فعالية هنا؟

هـ - مستخدما طريقة بونفيروني قم بجميع المقارنات الثنائية المطلوبة في الجزء (د)، أعرض نتائجك وقم بإعداد ملخص بياني. هل تتفق نتائجك مع تلك التي وصلت إليها في (جـ)؟

و - من المعروف من خبرة سابقة أن 30% من المرضى لديهم زيادة طفيفة في الوزن، و40% لديهم زيادة معتدلة في الوزن، و30% من المرضى لديهم زيادة حادة في الوزن، وأن هذه النسب تبقى نفسها في فئتي الإقامة. قدّرمتوسط عدد أيام الإقامة في المستشفى (بالوحدات المحولة)

وذلك في المجتمع بكامله مستخدما 95% فترة ثقة. ردّ حـدي الثقـة إلى الوحدات الأصلية. هل يبدو أن متوسط عدد الأيام أقل من 7 ؟

(١٩-١٠) بالإشارة إلى مسألتي متطلبات المُبرمج (١٨-١٠) و(١٨-٢١).

أ - قدّر μ_{23} بـ 99% فترة ثقة، وفسر فترة الثقة هذه .

ب - قدّر $D = \mu_{12} - \mu_{13}$ بـ 99% فترة ثقة، وفسّر فترة الثقة هذه.

جـ - يراد دراسة طبيعة تأثيرات التفاعل بمقارنة تأثير نوع الخبرة لكل من فئتي سنوات الخبرة. وعلى وجه التحديد يراد تقدير المقارنات التالية:

$D_1 = \mu_{11} - \mu_{21}$ $\qquad L_1 = D_1 - D_2$

$D_2 = \mu_{12} - \mu_{22}$ $\qquad L_2 = D_1 - D_3$

$D_3 = \mu_{13} - \mu_{23}$ $\qquad L_3 = D_2 - D_3$

ويراد لمعامل الثقة العائلي أن يكون 95 بالمائـة. مـاهي طريقـة المقارنـات المتعددة الأكثر فعالية هنا ؟

د - استخدم الطريقة الأكثر فعالية لتقدير المقارنات المحددة في الجـزء (جـ). أعرض نتائجك.

هـ - استخدم طريقة توكي بمعـامل ثقـة عـائلي 95% لتحديـد نـوع سـنوات الخبرة في فئة (أو فئات) الخبرة ذات المتوسط الأصغر لأخطاء التنبؤ.

و - أوجد، لكل من الفئات المحددة في الجزء (هـ)، فـترة ثقـة لمتوسـط خطـأ التنبؤ. استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عـائلي 95%. هـل تمتلـك أية فئة متوسط خطأ تنبؤ يمكن أن يكون صفرا ؟ اشرح.

ز - استخدم إحصاءة الاختبار بدرجة واحـدة مـن الحريـة (19.33) للاختبـار بين البديلين:

$$H_0: \frac{\mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23}}{3} \leq 40$$

$$H_a: \frac{\mu_{21} + \mu_{22} + \mu_{23}}{3} > 40$$

اضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = .05$. اعرض قاعدة القرار والنتيجة.

حـ ـ لفحص ما إذا كان يمكن لتحويل البيانات أن يجعل التفاعلات غير مهمة، ارسم بصورة منفصلة المتوسطات المقدَّرة للمعالجات بعد التحويل، وذلك من أجل تحويل المقلوب والتحويل اللوغاريتمي، وفي هيئة الشكل (١٩-٤). هل يمكن لأي من هذين التحويلين أن يجعل تأثيرات التفاعل غير مهمة؟ اشرح.

(١٩-١١) بالإشارة إلى مسألة **تفضيل الصنف** (٧-٨). لنفترض أن باحث التسويق قد رغب أولا في استخدام نموذج تحليل التباين (18.23) لتحديد ما إذا كان محتوى الرطوبة (عامل A) والحلاوة (عامل B) يؤثر في درجة الإقبال على الصنف.

أ ـ اعرض نموذج تحليل التباين لهذه الحالة.

ب ـ اكتب جدول تحليل التباين.

جـ ـ اختبر ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا؛ استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة.

د ـ ادرس إمكانية انحناء في تأثير محتوى الرطوبة بتقدير المقارنة التالية:

$$L = (\mu_{4.} - \mu_{3.}) - (\mu_{2.} - \mu_{1.})$$

استخدم 95% فترة ثقة. ماذا تستنتج؟

هـ ـ اختبرما إذا كان للحلاوة أثرها في الإقبال على الصنف؛ استخدم $\alpha = .01$ اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة.

(١٩-١٢) بالإشارة إلى مسألة **العروض النقدية** (١٨-١٠). كان متوسط أعمار "المالكين" في فئات الأعمار الثلاث كما يلي:

فتيّ	24.8 :
متوسط العمر	45.3 :
مسنّ	66.7 :

وبما أن الأعمار الفعلية للمالكين في كل فئة عمرية، وللجنسين كليهما، كانت قريبة من متوسط العمر، فيمكن استخدام كل متوسط عمر ليمثل الأعمار (X_1) للمالكين في تلك الفئة.

أ ـ قم بتوفيق نموذج الانحدار:

$$Y_{ijk} = \beta_0 + \beta_1 x_{ijk1} + \beta_2 x_{ijk1}^2 + \beta_3 x_{ijk2} + \varepsilon_{ijk}$$

حيث $x_{ijk1} = X_{ijk1} - \bar{X}_1$ و $X_{ijk2} = 1$ إذا كان المالك ذكرا وصفرا إذا كان المالك أنثى.

ب ـ احسب الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. ماذا يبيّن رسمك؟

جـ ـ قم باختبار رسمي لنقص التوفيق مستخدما مستوى معنوية $\alpha = .01$.
اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة.

د ـ اختبر ما إذا كان يمكن حذف الحدّ التربيعي في نموذج الانحدار في الجزء (أ) أم لا، استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة.

(١٩-١٣) بالإشارة إلى **مسألة الشفاء من حمّى العلف** (١٨-١٤). يرغب الباحث الآن في دراسة طبيعة العلاقة بين مقداري العنصرين النشيطين وديمومة الشفاء. وكانت مقادير العنصرين المستخدمين في الدراسة كمايلي:
الكمية (بالمليليغرام)، مستوى العامل، العنصر 1 ، العنصر 2،،،

مستوى العامل	الكمية (بالمليليغرام) X_1 (العنصر 1)	X_2 (العنصر 2)
منخفض	5.0	7.5
متوسط	10.0	10.0
عال	15.0	12.5

أ ـ قم بتوفيق نموذج الانحدار (19.43).

ب ـ قدّر متوسط ديمومة الشفاء عندما يكون $X_1 = 8.75$ و $X_2 = 7.50$ ؛ استخدم 95% فترة ثقة. هل يمكن الحصول على هذا التقدير من تحليل التباين؟ اشرح.

جـ ـ احسب الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. ماذا يبيّن رسمك؟

د ـ قم باختبار رسمي لنقص التوفيق، استخدم $\alpha = .005$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة.

هـ ـ اختبر ما إذا يمكن حذف حدّي التفاعل من النمـوذج أم لا، استخدم $\alpha = .05$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة .

(١٩-١٤) في دراسة ذات عاملين كان للعامل A أربعة مستويات وللعامل B ثلاثة مستويات، و $n = 6$. وقد جرى اختباران منفصلان للتأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B، بمستوى معنوية $\alpha = .05$ لكل منهما. ويرغب الباحث الآن في تحرّي قوة الاختبارين. افترض $\sigma = 20$ ؟

أ ـ ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل A عندما يكون $\alpha_1 = 10$,$\alpha_2 = 7$,$\alpha_3 = 3$ و $\alpha_4 = 0$؟

ب ـ ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل B عندما يكون $\beta_1 = -4$,$\beta_2 = 8$ و $\beta_3 = -4$؟

(١٩-١٥) بالإشارة إلى مسألتي **العروض النقدية** (١٨-١٠) و (١٨-١١). افترض أن $\sigma = 2.0$.

أ ـ ما هي قوة الاختبار لتأثيرات التفاعل في المسألة ١٨-١١جـ إذا كان :

$(\alpha\beta)_{11} = -.2, \quad (\alpha\beta)_{12} = -.2, \quad (\alpha\beta)_{21} = -.8,$

$(\alpha\beta)_{22} = .8, \quad (\alpha\beta)_{31} = 1.0, \quad (\alpha\beta)_{32} = -1.0,$

ب ـ ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل A في المسألة (١٨-١١)د إذا كان $\mu_{1.} = 23$,$\mu_{2.} = 25$ و $\mu_{3.} = 21$؟

جـ ـ ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسية للعامل B في المسألة (١٨-١١)د إذا كان : $\mu_{.1} = 24$ و $\mu_{.2} = 20$؟ إرشاد: استخدم الجدول أ-٥

(١٩-١٦) بالإشارة إلى مسألتي **الشفاء من حمّى العلف** (١٨-١٤) و(١٨-١٥). افترض أن $\sigma = .28$.

أ ـ ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل A في المسألة (١٨-١٥)د إذا كان $\mu_{1.} = 6.6$,$\mu_{2.} = 7.0$,$\mu_{3.} = 7.4$ ؟

ب ـ كيف تتأثر قوة الاختبار في الجزء (أ) إذا كان $\mu_{2.} = 7.3$ وكل شيء آخر بقي على حاله؟

جـ ـ ما هي قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل B في المسألة (١٨ـ١٥)د إذا كان: $\beta_1 = -2.5$, $\beta_2 = .25$ و$\beta_3 = .50$؟

(١٩ـ١٧) بالإشارة إلى مسألتي **متطلبات المُبرمج** (١٨-٢٠) و(١٨-٢١). أوجد قوة الاختبار للتأثيرات الرئيسة للعامل B في المسألة (١٨ـ٢١)د إذا كان $\beta_1 = 15$، $\beta_2 = -5$ و$\beta_3 = -10$ افترض أن $\sigma = 9.0$.

(١٩ـ١٨) يخطط مدير أبحاث تسويق لدراسة ديمومة دعاية (عامل A) ومستوى السعر (B) على المبيعات. ولكل عامل ثلاثة مستويات. ولايتوقع وجود أية تفاعلات، ويريد للتحليل الأولي أن يتألف من مقارنات ثنائية لمتوسطات مستويات عامل وذلك من أجل كل من العاملين. وستُستخدم عينات من الحجم نفسه لكل معالجة. ويُراد لدقة كل مقارنة أن تكون في حدود ± 3000 دولار، ولمعامل الثقة العائلي للمجموعة المشتركة من المقارنات أن تكون 90 بالمائة، مع استخدام طريقة توكي للقيام بالمقارنات لكل عامل، ثم استخدام طريقة بونفيروني بعد ذلك لاعتبار المجموعتين من المقارنات معاً. افترض أن $7000 = \sigma$ تشكل قيمة تخطيطية معقولة للانحراف المعياري للخطأ. ماهو حجم العينة الذي توصي به؟

(١٩-١٩) بالإشارة إلى مسألة **العروض النقدية** (١٨ـ١٠). لنفترض أن حجوم العينات لم تُحدد بعد، ولكن تقرَّر استخدام العدد نفسه من المالكين في كل فئة عمرية للجنسين. ماهي حجوم العينات المطلوبة إذا كنا نريد: (١) كشف فروق في متوسطات عامل العمر باحتمال 0.90 أو أكثر، وذلك عندما يكون المدى في متوسطات مستويات العامل ثلاثمائة دولار، و (٢) ضبط المخاطرة α عند 0.05؟ افترض أن القيمة التخطيطية المعقولة للانحراف المعياري للخطأ هي $\sigma = \$150$.

(١٩ـ٢٠) بالإشارة إلى مسألة **النظر إلى العدسة** (١٨ـ١٢). لنفترض أن حجوم العينات لم تُحدد بعد ولكن تقرر استخدام حجوم عينات متساوية لكل معالجة. والاهتمام الأوّلي هو في المقارنتين $D_1 = \mu_{1.} - \mu_{2.}$ و$D_2 = \mu_{.1} - \mu_{.2}$ ما هي حجوم العينات المطلوبة إذا أردنا تقدير كل من هاتين المقارنتين

بدقة لا تتجاوز 1.2± وبمعامل ثقة عـائلي 95 بالمائـة، مسـتخدمين الطريقـة الأكثر فعالية للمقارنات المتعددة؟ افترض أن $\sigma = 2.4$ هـي قيمـة تخطيطيـة معقولة للانحراف المعياري للخطأ.

(١٩-٢١) بالإشارة إلى مسألة **الشفاء من حمّى العلف** (١٨-١٤). افـترض أن حجـوم العينات لم تُحدد بعد ولكن تقرر اسـتخدام حجـوم العينـات نفسـها لكـل معالجة. والهدف الرئيس هو تحديد مركب الجرعة الـذي يـؤدي إلى أطـول فترة شفاء ممكنة. وينبغي أن يكـون الاحتمـال هـو 0.99 علـى الأقـل بأنـه يمكن تحديد مركب الجرعة الصحيح وذلك عندما يختلـف متوسـط ديمومـة الشفاء لمركب الجرعة الثاني من حيث فائدته بنصــف سـاعة أو أكـثر. مـا هي حجوم العينات المطلوبة؟ افترض أن $\sigma = .29$ ساعة هي قيمـة تخطيطيـة معقولة للانحراف المعياري للخطأ.

(١٩-٢٢) بالإشـارة إلى مسـألة **معالجة الفشـل الكلـوي في المستشـفى** (١٨-١٨). لنفترض أن حجوم العينات لم تُحـدد بعـد ولكـن تقـرر اسـتخدام حجـوم عينات متساوية لكل معالجة. والهدف الرئيس هو تقدير المقارنات الثنائية:

$$D_1 = \mu_1 - \mu_2 \qquad D_3 = \mu_1 - \mu_3$$
$$D_2 = \mu_1 - \mu_2 \qquad D_4 = \mu_2 - \mu_3$$

ماهي حجوم العينات المطلوبة إذا كان ينبغي لدقة كل من التقديرات أن لا تتجاوز 20.± (بالوحدات بعـد التحويـل)، مسـتخدمين طريقـة بونفـيروني بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة للمجموعـة المشـتركة مـن المقارنـات؟ والقيمـة التخطيطية المعقولة للانحراف المعياري للخطأ هـي $\sigma = 0.32$ (بـالوحدات بعد التحويل).

(١٩-٢٣) بالإشـارة إلى مسـألة **متطلبـات المبرمج** (١٨-٢٠). لنفـترض أن حجـوم العينات لم تُحدد بعد ولكن تقرر استخدام حجـوم عينـات متسـاوية لكـل معالجة. والاهتمام الأولي هو في تحديـد نـوع سـنوات الخبرة مـن مركـب الخبرة الذي يكون متوسط خطـأ التنبـؤ مـن أجلـه هـو المتوسـط الأصغـر. وينبغي أن لايقـل الاحتمـال عـن 0.95 بـأن المركـب الصحيـح قـد جـرى تحديده عندما يكون متوسط خطأ التنبـؤ الثـاني مـن حيـث الجـودة مختلفـا

بثمانية أيام ـ مبرمج أو أكثر. افترض أن $\sigma = 9.1$ يوما هي قيمة تخطيطية معقولة لخطأ التنبؤ. ماهي حجوم العينات المطلوبة؟

تمارين

(١٩-٢٤) بين أن المقدِّر النقطي (19.11) غير منحاز. أوجد تباين هذا المقدِّر.

(١٩-٢٥) أوجد تباين المقدِّر (19.28).

(١٩-٢٦) اعتبر دراسة ثنائية العوامل مع $a = 2$, $b = 2$. استخدم (18.8b) لاستنباط متضادة لكل من التفاعلين $(\alpha\beta)_{12}$ و $(\alpha\beta)_{21}$. استخدم (6.20) لتبيان أن المتضادتين غير مستقلتين خطيا.

مشاريع

(١٩-٢٧) بالإشارة إلى مجوعة البيانات ***SENIC*** والمشروعين (١٨-٣٦) و(١٨-٣٧).

أ ـ جهِّز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدَّرة $\bar{Y}_{i..}$ لمستويات العامل. ماذا يقترح هذا الرسم فيما يتعلق بالتأثيرات الرئيسة للمنطقة؟

ب ـ حلل أثر المنطقة على متوسط طول الإقامة في المستشفى عن طريق القيام بجميع المقارنات الثنائية بين المناطق، استخدم طريقة توكي ومعامل ثقة عائلي 0.90. اعرض نتائجك وقدم ملخصا بيانيا. هل تتفق نتائجك مع ماوجدته في الجزء (أ)؟

(١٩-٢٨) بالإشارة إلى مجموعة البيانات ***SMSA*** والمشروعين (١٨-٣٨) و(١٨-٣٩).

أ ـ جهِّز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدَّرة $\bar{Y}_{i..}$ لمستويات العامل. ماذا يقترح هذا الرسم فيما يتعلق بالتأثيرات الرئيسة للمنطقة؟

ب ـ حلل تأثير المنطقة على معدل الجريمة عن طريق القيام بجميع المقارنات الثنائية بين المناطق، مستخدما طريقة توكي مع معامل ثقة عائلي 95 بالمائة. اعرض نتائجك وقدّم ملخصا بيانيا . هل تتفق نتائجك مع ما وجدته في الجزء (أ)؟

حجوم عينات غير متساوية في دراسات ثنائية العامل

في مناقشتنا لدراسات ثنائية العامل اقتصرنا حتى الآن على حالة حجوم عينات متساوية لنموذج تباين العاملين (18.23). وفي هذا الفصل سنتابع طرقا تتناول حالات لا تتساوى فيها حجوم عينات المعالجات. ونستمر في افتراض أن لجميع متوسطات المعالجات الأهمية نفسها.

(٢٠-١) حجوم عينات غير متساوية

اختلاف حجوم العينات باختلاف المعالجات أمر شائع في بيانات المشاهده. فعلى سبيل المثال، رغب محلل أبحاث تسويق في دراسة تأثيرات درجة الحرارة وهطول الأمطار والثلوج على مبيعات سلعة، وذلك من بيانات من أكبر ثلاثين من المساحات الحضرية في الولايات المتحدة. وفي هذا النوع من الحالات التي لايمكن التحكم فيها، سيكون من غير المحتمل أن تتضمن كل فئة من فئات درجة الحرارة- معدل هطول المطر أو الثلج، العدد نفسه من المدن.

ويمكن أن نواجه، أيضا، حجوم عينات غير متساوية في دراسات تجريبية. وعلى سبيل المثال، يمكن أن يهدف المجرب لتأمين العدد نفسه من المشاهدات لكل معالجة، ولكن، ولأسباب مختلفة (مثلا، مرض عنصر من العناصر الخاضعة للتجربة، سجلات غير مستكملة، مشاكل تقنية) ينتهي بحجوم عينات غير متساوية. وبالإضافة إلى ذلك، فإن بعض التجارب المصممة تتطلب درجة دقة لمقارنة بين المعالجات تختلف من مقارنة إلى أخرى، وبالتالي تُحدَّد حجوم للعينات غير متساوية عند تصميم التجربة.

وفي مناقشتنا لحجوم عينات غير متساوية في الفقرتين ٢٠-٢ و٢٠-٣، سنفترض وجود مشاهدة واحدة على الأقل من أجل كل معالجة. وسنستغني عن هذا القيد في الفقرة ٢٠-٤.

رموز

تبقى الرموز كما كانت من قبل باستثناء أن حجم العينة للمعالجة المؤلفة من المستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B سنرمز لها الآن بالرمز n_{ij}. والعدد الكلي من المشاهدات عند المستوى i للعامل A سنرمز له بالرمز :

$$n_{i.} = \sum n_{ij} \tag{20.1a}$$

وعند المستوى j للعامل B بالرمز:

$$n_{.j} = \sum n_{ij} \tag{20.1b}$$

ومن أجل الدراسة بكاملها بالرمز:

$$n_T = \sum_i \sum_j n_{ij} \tag{20.1c}$$

وكالمعتاد، نعرف المتوسط المقدَّر للمعالجة عندما يكون العامل A في المستوى i والعامل B في المستوى j كمايلي:

$$\bar{Y}_{ij.} = \frac{Y_{ij.}}{n_{ij}} \tag{20.2}$$

حيث:

$$Y_{ij.} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} Y_{ijk} \tag{20.2a}$$

(٢٠-٢) استخدام أسلوب الانحدار لاختبار تأثيرات العوامل عندما تكون حجوم العينات غير متساوية

عندما تكون حجوم العينات غير متساوية يصبح تحليل التباين لدراسات ذات عاملين أكثر تعقيدا. ولاتعود معادلات المربعات الدنيا ذات بنية بسيطة تؤدي إلى حلول سهلة ومباشرة، وتصبح صيغ تحليل التباين النظامي في (18.38) و(18.39) غير مناسبة الآن. وفضلا عن ذلك، فإن مجاميع مربعات المركبات الخاصة بتأثيرات العوامل

تفقد خاصية التعامد ـ أي أنها لاتجمع إلى *SSTR*.

والطريقة الميسّرة للحصول على مجاميع المربعات اللازمة لاختبار التأثيرات الرئيسة للعوامل وتأثيرات التفاعلات بينها هي من خلال أسلوب الانحدار الموصوف في الفقرة ١٨-٨. والفرق الوحيد، عندما لاتكون حجوم العينات متساوية، هو الحاجة إلى توفيق نموذج مخفض جديد لكل اختبار يتعلق بالتأثيرات الرئيسة للعوامل أو بالتفاعلات. وبما أن المسألة لاتنطوي على أية مبادىء جديدة، فسنمضي مباشرة إلى مثال يوضح كيفية إجراء اختبارات تحاين باستخدام أسلوب الانحدار وذلك عندما تكون حجوم العينات غير متساوية.

مثال

أُعطي هرمون النمو البشري في مركز أبحاث طبي إلى أطفال قِصار دون البلوغ ويعانون من عَوَز هرمون النمو، وكان الباحث مهتما بتأثير الجنس (عامل *A*)، وتطور العظم (عامل *B*) على معدل النمو الناشئ عن إعطاء الهرمون. وقد صُنّف تطور عظم الطفل إلى ثلاثة أصناف ـ قصور شديد، قصور معتدل، قصور طفيف. وقد اختير ثلاثة أطفال عشوائيا من كل فئة من فئات الجنس– تطور العظم. وكان المتغير التابع (*Y*) هو الفرق بين معدل النمو خلال فترة المعالجة بهرمون النمو ومعدل النمو الطبيعي السابق للمعالجة، مقاسا بالسنتيمتر للشهر الواحد. ولم يستطع أربعة من الأطفال الثمانية عشر استكمال فترة الدراسة التي امتدت لعام كامل، مما سبب حجوم عينات غير متساوية.

ويقدم الجدول (٢٠-١) بيانات هذه الدراسة. ويبين الشكل (٢٠-١) رسوم المتوسطات المقدَّرة للمعالجات. وتقترح الرسوم في الشكل (٢٠-١)، بوضوح، أن لتطور العظم وقعا مهما على التغير في معدل النمو. وتثير الرسوم التساؤل عما إذا كان هناك بعض من تأثيرات التفاعل، وعما إذا كان لجنس الطفل تأثير في معدل النمو.

ولكي نختبر رسميا وجود تأثيرات العوامل هذه، نستخدم أسلوب الانحدار لأن حجوم العينات غير متساوية.

تطوير نموذج انحدار. نموذج التحاين (18.23) لعاملين هو كالتالي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad i = 1,2; \quad j = 1,2,3 \qquad (20.3)$$

وللتعبير عن هذا النموذج بدلالة الانحدار، نستخدم المتغيرات المؤشرة التي تأخذ القيم 1, ‎-1 أو 0 كما شرحناها في الفقرة ١٨-٨، وعلى وجه التحديد، سنحتاج هنا إلى $a - 1 = 2 - 1 = 1$ متغير مؤشر من أجل التأثيرات الرئيسة للعامل A و b-1=3-1=2 متغيرا مؤشرا من أجل التأثيرات الرئيسة للعامل B. ويقابل حدود التفاعل جداءات المتغيرات المؤشرة للتأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B. وعلى وجه التحديد فإن نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التحاين (20.3) هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \underbrace{\alpha_1 X_{ijk1}}_{\text{تأثير رئيسي للعامل } A} + \underbrace{\beta_1 X_{ijk2} + \beta_2 X_{ijk3}}_{\text{تأثير رئيسي للعامل } B} + \underbrace{(\alpha\beta)_{11} X_{ijk1} X_{ijk2} + (\alpha\beta)_{12} X_{ijk1} X_{ijk3}}_{\text{تأثير التفاعل } AB} + \varepsilon_{ijk} \qquad (20.4) \text{ نموذج تام}$$

حيث:

$$X_{ijk1} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت المشاهدة من المستوى 1 للعامل } A \\ -1 & \text{إذا كانت المشاهدة من المستوى 2 للعامل } A \end{cases}$$

$$X_{ijk2} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت المشاهدة من المستوى 1 للعامل } B \\ -1 & \text{إذا كانت المشاهدة من المستوى 3 للعامل } B \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$X_{ijk3} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت المشاهدة من المستوى 2 للعامل } B \\ -1 & \text{إذا كانت المشاهدة من المستوى 3 للعامل } B \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

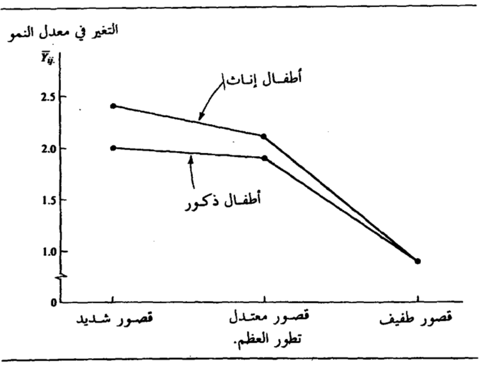
ومعاملات الانحدار في (20.4) هي معالم نموذج التحاين:

$$\begin{aligned} &\mu_{..} \\ &\alpha_1 = \mu_{1.} - \mu_{..} \\ &\beta_1 = \mu_{.1} - \mu_{..} \\ &\beta_2 = \mu_{.2} - \mu_{..} \\ &(\alpha\beta)_{11} = \mu_{11} - \mu_{12.} - \mu_{.1} + \mu_{..} \\ &(\alpha\beta)_{12} = \mu_{12} - \mu_{1.} - \mu_{.2} + \mu_{..} \end{aligned} \qquad (20.5)$$

جدول (٢٠-١) بيانات عينة ورموز لمثال هرمون النمو (الفرق في معدل النمو مقاس بالسنتيمتر للشهر الواحد)

الجنس (عامل A)	تطور العظم (عامل B) j: قصور شديد (B_1)	قصور معتدل (B_2)	قصور طفيف (B_3)
ذكر (A_1)	$1.4(Y_{111})$	$2.1(Y_{121})$	$.7(Y_{131})$
	$2.4(Y_{112})$	$1.7(Y_{122})$	$1.1(Y_{132})$
	$2.2(Y_{113})$		
	$2.0(\bar{Y}_{11.})$	$.9(\bar{Y}_{12.})$	$.9(\bar{Y}_{13.})$
أنثى (A_2)	$2.4(Y_{211})$	$2.5(Y_{221})$	$.5(Y_{231})$
		$1.8(Y_{222})$	$.9(Y_{232})$
		$2.0(Y_{223})$	$1.3(Y_{233})$
متوسط	$2.4(\bar{Y}_{21.})$	$2.1(\bar{Y}_{22.})$	$.9(\bar{Y}_{23.})$

شكل (٢٠-١) رسوم المتوسطات المقدّرة للمعالجات – مثال هرمون النمو.



وما تبقى من معالم نموذج التحاين لاحاجة لها في نموذج الانحدار، وذلك بسبب القيود في (18.23). وهكذا نجد، على سبيل المثال:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\alpha_1 \\ \beta_3 &= -\beta_1 - \beta_2 \\ (\alpha\beta)_{13} &= -(\alpha\beta)_{11} - (\alpha\beta)_{12} \\ (\alpha\beta)_{21} &= -(\alpha\beta)_{11} \end{aligned} \tag{20.6}$$

ويمثل الجدول (٢٠-٢) مصفوفتي البيانات **Y** و **X** لنمـوذج الانحـدار (20.4) في دراسة هرمون النمو. ويمثل الجدول (٢٠-٣)أ دالة الانحـدار التوفيقية وجـدول تحـاين الانحدار عند توفيق نموذج الانحدار التام (٢٠,٤) للبيانات. ونلاحظ أن القيم التوفيقيـة للنموذج التام هي المتوسـطات المقـدّرة للمعالجـات $\overline{Y}_{ij.}$، تماما كمـا في حالـة تسـاوي حجوم عينات المعالجـات. وعلـى سـبيل المثـال، لدينـا مـن أجـل المشـاهدات الخاصـة بالمعالجة $i = 1, j = 1$ حيث يكون $X_1 = X_2 = 1$، و $X_3 = 0$، ما يلي:

$$\hat{Y}_{111} = \hat{Y}_{112} = \hat{Y}_{113} = 1.7 - .1(1) + .5(1) + .3(0) - .1(1)(1) - 0(1)(0) = 2.0 = \overline{Y}_{11.}$$

ولدينا من أجل المشاهدة الوحيدة للمعالجة $i = 2, j = 1$، حيث يكـون X_1=-1, X_2=1, و$X_3 = 0$ ما يلي:

$$\hat{Y}_{211} = 1.7 - .1(-1) + .5(1) + .3(0) - .1(-1)(1) - 0(-1)(0) = 2.4 = \overline{Y}_{21.}$$

جدول (٢٠-٢) مصفوفتا البيانات **Y** و **X** لنموذج الانحدار (20.4) الخاصة بدراسة هرمون النمو.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{113} \\ Y_{121} \\ Y_{122} \\ Y_{131} \\ Y_{132} \\ Y_{211} \\ Y_{221} \\ Y_{222} \\ Y_{223} \\ Y_{231} \\ Y_{232} \\ Y_{233} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 2.4 \\ 2.2 \\ 2.1 \\ 1.7 \\ .7 \\ 1.1 \\ 2.4 \\ 2.5 \\ 1.8 \\ 2.0 \\ .5 \\ .9 \\ 1.3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 & X_1X_2 & X_1X_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

جدول (٢٠-٣) نتائج الانحدار لمثال هرمون النمو

(أ) توفيق نموذج تام (20.4)

$\hat{Y} = 1.7 - .1X_1 + .5X_2 + .3X_3 - .1X_1X_2 - 0.0X_1X_3$

مصدر التغير	SS	df
الانحدار	4.4743	5
الخطأ	1.3000	8
المجموع	5.7743	13

(ب) توفيق نموذج مخفض (20.8)

$\hat{Y} = 1.68 - .0857X_1 + .467X_2 + .327X_3$

مصدر التغير	SS	df
الانحدار	4.3989	3
الخطأ	1.3754	10
المجموع	5.7743	13

$SSE(R) - SSE(F) = 1.3754 - 1.3000 = .0754$

(ج) توفيق نموذج مخفض (20.10)

$\hat{Y} = 1.69 - .444X_2 + .328X_3 - .0667X_1X_2 - .0167X_1X_3$

مصدر التغير	SS	df
الانحدار	4.3543	4
الخطأ	1.4200	9
المجموع	5.7743	13

$SSE(R) - SSE(F) = 1.4200 - 1.3000 = .1200$

(د) توفيق نموذج مخفض (20.11)

$\hat{Y} = 1.63 - .0190X_1 + .0667X_1X_2 - .193X_1X_3$

مصدر التغير	SS	df
الانحدار	.2846	3
الخطأ	5.4897	10
المجموع	5.7743	13

$SSE(R) - SSE(F) = 5.4897 - 1.3000 = 4.1897$

اختبار تأثيرات التفاعل لاختبار ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا، فإن بدائل نموذج التحاين هي:

(20.7)
H_0: جميع المعالم $(\alpha\beta)_{ij}$ مساوية للصفر
H_a: ليست جميع المعالم $(\alpha\beta)_{ij}$ مساوية للصفر

تصبح في نموذج الانحدار (20.4) كما يلي:

(20.7a)
$$H_0: (\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = 0$$
H_a: ليس كلا من $(\alpha\beta)_{11}$ و $(\alpha\beta)_{12}$ مساوٍ للصفر

وهكذا نختبر، ببساطة، ما إذا كانت معلمتا الانحدار مساويتين للصفر أم لا. وبالتالي يصبح نموذج الانحدار المخفض:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_1 X_{ijk1} + \beta_1 X_{ijk2} + \beta_2 X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \qquad (20.8)$$

وعند توفيق هذا النموذج المخفض نحصل على النتائج المقدمة في الجدول (٢٠-٣)ب. وبالتالي تكون إحصاءة الاختبار (3.69) كما يلي:

$$F^* = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{df_R - df_F} \div \frac{SSE(F)}{df_F}$$
$$= \frac{1.3754 - 1.3000}{10 - 8} \div \frac{1.3000}{8} = \frac{.0377}{.1625} = .23$$

ولضبط مخاطرة ارتكاب خطأً من النوع الأول عند $\alpha = .05$، نحتاج إلى $F(.95;28) = 4.46$، وبما أن $F^* = .23 \leq 4.46$، فنستنتج H_0، أي أن تأثيرات التفاعل غير موجودة. والقيمة-P لإحصاءة الاختبار هذه هي 0.80.

اختبار التأثيرات الرئيسة لعامل. ونمضي الآن إلى اختبار ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B موجودة أم لا. وتصبح بدائل نموذج التحاين وهي:

(20.9)
$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \qquad H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$
H_0: ليست المعلمتان α_i كلتاهما مساويتين للصفر
H_a: ليست جميع المعالم β_j مساوية للصفر

كما يلي في نموذج الانحدار (20.4):

(20.9a)
$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0 \qquad H_0: \alpha_1 = 0$$
H_0: ليست المعلمتان β_j كلتاهما مساويتين للصفر $\qquad H_a: \mu_1 \neq 0$

وبالتالي يكون نموذجا الانحدار المخفضين لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A والتأثيرات الرئيسة للعامل B كما يلي:

اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A (نموذج مخفض):

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \beta_1 X_{ijk2} + \beta_2 X_{ijk3} + (\alpha\beta)_{11} X_{ijk1} X_{ijk2} + (\alpha\beta)_{12} X_{ijk1} X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \tag{20.10}$$

اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B (نموذج مخفض):

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_1 X_{ijk2} + (\alpha\beta)_{11} X_{ijk1} X_{ijk2} + (\alpha\beta)_{21} X_{ijk1} X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \tag{20.11}$$

ويقدم الجدولان (٢٠-٣)جـ و(٢٠-٣)د نتائج توفيق هذين النموذجين المخفضين، وبالتالي تكون إحصاءتا الاختبار كما يلي:

$$F_1^* = \frac{1.4200 - 1.3000}{9-8} \div \frac{1.3000}{8} = \frac{.1200}{.1625} = .74$$

$$F_2^* = \frac{5.4897 - 1.3000}{10-8} \div \frac{1.3000}{8} = \frac{2.0949}{.1625} = 12.89$$

ومن أجل $\alpha = .05$، نحتاج إلى $F(.95;1,8) = 5.32$ و $F(.95;2,8) = 4.46$ للاختبارين. وبما أن $F_1^* = .74 < 5.32$ و $F_2^* = 12.89 < 4.46$ فنستنتج عدم وجود تأثيرات رئيسة للعامل A ولكن التأثيرات الرئيسة للعامل B موجودة. والقيم -P لهذين الاختبارين على التوالي هما .41 و 0.003.

جدول (٢٠-٤) جدول تحاين مثال هرمون النمو.

مصدر التغير	SS	df	MS	F^*
الجنس (A)	.1200	1	.1200	.74
تطور العظم (B)	4.1897	2	2.0949	12.89
التفاعلات AB	.0754	2	.0377	.23
الخطأ	1.3000	8	.1625	

وهكذا تدعم هذه الاختبارات التأثير البيّن لتطور العظم على التغير في معدل النمو خلال فترة المعالجة بهرمون النمو، الأمر الذي لاحظناه سابقا من الشكل (٢٠-١) وتشير، أيضا، إلى إمكانية اعتبار التغيرات العائدة إلى الجنس، والتفاعل، في هذا الشكل بأنها، مجرد سلوك عشوائي. ووفقا لمتباينة بونفيروني (5.5)، فإن مستوى المعنوية العائلي لمجموعة الاختبارات الثلاثة التي قمنا بها هو 0.15.

وعند هذه النقطة يبدو بوضوح أنه من المستحسن القيام بمزيد من التحاليل لطبيعة تأثيرات تطور العظم. وسنناقش مثل هذه التحاليل في الفقرة التالية.

ويتضمن الجدول (٢٠-٤) جدول تحاين مكثف عُرضت فيه نتائج توفيق نماذج الانحدار الأربعة في الجدول (٢٠-٣). ومجاميع المربعات لتأثيرات العامل، في كل حالة، هي الفروق بين مجموعي مربعات الخطأ للنموذج المخفض والنموذج التام، ودرجات الحرية المصاحبة هي الفروق بين درجات الحرية الموافقة لمجموعي مربعات الخطأ هذين. ونلاحظ أن مجموع المربعات الكلي غير مبين في الجدول (٢٠-٤) لأن مجاميع المربعات للأنواع الثلاثة لتأثيرات العوامل ومجموع مربعات الخطأ لاتجمع تماما إلى $SSTO$ عندما تكون حجوم العينات لكل معالجة غير متساوية.

تحسين نموذج التحاين

إذا كان من المرغوب تحسين نموذج التحاين بغية اختبار التأثيرات الرئيسة لعامل، وذلك عندما يؤدي اختبار التفاعل إلى استنتاج عدم وجود تأثيرات تفاعل، فينبغي تعديل أسلوب الانحدار الذي وصفناه آنفا. وتحديدا، فإن النموذج التام (20.4) في مثال هرمون النمو سوف لايعود نموذجا تاما لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B عندما لا يوجد تفاعل. وبدلا من ذلك، فإن النموذج التام لهذه الاختبارات يستثني تأثيرات التفاعل ويصبح كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_1 X_{ijk1} + \beta_1 X_{ijk2} + \beta_2 X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \qquad (20.21)$$

ملاحظة

إذا كانت حجوم العينات n_{ij} لاتختلف كثيرا (ويقول بعض الإحصائيين بما لايزيد عن نسبة 2 إلى 1، مع كون معظم الأعداد n_{ij} قريبة بعضها إلى بعض) و لم يكن أي من الأعداد n_{ij} صفرا، فيمكن استخدام تحليل تباين تقريبي يسمى طريقة المتوسطات غير الموزونة. وتستخدم هذه الطريقة التقريبية أحيانا مع اختلافات كبيرة بين الأعداد n_{ij} ولكن، فقط، عندما نرغب بتقريب أولي سريع لتأثيرات التفاعل.

والطريقة بسيطة إذ نقوم بتحليل التباين مستخدمين المتوسطات $\bar{Y}_{ij.}$ وكأنها مشاهدات بمفردها لكل معالجة. وهكذا تُحسب SSA، SSB، $SSAB$، بالطريقة المعتادة،

باستثناء أن لكل معالجة مشاهدة واحدة، فقط، هي $\bar{Y}_{ij.}$. ونعلم أن "للمشاهدة" $\bar{Y}_{ij.}$ تباين يساوي σ^2/n_{ij}، وبالتالي يكون التباين المتوسط "للمشاهدات" $\bar{Y}_{ij.}$ هو:

$$\frac{\sum_i \sum_j \frac{\sigma^2}{n_{ij}}}{ab} = \frac{\sigma^2}{ab} \sum_i \sum_j \frac{1}{n_{ij}} \tag{20.13}$$

ويُقدَّر التباين σ^2 بالمقدار MSE، سواء أكانت التكرارات متساوية أم لا:

$$MSE = \frac{\sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2}{n_T - ab} \tag{20.14}$$

ويكون التباين المتوسط المقدَّر للمشاهدات:

$$\frac{MSE}{ab} \sum_i \sum_j \frac{1}{n_{ij}} \tag{20.15}$$

ويُستخدم هذا التقدير عندئذ كتقدير لتباين الخطأ في تحليل التباين الخاص "بالمشاهدات" $\bar{Y}_{ij.}$.

وقد طوّر فيديرر (*Federer*) وزيلن (*Zelen*)، المرجع 20.1، طريقة تقريبية أخرى. وهي أكثر دقة غير أنها أكثر تعقيدا، إلى حد ما، من طريقة المتوسطات غير الموزونة.

(٢٠-٣) تقدير تأثيرات العوامل عندما تكون حجوم العينات غير متساوية

لا تبرز مشاكل جديدة في تقدير تأثيرات العوامل عندما تكون حجوم العينات غير متساوية. وتعتمد طبيعة التحليل، كما في حالة عينات متساوية، على ما إذا كانت هناك تفاعلات قوية أم لا. وعندما لاتوجد تفاعلات قوية، يهتم التحليل، بصورة عامة، بمتوسطات مستويات العوامل $\mu_{i.}$ و $\mu_{.j}$. وعلى الوجه الآخر، عندما توجد تفاعلات مهمة، يركز التحليل عادة، على متوسطات المعالجات μ_{ij}.

وعندما تكون حجوم العينات غير متساوية يجب، بالطبع، تعديل المقدّرات والتباينات المقدَّرة المعطاة في الفصل ١٩ من أجل حجوم عينات متساوية. وعلى سبيل المثال، إذا كان الاهتمام في تقدير متوسطات مستويات العوامل $\mu_{i.}$ كما عرفناها في (18.2):

$$\mu_{i.}=\frac{\sum_{j}\mu_{ij}}{b}$$

فالمقدِّر المناسب هو ببساطة المتوسط غير المرجح لمتوسطات المعالجات المقدَّرة $\bar{Y}_{ij.}$:

$$\hat{\mu}_{i.}=\frac{\sum_{j}\bar{Y}_{ij.}}{b}$$

وبما أن $\bar{Y}_{ij.}$ مستقلة، فتباين هذا المقدِّر هو:

$$\sigma^2\{\hat{\mu}_{i.}\}=\frac{1}{b^2}\sum_{j}\sigma^2\{\bar{Y}_{ij.}\}=\frac{1}{b^2}\sum_{j}\frac{\sigma^2}{n_{ij}}=\frac{\sigma^2}{b^2}\sum_{j}\frac{1}{n_{ij}}$$

والتباين المقدَّر هو:

$$s^2\{\hat{\mu}_{i.}\}=\frac{MSE}{b^2}\sum_{j}\frac{1}{n_{ij}}$$

ويقدم الجدول (٢٠-٥) الصيغ الخاصة بالمقدّر النقطي والتباين المقدَّر، وذلك عند تقدير متوسطات مستويات العوامل، ومقارنات ثنائية بين متوسطات مستويات العوامل، ومتضادات أو تراكيب خطية في متوسطات مستويات العوامل، في حالة حجوم عينات غير متساوية. والصيغ المقابلة الخاصة بمتوسطات المعالجات، والمقارنات الثنائية بين متوسطات المعالجات، ومتضادات أو تراكيب خطية في متوسطات المعالجات، معروضة، أيضا، في هذا الجدول.

وجميع طرق المقارنات الثنائية القابلة للتطبيق في حالة حجوم عينات متساوية تبقى مناسبة عندما تكون حجوم عينات المعالجات غير متساوية. وطريقة توكي في المقارنات الثنائية هي الآن طريقة محافظة. ودرجات الحرية المصاحبة لـ MSE هي n_T - ab، كما في السابق. ولنتذكر في حجوم العينات المتساوية أن n_T - nab. وبالتالي يكون n_T-ab عندئذ مساويا لـ $(n-1)ab$. ويقدم الجدول (٢٠-٥)، أيضا، المقارنات المتعددة المتزامنة المناسبة للقيام باستقراءات حول متوسطات مستويات عامل أو متوسطات المعالجات.

جدول (٢٠-٥) مقدرات نقطية وتباينات مقدّرة لتحاليل عاملين عندما تكون حجوم العينات غير متساوية

(أ) متوسط مستوى عامل

$$\mu_{i.} = \frac{\sum_j \mu_{ij}}{b} \qquad \mu_{.j} = \frac{\sum_i \mu_{ij}}{a}$$

$$\hat{\mu}_{i.} = \frac{\sum_j \bar{Y}_{ij.}}{b} \qquad \hat{\mu}_{.j} = \frac{\sum_i \bar{Y}_{ij.}}{a} \tag{20.16}$$

$$s^2\{\hat{\mu}_{i.}\} = \frac{MSE}{b^2}\sum_j \frac{1}{n_{ij}} \qquad s^2\{\hat{\mu}_{.j}\} = \frac{MSE}{a^2}\sum_i \frac{1}{n_{ij}}$$

(ب) مقارنة ثنائية لمتوسطات مستويات عامل

$$D = \mu_{i.} - \mu_{i'.} \qquad D = \mu_{.j} - \mu_{.j'}$$

$$\hat{D} = \hat{\mu}_{i.} - \hat{\mu}_{i'.} \qquad \hat{D} = \hat{\mu}_{.j} - \hat{\mu}_{.j'} \tag{20.17}$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{MSE}{b^2}\sum_j\left(\frac{1}{n_{ij}} + \frac{1}{n_{i'j}}\right) \qquad s^2\{\hat{D}\} = \frac{MSE}{a^2}\sum_j\left(\frac{1}{n_{ij}} + \frac{1}{n_{ij'}}\right)$$

(جـ) متضادة أو تركيب خطي في متوسطات مستويات عامل

$$L = \sum_i c_i \mu_{i.} \qquad L = \sum_j c_j \mu_{.j}$$

$$\hat{L} = \sum_i c_i \hat{\mu}_{i.} \qquad \hat{L} = \sum_j c_j \hat{\mu}_{.j} \tag{20.18}$$

$$s^2\{\hat{L}\} = \frac{MSE}{b^2}\sum_i c_i^2 \sum_j \frac{1}{n_{ij}} \qquad s^2\{\hat{L}\} = \frac{MSE}{a^2}\sum_j c_j^2 \sum_i \frac{1}{n_{ij}}$$

(د) فترات ثقة متعددة

تقدير بمفرده

$$t(1 - \alpha/2; n_T - ab) \qquad t(1 - \alpha/2; n_T - ab)$$

مقارنات متعددة

$$B = t(1 - \alpha/2g; n_T - ab) \qquad B = t(1 - \alpha/2g; n_T - ab)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q(1-\alpha; a, n_T - ab) \qquad T = \frac{1}{\sqrt{2}} q(1-\alpha; b, n_T - ab) \tag{20.19}$$

$$S^2 = (a-1)F(1-\alpha; a-1, n_T - ab) \qquad S^2 = (b-1)F(1-\alpha; b-1, n_T - ab)$$

جدول (٢٠-٥) تتمة

(هـ) متوسط معالجة

$$\mu_{ij}$$

$$\hat{\mu}_{ij} = \bar{Y}_{ij.} \qquad (20.20)$$

$$s^2\{\hat{\mu}_{ij}\} = \frac{MSE}{n_{ij}}$$

(و) مقارنة ثنائية لمتوسطات المعالجات

$$D = \mu_{ij} - \mu_{i'j'}$$

$$\hat{D} = \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i'j'} \qquad (20.21)$$

$$s^2\{\hat{D}\} = MSE\left(\frac{1}{n_{ij}} + \frac{1}{n_{i'j'}}\right)$$

(ز) متضادة أو تركيب خطي في متوسطات المعالجات

$$L = \sum\sum c_{ij}\mu_{ij}$$

$$\hat{L} = \sum\sum c_{ij}\bar{Y}_{ij.} \qquad (20.22)$$

$$s^2\{\hat{L}\} = MSE\sum\sum\frac{c_{ij}^2}{n_{ij}}$$

(ح) فترات ثقة متعددة

تقدير بمفرده

$$t(1 - \alpha/2; n_T - ab)$$

مقارنات متعددة

$$B = t(1 - \alpha/2g; n_T - ab)$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}q(1-\alpha; ab, n_T - ab) \qquad (20.23)$$

$$S^2 = (ab-1)F(1-\alpha; ab-1, n_T - ab)$$

وبما أن تقدير تأثيرات العوامل لاينطوي على قضايا جديدة عندما تكون حجوم العينات غير متساوية، فسنمضي مباشرة إلى مثالين.

مثال ١- مقارنات ثنائية لمتوسطات مستويات عامل

نستمر الآن مع مثال هرمون النمو. فقد وجدنا سابقا أن جنس الطفل وتطور العظم لا يتفاعلان من حيث تأثيرهما على التغير في معدل النمو عند إعطاء هرمون

النمو. وفضلا عن ذلك فقد وجدنا أنه ليس للجنس (عامل *A*) تأثيرات رئيسة، ولكن استنتجنا أن تطور عظم الطفل (عامل *B*) يؤثر في معدل تغير النمو. وسنحلل الآن طبيعة تأثيرات تطور العظم باللجوء إلى مقارنات ثنائية بين فئات تطور العظم الثلاث، وسنستخدم طريقة توكي في المقارنات المتعددة. و هذه الطريقة محافظة عندما تكون حجوم العينات غير متساوية، وفي المقابل ، فإن استخدام طريقة بونفيروني يمكن أن يؤدي هنا إلى فترات ثقة أوسع. و قد حُدّد معامل الثقة العائلي ليكون 0.90.

نستخدم الصيغ (20.7) للتقديرات النقطية والتباينات المقدَّرة، ومتوسطات المعالجات المقدَّرة معطاة في الجدول (٢٠-١). ويمكن العثور على *MSE* في الجدول (٢٠-٤). ونحصل من أجل المقارنات الثنائية لمتوسطات مستويات عامل تطور العظم (j=1 : قصور شديد، j=2 : قصور معتدل، j=3 : قصور طفيف) على ما يلي:

$$\hat{\mu}_{.1}=\frac{\overline{Y}_{11.}+\overline{Y}_{21.}}{2}=\frac{2.0+2.4}{2}=2.2$$

$$\hat{\mu}_{.2}=\frac{\overline{Y}_{12.}+\overline{Y}_{22.}}{2}=\frac{1.9+2.1}{2}=2.0$$

$$\hat{\mu}_{.3}=\frac{\overline{Y}_{13.}+\overline{Y}_{23.}}{2}=\frac{.9+.9}{2}=.9$$

$$\hat{D}_1=\hat{\mu}_{.1}-\hat{\mu}_{.2}=2.2-2.0=.2$$

$$\hat{D}_2=\hat{\mu}_{.1}-\hat{\mu}_{.3}=2.2-.9=1.3$$

$$\hat{D}_3=\hat{\mu}_{.2}-\hat{\mu}_{.3}=2.0-.9=1.1$$

$$s^2\{\hat{D}_1\}=\frac{.1625}{(2)^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)=.0880 \qquad s\{\hat{D}_1\}=.297$$

$$s^2\{\hat{D}_2\}=\frac{.1625}{(2)^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)=.0880 \qquad s\{\hat{D}_2\}=.297$$

$$s^2\{\hat{D}_3\}=\frac{.1625}{(2)^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=.0677 \qquad s\{\hat{D}_3\}=.260$$

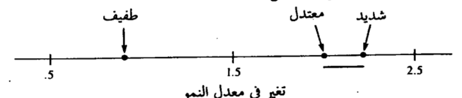
ولمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة نحتاج إلى:

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}q(.90;3,8)=\frac{1}{\sqrt{2}}(3.37)=2.38$$

وبالتالي نحصل على فترات الثقة التالية:

$$-.51 = .2 - 2.38(.297) \le \mu_1 - \mu_2 \le .2 + 2.38(.297) = .961$$
$$.59 = 1.3 - 2.38(.297) \le \mu_1 - \mu_3 \le 1.3 + 2.38(.297) = 2.01$$
$$.48 = 1.1 - 2.38(.260) \le \mu_2 - \mu_3 \le 1.1 + 2.38(.260) = 1.72$$

ونستنتج من فترات الثقة هذه، وبمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة، أن للأطفال القصار، مع عَوَز في هرمون النمو المتصفين بقصور طفيف في تطور العظم، زيادة في معدل النمو أقل بكثير، في المتوسط، منها في أطفال يتصفون بقصور معتدل أو قصور شديد في تطور العظم. وفضلا عن ذلك، فإن الفئتين الأخيرتين من الأطفال لاتُظهران فرقا بيّنا في متوسطات تغير معدل النمو. ونلخص هذه النتائج في رسم الخط التالي للمتوسطات المقدَّرة لمستويات عامل:



مثال ٢ـ اختبار بدرجة واحدة من الحرية

في مثال هرمون النمو أراد باحث معرفة ماإذا كان الأطفال من فئة القصور الطفيف في تطور العظم يحصلون، في المتوسط، على أي زيادة في معدل النمو عند إعطائهم هرمون النمو. وهكذا، فإن البدائل التي ينبغي اعتبارها بدائل اختبار وحيد الجانب:

$$H_0: \mu_3 \le 0$$
$$H_a: \mu_3 > 0$$

وسنضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = .05$.

إحصاءة الاختبار التي ينبغي استخدامها هي:

$$t^* = \frac{\hat{\mu}_3 - 0}{s\{\hat{\mu}_3\}}$$

وقد وجدنا سابقا أن $\hat{\mu}_3 = .9$ وأن $MSE = 0.1625$. وبالتالي نحصل، عند استخدام (20.16) على:

$$s^2\{\hat{\mu}_3\} = \frac{.1625}{(2)^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = .0339 \qquad s\{\hat{\mu}_3\} = .184$$

وتكون إحصاءة الاختبار:

$$t^*=\frac{.9-0}{0.284}=4.89$$

ومن أجل $\alpha = .05$، نحتاج إلى $t(.95; 8) = 1.860$. وبالتالي تكون قاعدة القرار وحيدة الجانب:

إذا كان $t^* \leq 1.860$ استنتج H_0،

إذا كان $t^* > 1.860$ استنتج H_a،

وبما أن $t^* = 4.89 > 1.860$ نستنتج H_a، أي أن متوسط التغير في معدل النمو لأطفال من فئة القصور الطفيف في تطور العظم هو أكبر من الصفر. والقيمة -P وحيدة الجانب لإحصاءة الاختبار هذه هي 0.0006.

(٢٠-٤) خلايا فارغة في دراسات ثنائية العامل

من وقت لآخر يجد المرء بعد استكماله لدراسة ثنائية العامل أنه لا توجد مشاهدات في واحدة أو أكثر من خلايا المعالجات. وعندئذ لاتكون حجوم عينات المعالجات غير متساوية فحسب، وإنما لاتوجد أية معلومات عينة عن متوسطات المعالجات ذات الخلايا الفارغة. لنعتبر ثانية الجدول (٢٠-١) الخاص بدراسة هرمون النمو، فنلاحظ أن بنتين ممن يعانين من قصور شديد في تطور العظم قد هجرتا الدراسة قبل استكمالها مما ترك مشاهدة واحدة فقط ($n_{21} = 1$) لتلك المعالجة. ويمكن أن نتصور بسهولة أن البنات الثلاثة جميعهنَّ كان يمكن أن يتركن الدراسة. وعندئذ سيكون لدينا $n_{21} = 0$، ولا تتوفر لنا أية معلومات عينة عن متوسط المعالجة μ_{21}.

تحليل جزئي لتأثيرات العوامل

عندما تكون إحدى خلايا المعالجات أو عدد منها خالية، لايمكن تنفيذ تحليل التباين المعتاد لحجوم عينات غير متساوية باستخدام أسلوب الانحدار الذي شرحناه آنفا. وهذا لايعني، على أي حال، أن الدراسة ثنائية العامل قد أصبحت بكاملها عديمة الجدوى. وفي العادة، يمكن القيام بتحاليل متنوعة تقدم لنا، على الأقل، معلومات جزئية عن طبيعة تأثيرات العوامل. وتعتمد التحاليل التي يمكن القيام بها على الخلايا

ذاتها التي لاتتوفر عنها معلومات عينة. وسنوضح بواسطة مثال كيف يمكن الحصول على معلومات جزئية من دراسات ثنائية العامل مع خلايا فارغة.

مثال. في مثال هرمون النمو، لنفترض أنه لم تكن هناك مشاهدات من أجل البنات ذوات القصور الشديد في تطور العظم، أي أن $n_{21} = 0$. ففي هذه الحالة سوف لا تتوفر معلومات عينة عن متوسط المعالجة μ_{21}.

ولا يزال من الممكن الحصول على معلومات جزئية عن التفاعلات بقصر الانتباه على أطفال من ذوي القصور المعتدل والقصور الطفيف في تطور العظم. ومن أجل هؤلاء الأطفال، تكون التفاعلات موجودة إذا لم تبق الفروق بين متوسطات المعالجات للجنسين نفسها من أجل فئتي تطور العظم. والفرقان هنا هما:

$$\mu_{12} - \mu_{22} \qquad \mu_{13} - \mu_{23}$$

وهكذا سنتأمل المتضادة التالية بين متوسطات المعالجات:

$$L = \mu_{12} - \mu_{22} - \mu_{13} + \mu_{23}$$

ويمكننا إما تقدير L بفترة ثقة، ثم ملاحظة ماإذا كانت الفترة تتضمن الصفر أم لا، وإما إجراء اختبار بدرجة واحدة من الحرية لمعرفة ماإذا كانت التفاعلات موجودة أم لا. وفي أي من الأسلوبين يمكن استخدام MSE مبنية على مشاهدات العينة كافة، وبحيث تكون درجات الحرية المصاحبة لـ MSE $8 = 5 - 13 = (ab - 1) - n_T$. (تذكّر أن $n_{21} = 0$ الآن).

وإذا اقترح التحليل الجزئي للتفاعلات عدم وجود تفاعلات، فيمكن دراسة تأثير الجنس بمقارنة متوسطات مستويات العامل مستثنين الأطفال ذوي القصور الشديد في تطور العظم:

$$\mu_{1.} = \frac{\mu_{12} + \mu_{13}}{2} \qquad \mu_{2.} = \frac{\mu_{22} + \mu_{23}}{2}$$

وفضلا عن ذلك، يمكن دراسة تأثير تطور العظم للصبيان بمقارنة متوسطات المعالجات μ_{11}، μ_{12}، و μ_{13}، أو يمكن دراستها للأطفال من الجنسين مستثنين أولئك الذين يعانون من قصور شديد في تطور العظم:

$$\mu_{.2} = \frac{\mu_{12} + \mu_{22}}{2} \qquad \mu_{.3} = \frac{\mu_{13} + \mu_{23}}{2}$$

التحليل عند إمكانية استخدام نموذج بدون تفاعلات

تتوفر أحيانا معلومات من دراسات سابقة أن العاملين في دراسة ثنائية العامل لايتفاعلان. وفي هذه الحالة، يمكن استخدام نموذج أبسط من نموذج التحاين (18.22). ونموذج اللاتفاعل بعاملين مع مستويات عامل مثبتة هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \quad \text{نموذج لا تفاعل} \tag{20.24}$$

و لم نناقش هذا النموذج سابقا لأن المعلومات عن صلاحية هذا النموذج (أي عما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا) لاتتوفر، في العادة، سلفا.

وعلى أي حال، إذا كان نموذج اللاتفاعل (20.24) مناسبا فيمكن القيام بتحليل التباين وتحليل التأثيرات الرئيسة للعوامل باستخدام أسلوب الانحدار وذلك حتى في حالة وجود خلية أو عدة خلايا فارغة، طالما أنه يمكن تقدير متوسطات الخلايا الفارغة من متوسطات الخلايا غير الفارغة باستخدام (18.7*b*).

وعلى سبيل المثال، لنفترض ثانية أن خلية البنات ذوات القصور الشديد في تطور العظم، في مثال هرمون النمو، فارغة، ولكن يمكن للباحث أن يفترض، من معرفة سابقة، عدم وجود تفاعل بين الجنس وتطور العظم. ففي هذه الحالة يُختزل نموذج الانحدار (20.4) إلى النموذج في (20.12):

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_1 X_{ijk2} + \beta_2 X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{نموذج تام} \tag{20.25}$$

ولاختبار التأثيرات الرئيسة للجنس، مثلا، نقوم أولا بتوفيق النموذج التام ونحصل على $SSE(F)$ والبدائل التي نريد اختبارها هي:

$$H_0: \alpha_1 = 0$$
$$H_0: \alpha_1 \neq 0$$

وبالتالي يكون النموذج المخفض:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \beta_1 X_{ijk2} + \beta_2 X_{ijk3} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{نموذج مخفض} \tag{20.26}$$

ثم نقوم بتوفيق هذا النموذج المخفض ونحصل على $SSE(R)$، ونحسب إحصاءة الاختبار الخطي العام (3.69) بالطريقة المعتادة. وفي هذه الحالة بالذات، يمكن، أيضا، استخدام إحصاءة الاختبار t^* في (8.23) باعتبار أن الاختبار هو ببساطة حول ما إذا

كانت معلمة انحدار بمفردها مساوية للصفر أم لا. وبصورة مماثلة يمكن القيام باختبار تأثيرات تطور العظم.

والسبب في إمكانية القيام بتحليل التباين المعتاد بأسلوب الانحدار مع أن $n_{21} = 0$ هو أن افتراض عدم وجود تفاعل يسمح لنا في الواقع بتقدير μ_{21}. ومن الناحية الذهنية يحتاج هذا التقدير لـ μ_{21} إلى خطوتين. فنحتاج أولا إلى تقدير متوسطات المعالجات μ_{ij} للخلايا غير الفارغة. وهذه التقديرات هي أكثر تعقيدا من مجرد استخدام المتوسطات المقدرة للمعالجات $\bar{Y}_{ij.}$، إذ نحتاج إلى الانتفاع بما يفترضه النموذج من عدم وجود تفاعلات، ونحصل على هذه التقديرات باستخدام طرق المصفوفات الموصوفة في الفقرة ٨-٦. (سنوضح كيفية تقدير متوسطات المعالجات μ_{ij} في حالة نموذج اللاتفاعل في الفقرة ٢١-١) وحالما نجد تقديرات لمتوسطات المعالجات μ_{ij} للخلايا غير الفارغة، تكون الخطوة الثانية في تقدير μ_{21} هي الاستفادة من العلاقة (18.7b) الخاصة بحالة اللاتفاعل، إذ يمكننا التعبير عن μ_{21} بدلالة متوسطات المعالجات الثلاثة الباقية، فعلى سبيل المثال، لدينا:

$$\mu_{21} = \mu_{22} + \mu_{11} - \mu_{12}$$

وهكذا تسمح لنا تقديرات μ_{22}، μ_{11} و μ_{12} التي تتوفر من أجلها بيانات عينة، بتقدير μ_{21} وذلك عندما لاتوجد تفاعلات.

وينبغي التحذير بأنه من غير المناسب استخدام نموذج اللاتفاعل كنموذج تام عندما لاتتوفر معلومات سابقة عن غياب التفاعلات. وكما شرحنا سابقا، لا يمكن عندئذ القيام إلا بتحاليل جزئية لتأثيرات العوامل، وذلك عندما تكون بعض خلايا المعالجات فارغة.

(٢٠-٥) حزم الحسابات الإحصائية

لابد من ممارسة الحذر الشديد عند استخدام برامج تحليل التباين في الحزم بحجوم عينات غير متساوية لأن الاختيار المتأخر في الحزمة قد لايخصص بالضرورة الأهمية نفسها لكل متوسط معالجة. وينبغي أن يقرأ المستخدم وثائق الحزمة بعناية ويطمئن إلى أن الحزمة تولّد مجموع المربعات المناسب للاختبارات ذات الأهمية بالنسبة له.

وفي الحزم الإحصائية *SAS,BMDP*، و *SPSS*ˣ نجد أن المُخرجات المكافئة لنتائج الانحدار التي حصلنا عليها في الفقرة ٢٠-٢ في حالة متوسطات معالجات متساوية الأهمية وعدم وجود خلايا فارغة هي كمايلي عند كتابة هذا المرجع:

BMDP2V – اختيار متأخر(*(Default Option*)

SASP ROC GLM – مجموع المربعات من النوع *III* أو النوع *IV*.

*SPSS*ˣ *ANOVA* – الاختيار التاسع.

كما ينبغي ممارسة الحذر، أيضا، مع تحاين حزم الحاسب التي تزود بنتائج عندما تكون بعض خلايا المعالجات فارغة. فقد تفترض الحزمة افتراضات حول التفاعلات لايرحب الباحث بها. وفي حالة وصف واضح لكيفية تناول الحزمة للخلايا الفارغة، يكون من المفضل القيام بالتحاليل المناسبة دون مساعدة الحزمة باستثناء الحصول على تقديرات لمتوسطات المعالجات وعلى *MSE*.

مراجع ورد ذكرها

[20.1] Federer, W. T., and M. Zelen. "*Analysis of Multifactor Classifications with Unequal Numbers of Observations.*" *Biomertrics* 22 (1966), pp. 525 - 52.

مسائل

(٢٠-١) اختار باحث تسويق مقيم عينة عشوائية من 400 منطقة وصنفها وفقا لعدد السكان (أربعة مستويات) وللموقع الجغرافي (خمسة مستويات) وذلك لدراسة تأثيرات هذين العاملين على مبيعات منتجات الشركة. وعندما وجد أن حجوم عينات المعالجات غير متساوية. وكان أصغرها 4، قام بتوليد أعداد عشوائية لتخفيض عدد المناطق في كل خلية إلى أربع. ثم مضى إلى تحليل تأثيرات عدد السكان والموقع الجغرافي على أساس المناطق الثمانين الباقية.

أ – هل تقود طريقة الإهمال العشوائي لمشاهدات إلى أية انحيازات؟

ب– هل كان من الحكمة أن يهمل الباحث 320 مشاهدة بصورة عشوائية كي يحصل على حجوم عينات متساوية؟

(٢٠ـ٢) سأل طالب: "إذا كان لابد من تحليل دراسات ثنائية العامل مع حجوم عينات غير متساوية بأسلوب الانحدار فلمَ نزعج أنفسنا، على الإطلاق، بنموذج تحليل التباين ذي العاملين؟ علّق.

(٢٠ـ٣) بالإشارة إلى مسألة **العروض النقدية** (١٨ـ١٠). افترض أن المشاهدتين $Y_{214} = 18$ و $Y_{323} = 20$ مفقودتان لأن العرض الذي جرى تسليمه في كل من هاتين الحالتين كان على شكل سلعة وليس عرضا نقديا.

أ ـ اعرض نموذج التحاين لهذه الحالة. واعرض، أيضا، نموذج الانحدار المكافئ، استخدم 1, -1, 0 كمتغيرات مؤشرة.

ب ـ اكتب المصفوفتين $\mathbf{X}$ و $\boldsymbol{\beta}$ لنموذج الانحدار في الجزء (أ).

جـ ـ أوجد $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ وبيّن أنه يمكن الحصول على متوسطات المعالجات المناسبة بواسطة النموذج الذي وضعته.

د ـ ما هو النموذج المخفض لاختبار تأثيرات التفاعل؟

هـ ـ اختبر ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا من خلال توفيق النموذجين التام والمخفض، استخدم $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

و ـ اعرض النموذجين المخفضين لاختبار كل من تأثيرات العمر والجنس، على الترتيب. نفّذ هذين الاختبارين. استخدم $\alpha = .05$. في كل منهما واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P لكل اختبار؟

ز ـ لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة للعمر، قدّر المقارنات الثنائية التالية:

$$D_1 = \mu_{1.} - \mu_{2.} \qquad D_3 = \mu_{2.} - \mu_{3.}$$
$$D_2 = \mu_{1.} - \mu_{3.}$$

استخدم طريقة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة.

حـ ـ في مجتمع المالكين الإناث، كان 30 بالمائة من الفتيات، 60 بالمائة متوسطات العمر، و 10 بالمائة من المسنّات. قدّر متوسط العرض النقدي لهذا المجتمع مستخدما 95% فترة ثقة.

(٢٠-٤) بالإشارة إلى مسألة **شفاء حمّى العَلَف** (١٨-١٤). افترض أن المشاهدات $Y_{113} = 2.3, Y_{221} = 8.9$ و $Y_{224} = 9.0$ مفقودة لأن المرضى لم يسجلوا مباشرة تاريخ بدء معاناتهم مجددا من حمى العلف.

أ - اعرض نموذج التحاين لهذه الحالة. اعرض، أيضا، نموذج الانحدار المكافئ استخدم المتغيرات المؤشرة 1 ,1- ,0.

ب - اعرض المصفوفتين **X** و β لنموذج الانحدار في (أ).

جـ - أوجد $\mathbf{X}\beta$ وبيّن أنه يمكن الحصول على متوسطات المعالجات المناسبة بواسطة النموذج.

د - ما هو النموذج المخفض لاختبار تأثيرات التفاعل؟

هـ - اختبر ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا من خلال توفيق النموذجين التام والمخفض، استخدم $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

و - يُراد دراسة طبيعة تأثيرات التفاعل بواسطة المتضادات التالية:

$$L_1 = \frac{\mu_{12} + \mu_{13}}{2} - \mu_{11} \qquad L_4 = L_2 - L_1$$

$$L_2 = \frac{\mu_{22} + \mu_{23}}{2} - \mu_{21} \qquad L_5 = L_3 - L_1$$

$$L_3 = \frac{\mu_{32} + \mu_{33}}{2} - \mu_{31} \qquad L_6 = L_3 - L_2$$

أوجد فترات ثقة لهذه المتضادات، استخدم طريقة شيفّه للمقارنات المتعددة بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة. فسّر نتائجك.

(٢٠-٥) بالإشارة إلى مسألة **معالجة الفشل الكلوي في المستشفى** (١٨- ١٨). افترض أن المشاهدات $Y_{124} = 12$, $Y_{216} = 2$, و $Y_{238} = 9$ مفقودة لأن سجلات المستشفى لهؤلاء المرضى غير تامة. مع الاستمرار في العمل بالبيانات المحوّلة $Y' = \log_{10}(Y+1)$.

أ - اعرض نموذج التحاين لهذه الحالة. اعرض، أيضا، نموذج الانحدار المكافىء، استخدم المتغيرات المؤشرة 1 ,1- ,0.

ب ـ اكتب المصفوفتين **X** و β لنموذج الانحدار في الجزء (أ).

جـ ـ أوجد **X**β وبيّن أنه يمكن الحصول على متوسطات المعالجات المناسبة بواسطة النموذج الذي وضعته.

د ـ ما هو النموذج المخفّض لاختبار تأثيرات التفاعل؟

هـ ـ اختبر ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا من خلال توفيق النموذجين التام والمخفض، استخدم $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

و ـ اعرض النموذجين المخفضين لاختبار التأثيرات الرئيسة لفترة دوام المعالجة وللزيادة في الوزن، على الترتيب. نفّذ كلا من الاختبارين. استخدم $\alpha = .05$. في كل منهما واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P لكل اختبار؟

ز ـ استخدم الإحصاءة t^* بدرجة واحدة من الحرية لاختبار ما إذا كان متوسط عدد أيام المستشفى (بالوحدات بعد التحويل) للمرضى الذين كانت زيادة الوزن عندهم طفيفة يتجاوز 0.5، استخدم $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

حـ ـ لتحليل طبيعة التأثيرات الرئيسة للعوامل، قدِّر المقارنات الثنائية التالية:

$$D_1 = \mu_{1.} - \mu_{2.} \qquad D_3 = \mu_{.3} - \mu_{.1}$$
$$D_2 = \mu_{.2} - \mu_{.1} \qquad D_4 = \mu_{.3} - \mu_{.2}$$

استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة. اعرض نتائجك.

(٢٠-٦) أساتذة ملحقون

اختار متخصص في العلوم الاجتماعية عينة عشوائية من 45 أستاذا ملحقا ممن يعملون في القسم المسائي من جامعة كبيرة لدراسة المشاكل الخاصة المصاحبة للتعليم في القسم المسائي، وتتضمن البيانات المجموعة مقدار الدفعة التي تسلّمها عضو هيئة التدريس وفقا لموضوع المقرر المدروس (عامل A) ولأعلى درجة حصل عليها المدرس (عامل B). والتعويضات على أساس المقرر الواحد (بآلاف الدولارات) معطاة في بداية هذه المسألة.

عامل A	موضوع الدراسة	$j = 1$ بكالوريوس	$j = 2$ ماستر	$j = 3$ دكتوراه
		(أعلى درجة) B عامل		
$i = 1$	علوم إنسانية	1.7	1.8	2.5
		1.9	2.1	2.7
				2.9
				2.5
				2.6
				2.8
				2.7
				2.9
$i = 2$	علوم اجتماعية	2.5	2.7	3.5
		2.3	2.4	3.3
		2.6	2.6	3.6
		2.4	2.4	3.4
			2.5	
$i = 3$	هندسة	2.7	2.9	3.7
		2.8	3.0	3.6
			2.8	3.7
			2.7	3.8
				3.9
$i = 4$	إدارة	2.5	2.3	3.3
		2.6	2.8	3.4
				3.3
				3.5
				3.6

أ ـ اعرض نموذج التحاين لهذه الحالة. اعرض، أيضا، نموذج الانحدار المكافئ، استخدم المتغيرات المؤشرة 1 , 1- ,0.

ب ـ اكتب المصفوفتين $\mathbf{X}$ و β لنموذج الانحدار في الجزء (أ).

جـ ـ أوجد $\mathbf{X}\beta$ وبيّن أنه يمكن الحصول على تقديرات مناسبة لمتوسطات المعالجات بواسطة النموذج الذي وضعته.

د ـ أوجد الرواسب، ثم جهّز رسوم رواسب نقطية متحاذية للمعالجات. ما هي النتائج التي توصلت إليها؟

هـ ـ جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت افتراض الطبيعية. هل يبدو افتراض الطبيعية معقولا هنا؟

(٢٠ـ٧) بالإشارة إلى مسألة **الأساتذة الملحقين** (٢٠ـ٦). افترض أن نموذج التحاين مناسب هنا، باستثناء أن $k = 1, ..., n_{ij}$ هنا.

أ ـ ارسم المتوسطات المقدّرة للمعالجات $\bar{Y}_{ij.}$ في هيئة الشكل (٢٠–١). هل يبدو أن هناك أية تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب ـ ما هو النموذج المخفّض لاختبار تأثيرات التفاعل؟

جـ ـ اختبر ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا من خلال توفيق النموذجين التام والمخفض، استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

د ـ اعرض النموذجين المخفّضين لاختبار التأثيرات الرئيسة لموضوع الدراسة ولأعلى درجة، على الترتيب. نفذ كلا من هذين الاختبارين. استخدم $\alpha = .01$ في كل مرة واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P لكل اختبار؟

هـ ـ قُم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات مواضيع الدراسة، استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 95%. اعرض النتائج التي توصلت إليها وقدّم ملخصا بيانيا.

و ـ قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات أعلى درجة، استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 95%. اعرض النتائج التي توصلت إليها وقدّم ملخصا بيانيا.

(٢٠ـ ٨) بالإشارة إلى مسألة **الأساتذة الملحقين** (٢٠ـ٦). لنفترض أن لدى المتخصص في العلوم الاجتماعية معلومات سابقة تفيد أن العاملين لايتفاعلان، وبالتالي فإن نموذج اللاتفاعل (20.24) مناسب.

أ ـ اعرض نموذج الانحدار التام المكافئ في هذه الحالة. اعرض، أيضا، النماذج المخفضة لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B. استخدم المتغيرات المؤشرة 1 ,1- ,0.

ب ـ قم بتوفيق النموذجين المخفّض والتام واختبر التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B، استخدم $\alpha = .05$. لكل اختبار. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة لكل اختبار. ماهي القيمة -P لكل اختبار؟

(٢٠-٩) بالإشارة إلى مسألة **الشفاء من حمّى العَلَف** (١٨-١٤). لنفترض أننا فقدنا البيانات المتعلقة بالمعالجة عندما يكون كل من العنصرين النشطين في مستواه المتوسط، وأننا نحتاج إلى تحاليل مباشرة للبيانات المتوفرة، أي لنفترض أن $n_T = 32$ و $n_{22} = 0$.

أ ـ لدراسة ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا، قدِّر المقارنات التالية:

$D_1 = \mu_{13} - \mu_{11}$ $\qquad$ $L_1 = D_1 - D_2$

$D_2 = \mu_{23} - \mu_{21}$ $\qquad$ $L_2 = D_1 - D_3$

$D_3 = \mu_{33} - \mu_{31}$

استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة. اعرض النتائج التي توصلت إليها.

ب ـ وللمزيد من استطلاع طبيعة تأثيرات ممكنة للتفاعل، قم بتنفيذ اختبارات منفصلة كل منها بدرجةواحدة من الحرية لما إذا كان $\mu_{12} = \mu_{13}$ ولما إذا كان $\mu_{32} = \mu_{33}$. استخدم $\alpha = .02$. لكل اختبار واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهو مستوى المعنوية العائلي مستخدما متراجحة بونفيروني؟

(٢٠-١٠) بالإشارة إلى مسألة **معالجة الفشل الكلوي في المستشفى** (١٨-١٨). لنفترض أن أيا من المرضى المتصفين بزيادة طفيفة في الوزن لم يتلق معالجة الديلزة لفترة طويلة، أي لنفترض أن $n_T = 50$ و $n_{21} = 0$. ولنستمر في العمل

بالبيانات المحولة وفقا للعلاقة $Y = \log_{10}(Y+1)$ وبناء على نتائج بحث مشابه يعتقد المحلل أنه من المنطقي الافتراض بأن العاملين لايتفاعلان، وأن نموذج اللاتفاعل (20.24) مناسب.

أ ـ اعرض نموذج الانحدار التام المكافئ لهذه الحالة. اعرض، أيضا، النموذجين المخفضين لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B. استخدم في نموذج الانحدار المتغيرات المؤشرة 1 , 1- ,0.

ب ـ قُم بتوفيق النموذجين التام والمخفض. اختبر التأثيرات الرئيسة للعامل Aوللعامل B، استخدم $\alpha = .05$. لكل اختبار.اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة لكل اختبار. ماهي القيمة -P لكل اختبار؟

(٢٠-١١) بالإشارة إلى مسألة **متطلبات المبرمج** (١٨-٢٠). لنفترض عدم وجود مبرمجين بأقل من خمس سنوات خبرة على كل من النظم الصغيرة والكبيرة، أي لنفترض أن $n_T = 20$ و $n_{21} = 0$.

أ ـ لدراسة مالإذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا، قدِّر المقارنات التالية:

$$D_1 = \mu_{12} - \mu_{13} \qquad L_1 = D_1 - D_2$$
$$D_2 = \mu_{22} - \mu_{23}$$

استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 95 بالمائة. اعرض النتائج التي توصلت إليها.

ب ـ لمزيد من الدراسة عن طبيعة التأثيرات الممكنة للتفاعل، اختبر ما إذا كان μ_{22} يتجاوز μ_{23} أم لا ؟ استخدم $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

(٢٠-١٢) بالإشارة إلى مسألة **الأساتذة الملحقين** (٢٠-٦). لنفترض أنه لم يكن هناك أساتذة يعلمون مقررات علوم إنسانية ويحملون درجة بكالوريوس، فقط، أي أن الدراسة تشمل $n_T = 43$ أستاذا ملحقا و $n_{11} = 0$. وبناء على بحث

سابق يعتقد المختص الاجتماعي أن من المعقول الافتراض بأن العاملين لايتفاعلان وأن نموذج اللاتفاعل (20.24) مناسب هنا.

أ ـ اعرض نموذج الانحدار التام المكافئ في هذه الحالة. اعرض، أيضا، النموذجين المخفضين لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B. استخدم في نموذج الانحدار المتغيرات المؤثرة 1 , 1- ,0.

ب ـ قم بتوفيق النموذجين التام والمخفض. اختبر التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B، استخدم α=.01 لكل اختبار. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P لكل اختبار؟

تمارين

(٢٠-١٣) في طريقة المتوسطات غير المرجحة اعط عبارات لكل من $SSA, SSB, SSAB$.

(٢٠-١٤) استنبط $\sigma^2\{\hat{L}\}$ للمتضادة المقدَّرة في (20.18) التي تتضمن $\hat{\mu}_{i.}$.

(٢٠-١٥) بيّن أن $s^2\{\hat{L}\}$ في (20.22) مقدِّر غير منحاز لِ $\sigma^2\{\hat{L}\}$.

(٢٠-١٦) لنعتبردراسة ذات عاملين حيث $a=2, b=2, n_{11}=n_{12}=n_{21}=2, n_{22}=1$ وحيث ينطبق نموذج اللاتفاعل (20.24). استخدم طرق المصفوفات في الفقرة ٨-٦ لتقدير μ_{22} (إرشاد: تأمّل الطريقة المتبعة في الفقرة ٢١-١)

(٢٠-١٧) بالإشارة إلى مسألة **معالجة الفشل الكلوي في مستشفى** (٢٠-١٠). لنفترض أنك ستستخدم أسلوب المصفوفات العام الوارد في الفقرة ٨-٦، بدلا من أسلوب الانحدار، لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A.

أ ـ اعرض المصفوفتين $\mathbf{X}$ و β اللتين سنستخدمهما في النموذج التام (8.63).

ب ـ اعرض اختار الفرضية (8.66) في صيغة مصفوفية.

مشاريع

(٢٠-١٨) بالإشارة إلى مجموعة البيانات **SENIC**. يراد دراسة تأثيرات الإقليم (عامل A: متغير 9) ومتوسط عمر المرضى (عامل B : متغير 3) على متوسط فترة الإقامة في المستشفى (متغير 2)، ولأغراض تتعلق بدراسة التحاين هذه،

سنصنّف متوسط العمر إلى ثلاث فئات: تحت 52.0 سنة، 52.0 إلى ماتحت الـ 55.0 سنة، 55.0 سنة أو أكثر.

أ ـ اعرض نموذج التحاين لهذه الحالة. واعرض، أيضا، نموذج الانحدار المكافئ، استخدم المتغيرات المؤشرة 1 ,1- ,0.

ب ـ أوجد الرواسب ثم جهِّز رسوم رواسب نقطية محاذية للمعالجات. ماهي النتائج التي توصلت إليها؟

جـ ـ جهِّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. وأوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. هل يبدو افتراض الطبيعية معقولا هنا؟

(٢٠-١٩) بالإشارة إلى مجموعة البيانات SENIC وإلى المشروع (٢٠-١٨). افترض أن نموذج التحاين (18.23)، حيث $k = 1 ,..., n_{ij}$ ، هو النموذج المناسب.

أ ـ ارسم المتوسطات المقدّرة للمعالجات $\bar{Y}_{ij.}$ في هيئة الشكل (٢٠-١). هل يبدو أن أية تأثيرات عوامل موجودة ؟ اشرح

ب ـ اعرض النموذج المخفض لاختبار تأثيرات التفاعل.

جـ ـ اختبر ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا بتوفيق النموذجين التام والمخفض؛ استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

د ـ اعرض النموذج المخفّض لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A. قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = .01$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

هـ ـ اعرض النموذج المخفض لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B. قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

و ـ قم بجميع المقارنات الثنائية بين الأقاليم، استخدم طريقة توكي ومعامل ثقة عائلي 95%. اعرض النتائج التي توصلت إليها وقدّم ملخصا بيانيا.

(٢٠-٢٠) بالإشارة إلى مجموعة البيانات SMSA. يُراد دراسة تأثيرات الإقليم (عامل A: متغير 12) والنسبة المئوية للسكان في المدن المركزية (عامل B: متغير 4) على

معدل الجريمة (متغير 11 ÷ متغير 3). ولأغراض تتعلق بدراسة التحاين هذه سنصنف النسبة المئوية للسكان في المدن المركزية إلى ثلاث فئات: تحت 30.0 بالمائة، 30.0 بالمائة إلى ما تحت 50.0 بالمائة، 50.0 بالمائة أو أكثر.

أ ـ اعرض نموذج التحاين لهذه الحالة. واعرض، أيضا، نموذج الانحدار المكافئ مستخدما المتغيرات المؤشرة 1 ,1- ,0.

ب ـ أوجد الرواسب، ثم جهّز رسوم رواسب نقطية محاذية للمعالجات. ماهي النتائج التي توصلت إليها؟

جـ ـ جهّز رسم طبيعي للرواسب. وأوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. هل يبدو افتراض الطبيعية هنا معقولا؟

(٢٠-٢١) بالإشارة إلى مجموعة البيانات SMSA وإلى المشروع (٢٠-٢٠). افترض أن نموذج التحاين (18.23)، حيث $k = 1,\ldots, n_{ij}$ ، هو النموذج المناسب.

أ ـ ارسم المتوسطات المقدّرة للمعالجات $\overline{Y}_{ij.}$ في هيئة الشكل (٢٠-١). هل يبدو أن هناك أية تأثيرات عوامل؟ اشرح.

ب ـ اعرض النموذج المخفض لاختبار تأثيرات التفاعل.

جـ ـ اختبر ما إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة أم لا بتوفيق النموذجين التام والمخفض، استخدم $\alpha = .005$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

د ـ اعرض النموذج المخفض لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A. قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = .005$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

هـ ـ اعرض النموذج المخفض لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B. قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = .005$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

و ـ قم بجميع المقارنات الثنائية بين الأقاليم. استخدم طريقة توكي ومعامل عائلي 95 بالمائة. اعرض ماتوصلت إليه من نتائج وقدّم تلخيصا بيانيا.

نماذج تأثيرات عشوائية ومختلطة لدراسات تتناول عاملين ومواضيع أخرى في تحليل التباين (التحاين)

نناقش في هذا الفصل عددا من المواضيع المختارة في تحليل التباين لدراسات تتناول عاملين. وسنعالج أولا حالة خاصة حيث توجد مشاهدة واحدة، فقط، لكل معالجة. في هذا السياق سنناقش اختبار توكي (*Tukey*) الخاص بالتجميعية، وهو اختبار لا تقتصر أهميته على الحالة التي توجد فيها مشاهدة واحدة لكل معالجة عند دراسة عاملين، ولكنه مفيد، أيضا، في تشكيلة من التصاميم التجريبية مما سنناقشه في فصول لاحقة . ومن ثمَّ نوضح كيفية إنجاز اختبارات تحاين عندما لا تكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية. وأخيرا، نعتبر نوعين من نماذج دراسات تتناول عاملين ومناسبة لحالات يمكن فيها النظر إلى مستويات أحد العاملين أو كليهما على أنها مستويات عشوائية.

(٢١-١) مشاهدة واحدة لكل معالجة

عندما توجد مشاهدة واحدة، فقط، لكل مشاهدة، لا نعود قادرين على استخدام نموذج التحاين (18.23) لعاملين، وذلك بسبب عدم توفر تقديرات لتباين الخطأ σ^2. لنتذكر من (18.38c) أن *SSE* مجموع مربعات الخطأ يتشكل من مركبات تقيس التغير ضمن كل معالجة $\sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$ ومع مشاهدة واحدة لكل معالجة، لا يوجد تغير ضمن معالجة، وسيكون *SSE* عندئذٍ مساويا للصفر دائما.

وإحدى الطرق للخروج من ههذ الصعوبة هو تغيير النموذج. ونظرة إلى الجدول (١٨-٩) تشير إلى أنه إذا كان العاملان لا يتفالاعن فإن توقع متوسط مربعات التفاعل *MSAB* يساوي σ^2 ، وهكذا فإنه إذا أمكن افتراض عدم وجود تفاعل بين العاملين،

فيمكن استخدام $MSAB$ كمقدّر لتباين الخطأ σ^2 والمضي في تحليل تأثيري العاملين كالمعتاد. وإذا لم يكن من المنطقي افتراض عدم وجود تفاعل بين العاملين، فيمكن محاولة القيام بتحويلات لإزالة التفاعل. وسنقول المزيد عن هذا الأمر في الفقرة القادمة.

نموذج اللاتفاعل

قدمنا في الفقرة (٢٠-٢٤) نموذج تحاين لعاملين مع مستويات مثبتة لكل عامل وعدم وجود تفاعل. وفي حالة $n = 1$ التي نعتبرها هنا يكون النموذج:

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad (21.1)$$

حيث حدود النموذج هي كما في نموذج التحاين (18.23) لعاملين. ونلاحظ سقوط الدليل الثالث من حدي Y و ε بسبب وجود مشاهدة واحدة، فقط، لك لمعالجة.

ويُحسب SSA وSSB، كما سبق، من (18.39a) و(18.39b)، على الترتيب. بعد وضع $n = 1$ ويُعبّر عن مجموع مربعات التفاعل في (18.39c) مع وضع $n = 1$ الآن كما يلي:

$$SSAB = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})^2 \qquad (21.2)$$

ونلاحظ أن $SSAB$ في (21.2) يتطابق مع SSAB في (18.39c) بعد وضع $n= 1$، وقد أُلغي الدليل الثالث لوجود مشاهدة واحدة، فقط، لكل معالجة، وللسبب نفسه حلّت المشاهدة Y_{ij} محل المتوسط $\bar{Y}_{ij.}$. وعدد درجات الحرية الموافق لـ $SSAB$ في (21.2) هو نفس عدد درجات الحرية الموافق لـ $SSAB$ في (18.39c) ونقصد $(a - 1)(b - 1)$.

وجدول التحاين في حالة $n = 1$ لنموذج اللاتفاعل (21.1) مبين في الجدول (٢١-١). ولا تبرز مشاكل جديدة لا في الاختبارات الخاصة بالتأثيرات الرئيسة للعاملين A و B، ولا في تقدير هذه التأثيرات. وبما أن القيمة المتوقعة لـ $MSAB$ هي σ^2 في حالة نموذج اللاتفاعل (21.1)، كما هو مبين في العمود الأخير من الجدول (٢١-١)، فإن إحصاءة الاختبار F^* لاختبار التأثيرات الرئيسية للعاملين A و B

ستستخدم الآن $MSAB$ في المقام بدلا من MSE المستخدمة سابقا:

$$F^* = \frac{MSA}{MSAB} \quad \text{التأثيرات الرئيسة للعامل } A \qquad (21.3a)$$

$$F^* = \frac{MSB}{MSAB} \quad \text{التأثيرات الرئيسة للعامل } B \qquad (21.3b)$$

وبصورة مماثلة، لتقدير مقارنات بين متوسطات مستويات العامل A والعامل B نستبدل ببساطة $MSAB$ بـ MSE في جميع النتائج السابقة باعتباره مقدّرا لتباين الخطأ σ^2، ونعدل درجات الحرية وفقا لذلك.

وتوجد مشكلة خاصة، على أي حال، في تقدير متوسطات المعالجات، وسنشرح كيفية معالجة هذه المشكلة بعد تقديم مثال.

مثال

يبين الجدول (٢١ ـ ٢أ) مقادير أقساط التأمين عن ثلاثة أشهر التي تتقاضاها شركة تأمين سيارات لقاء نوع ومقدار من التغطية محددين لصنف معين من المخاطر، وذلك من أجل ست مدن، مصنّفة وفقا لحجم المدينة (العامل A)، والمنطقة الجغرافية (العامل B). لاحظ وجود مشاهدة واحدة لكل خلية، وهو مقدار القسط لمدينة واحدة في كل من تراكيب مستويات العاملين، وتُدخل هذه الشركة تعديلات دورية على أقساطها تعكس خبرات الخسارة في موقع مقارنة مع خبرات الخسارة في موقع آخر. وقد رغب محلل تأمين في تقويم آثار حجم المدينة والموقع الجغرافي المبينين في الجدول (٢١ ـ ٢) على مقدار القسط. ومن خبراته في حالات أخرى خمّن عدم وجود تأثيرات التفاعل بالنسبة للأقساط الخاضعة للتحليل. وقد أدى اختبار التفاعلات بالفعل (وسنناقشه في الفقرة ٢١ ـ ٢) إلى استنتاج عدم وجود تأثيرات تفاعل، وهكذا تبنّى المحلل نموذج التحاين (21.1).

وحصل على مجاميع المربعات التي يتطلبها التحليل كما يلي [مستخدما الصيغ المعرفة في (18.38) و(18.39) في حالة $n = 1$].

$$SSA = 2[(120 - 175)^2 + (195 - 175)^2 + (210 - 175)] = 9{,}300$$

$$SSB = 3[(190 - 175)^2 + (160 - 175)^2] = 1{,}325$$

$$SSAB = [(140 - 120 -= 190 + 175)^2 + \ldots + (200 - 210 - 160 + 175)^2] = 100$$

$$SSTO = [(140 - 175)^2 + \ldots + (200 - 175)^2] = 10{,}750$$

جدول (٢١ ـ ١) جدول تباين لنموذج لا تفاعل بعاملين، حيث مستويات العامل مثبتة و $n = 1$.

مصدر التغير	SS	df	MS	E{MS}
العامل A	$SSA = b\sum(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$	$a - 1$	$MSA = \frac{SSA}{a-1}$	$\sigma^2 + \frac{b}{a-1}\sum(\mu_{i.} - \mu_{..})^2$
العامل B	$SSB = a\sum(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2$	$b - 1$	$MSB = \frac{SSB}{b-1}$	$\sigma^2 + \frac{a}{b-1}\sum(\mu_{.j} - \mu_{..})^2$
الخطأ	$SSAB = \sum\sum(\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})^2$	$(a - 1)(b - 1)$	$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$	σ^2
المجموع	$SSTO = \sum\sum(Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2$	$ab - 1$		

جدول (٢١-٢) دراسة لأقسام التأمين تتضمن عاملين مع $n = 1$

(أ) أقساط بوليصة تأمين لسيارة (بالدولار)

حجم المدينة (العامل A)	المنطقة (العامل B) شرق ($j = 1$)	غرب ($j = 2$)	متوسط
صغير ($i = 1$)	140	100	120
وسط ($i = 2$)	210	180	195
كبير ($i = 3$)	220	200	210
	190	160	175

ب) جدول تحاين

مصدر التغير	SS	df	MS
حجم المدينة (A)	9,300	2	4,650
المنطقة (B)	1,350	1	1,350
الخطأ	100	2	50
المجموع	10,750	5	

وجدول التحاين معطى في الجدول (٢١-٢)ب. وفي اختبار المحلل لتأثيرات حجم المدينة (العامل A) نجد النتائج البديلة:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

H_a: ليست جميع α_i مساوية للصفر

وإحصاءة الاختبار F^* معطاة هنا بالعلاقة (21.3a):

$$F^* = \frac{MSA}{MSAB}$$

وقاعدة القرار هي (تذكّر أن مقام F^* ينطوي على $(a-1)(b-1)$ درجة من الحرية):

إذا كان $F^* \leq F[1-\alpha; a-1, (a-1)(b-1)]$ ، استنتج H_0

إذا كان $F^* > F[1-\alpha; a-1, (a-1)(b-1)]$، استنتج H_a

ومن أجل $\alpha = 0.05$ نحتاج إلى $F(.95; 2,2) = 19.0$. ويقدم الجدول (٢١-٢ب) قيمة

إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{4,650}{5} = 93$$

وبما أن $F^* = 93 > 19.0$، فنأخذ بالفرض البديل H_a ، ونستنتج وجود تأثيرات لحجم المدينة. والقيمة - P لهذا الاختبار هي 0.011.

ويمضي اختبار تأثيرات المنطقة الجغرافية (العامل B) بصورة مماثلة، فالنتائج البديلة هي :

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$

H_a : ليست جميع التأثيرات β_j مساوية للصفر

ومن أجل $\alpha = 0.05$. تكون قاعدة القرار :

إذا كان $F^* \leq F(.95; 1, 2) = 18.5$ ، استنتج H_0

إذا كان $F^* > F(.95; 1, 2) = 18.5$ ، استنتج H_a

والإحصاءة (21.3b) تساوي في مثالنا هنا:

$$F^* = \frac{MSB}{MSAB} = \frac{1,350}{50} = 27$$

وبما أن $F^* = 27 > 18.5$ نستنتج H_a ، أي أن تأثيرات المنطقة الجغرافيــة موجـودة، أمـا القيمة -P لهذا الاختبار فهي 0.035.

ومع هذه النتائج للتأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B، اختبر المحلـل بعـد ذلـك متوسطات مستويات العاملين $\mu_{i.}$ و $\mu_{.j}$ بالطرق التي نوقشت في الفقرة (١٩-٢).

تقدير متوسط المعالجة

عندما توجد مشاهدة واحدة لكل معالجة في دراسة بعاملين ومع استخدام نموذج اللاتفاعل (21.1) ، تحتاج الطريقة المعتادة لتقدير متوسـط معالجـة μ_{ij} بمتوسـط العينـة $\bar{Y}_{ij}$ ، وهو هنا ببساطة المشاهدة الوحيدة Y_{ij}، إلى التعديـل. وسـبب ذلـك هـو أن هـذا المقدِّر لا يستفيد مما يفترضه النموذج من عدم وجـود تفـاعلات. وسنسـتخدم الطـرق المصفوفية العامة الموصوفة في الفقرة ٨ -٦ حيث يمكننا الانتفاع من افتراض اللاتفاعلات.

ولتوضيح الطريقة في مثال قسط التأمين، نبدأ بنموذج التحاين لمتوسطات الخلايا

(18.15) دون قيود على التفاعلات (تذكر أن $n = 1$ هنا) :

$$Y_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

ونعبر عن هذا النموذج بدلالة المصفوفات علـى الشـكل $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ حيث المصفوفات موضحة في (18.19) وفي مثالنا، حيث $n_T = 6$, $ab = 6, n = 1$ ، نعرّف $\mathbf{X}$ و $\boldsymbol{\beta}$ كما يلي:

$$\mathbf{X} = \underset{6\times6}{\mathbf{I}} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{31} \\ \mu_{32} \end{bmatrix} \tag{21.4}$$

ومقدّرات المربعات الدنيا لمتوسط المعالجات μ_{ij} في المتجه $\boldsymbol{\beta}$ هي كالمعتاد المتوسطات $\bar{Y}_{ij}$ ؛ وبما أن $n = 1$، فكل متوسط عينة هو ببساطة المشاهدة Y_{ij} بمفردها، وبالتالي فإن مقدّر المربعات الدنيا لِـ $\boldsymbol{\beta}$ ، وسنرمز له بـ $\mathbf{b}_F$ كي يتفق مع رموز الفصل الثامن، هو متجه المشاهدات $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{b}_F = \mathbf{Y} \tag{21.5}$$

وسنعبر عن قيد اللاتفاعل على الشكل (8.66):

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{h} \tag{21.6}$$

مستخدمين العلاقة (18.7) للتعبير عن متوسط معالجة μ_{ij} بدلالة متوسطات المعالجات الثلاثة الأخرى عند عدم وجود تفاعلات، سنحتاج هنا إلى $(a\text{-}1)(b\text{-}1) = 2(1) = 2$ من مثل تلك العلاقات. وسنستخدم العلاقات:

$$\mu_{11} = \mu_{12} + \mu_{21} - \mu_{22} \quad \text{أو} \quad \mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{21} + \mu_{22} = 0$$

$$\mu_{11} = \mu_{12} + \mu_{31} - \mu_{32} \qquad\quad \mu_{11} - \mu_{12} - \mu_{31} + \mu_{32} = 0$$

وبالتالي، تكون المصفوفتان $\mathbf{C}$ و $\mathbf{h}$ في القيد (21.6)، في مثالنا هنا، كما يلي:

$$\underset{2\times6}{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underset{2\times1}{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ونستخدم الآن (8.68) للحصول على مقدّرات المربعات الدنيا لمتوسطات المعالجات μ_{ij} تحت قيد عدم وجود تفاعلات. ونرمز لهذه المقدّرات المقيّدة بـ $\mathbf{b}_R$ في (8.68). وبما أن $\mathbf{X} = \mathbf{I}$, $\mathbf{h} = 0$ و $\mathbf{b}_F = \mathbf{Y}$ فيمكن تبسيط (8.68) لتصبح:

$$n = 1 \text{ نموذج اللاتفاعل} \qquad \mathbf{b}_R = \mathbf{AY} \qquad (21.7)$$

حيث:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{C}'(\mathbf{CC}')^{-1}\mathbf{C} \qquad (21.7a)$$

وفي مثال قسط التأمين، يؤدي التعويض في (21.7) إلى:

$$\mathbf{b}_R = \begin{bmatrix} 135 \\ 105 \\ 210 \\ 180 \\ 225 \\ 195 \end{bmatrix}$$

وهكذا يكون مقدِّر المربعات الدنيا لقسط التأمين في مدينة صغيرة في الشرق هو، على سبيل المثال $\hat{\mu}_{11} = \$135$.

ومن المهم ملاحظة أن مقدِّرات المربعات الدنيا $\hat{\mu}_{ij}$ في (21.7) تتمخض عن كونها بسيطة في بنيتها، وتعكس قيد اللاتفاعلات:

$$\hat{\mu}_{ij} = \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..} \qquad (21.7b)$$

وهكذا نحصل على التقديرات التالية، مستخدمين معطيات الجدول (٢١-٢)أ:

$$\hat{\mu}_{11} = 120 + 190 - 175 = 135$$
$$\hat{\mu}_{12} = 120 + 160 - 175 = 105$$
$$etc. \qquad etc.$$

ولوضع فترة ثقة لمتوسط المعالجة μ_{ij} نحتاج إلى تباين $\hat{\mu}_{ij}$ المقدَّر. ويمكن الحصول عليه من (6.47)، حيث A معطى في (21.7a) و $\sigma^2\{\mathbf{Y}\}$ مقدَّر بـ $(MSAB)\mathbf{I}$.

تعليقات

١ - يعتمد تحليل دراسات بعاملين، مع $n = 1$ مما أجملناه لتوّنا، على فرضية عدم وجود تفاعل بين العاملين. وإذا استخدم امرؤ هذا التحليل مع أن التفاعلات في الحقيقة موجودة، فالنتيجة هي تدنّي مستوى المعنوية الفعلي لاختبار التأثيرات الرئيسة للعاملين A و B تحت المستوى المحدد، وتكون القوى الفعلية للاختبارات أقل من القوة المتوقعة. وبالتالي فإن فترات الثقة لمقارنات بين متوسطات مستويات العوامل ستنزع

إلى أن تصبح عريضة جدا. وهذا يعني أنه، في حال وجود تفاعلات، سيكون من المرجح أن يفشل التحليل في الإفصاح عن تأثيرات حقيقية متوقعة. وعلى أي حال، عندما يُبنى التحليل على نموذج اللاتفاعل ويشير بالفعل إلى وجود تأثيرات رئيسة للعامل A أو للعامل B، فيمكن أخذها على أنها تأثيرات حقيقية حتى لو كانت التفاعلات موجودة بالفعل.

٢ ـ ونواجه، أحيانا، الحالة $n = 1$ عندما تكون المشاهدات Y_{ij} نِسبا. وعلى سبيل المثال، يمكن أن تتألف البيانات من نسبة المستخدمين في شركة المتغيبين في الأسبوع الماضي، مع تصنيف الشركات وفقا لحجمها ولموقعها الجغرافي. وكما ذكرنا قبلا يمكن استخدام تحويل قوس الجيب لبيانات كهذه بغية جعل التباينات مستقرة. ويمكن عندئذٍ تحليل البيانات المحوَّلة باستخدام نموذج اللاتفاعل (21.1). شريطةَ أن تكون كل نسبة قائمة، بصورة تقريبية، على العدد نفسه من المشاهدات. وإذا اختلف عدد المشاهدات اختلافا كبيرا من نسبة إلى أخرى، فينبغي استخدام طريقة المربعات الدنيا المرجّحة.

(٢١ـ٢) اختبار توكي من أجل التجميعية

ونصف الآن اختبارا ابتكره توكي ويمكن استخدامه لاختبار ما إذا كان عاملان، في دراسة ذات عاملين، يتفاعلان أم لا، وذلك في حالة $n = 1$. وهذا الاختبار مفيد، أيضا، لتشكيلة من تصاميم التجارب مما سنناقشه في فصول لاحقة.

تطوير إحصاءة الاختبار

اعتبرنا، كما ذكرنا في الفقرة (٢١ـ١)، نموذج اللاتفاعل (21.1) عندما $n = 1$، كي يسمح لنا بالحصول على تقدير لتباين الخطأ في هذه الحالة. وكان مِن الممكن على أي حال فرض قيود أقل صرامة على $(\alpha\beta)_{ij}$ ، وجعل نموذج تحليل التباين متضمنا لتأثيرات تفاعل مقيّدة. هَبْ أننا نفترض أن:

$$(\alpha\beta)_{ij} = D\alpha_i\beta_j \tag{21.8}$$

حيث D ثابت ما. وأحد الحوافز لهذا القيد هو أنه إذا كان $(\alpha\beta)_{ij}$ أي دالة كثيرة

حدود من الدرجة الثانية في α_i و β_j فلا بد أن تكون عندئذٍ من الشكل (21.8)، وذلك بسبب القيود في (18.23) على α_i ، β_j و $(\alpha\beta)_{ij}$ التي تقضي أن يكون المجموع في أي منها وفوق أي دليل بعينه مساويا للصفر.

وباستخدام (21.8) في نموذج تحاين عادي بعاملين مع تفاعلات، وفي حالة $n = 1$، نجد :

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + D\alpha_i\beta_j + \varepsilon_{ij} \tag{21.9}$$

حيث لكل من الحدود معناه المعتاد. ولنتذكر أنه لا يوجد دليل ثالث هنا لأن $n = 1$، ونحتاج الآن إلى الحصول على مجموع مربعات التفاعل $\sum\sum D^2\alpha_i^2\beta_j^2$ ومفترضين أن المعالم الأخرى معروفة، يتبين أن مقدّر المربعات الدنيا لِـ D هو:

$$\hat{D} = \frac{\sum_i\sum_j \alpha_i\beta_j Y_{ij}}{\sum_i \alpha_i^2 \sum_j \beta_j^2} \tag{21.10}$$

ومقدّر α_i المعتاد هو $\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}$ ومقدّر β_j المعتاد هو $\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}$ وبتبديل المقدّرات هذه بالمعالم الموافقة لها في $\hat{D}$ نجد :

$$\hat{D} = \frac{\sum_i\sum_j (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})Y_{ij}}{\sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2} \tag{21.10a}$$

وسنرمز لنظير مجموع مربعات التفاعل $\sum\sum D^2\alpha_i^2\beta_j^2$ محسوبا من العينة بالرمز $SSAB^*$ كي نتذكر أن مجموع مربعات التفاعل هذا هو من أجل الشكل الخاص للتفاعل في النموذج (21.9). وبتعويض تقديرات العينة في $\sum\sum D^2\alpha_i^2\beta_j^2$ ، نجد مجموعة مربعات التفاعل على الشكل:

$$SSAB^* = \sum_i\sum_j \hat{D}^2 (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2$$

$$= \frac{\left[\sum_i\sum_j (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})Y_{ij}\right]^2}{\sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2} \tag{21.11}$$

ويمكن تبسيط هذه العبارة بفكها وصولا إلى شكل أيسر للحسابات.

ومفكوك تحليل التباين لنموذج التفاعل الخاص (21.9) هو إذن:

$$SSTO = SSA + SSB + SSAB^* + SSRem^* \qquad (21.12)$$

حيث SSR^*_{em} هو مجموع مربعات الباقي:

$$SSRem^* = SSTO - SSA - SSB - SSAB^* \qquad (21.12a)$$

ويمكن تبيان أنه إذا كان $D = 0$ ، أي إذا لم يكن التفاعل من النوع $D\alpha_i\beta_j$ موجودا، فإن $SSAB^*$ و SSR^*_{em} يتوزعان مستقلين وفقا للتوزيع كاي - مربع بدرجة واحدة وبـ $ab-a-b$ درجة من الحرية، على الترتيب. وبالتالي، إذا كان $D = 0$ ، فإن الاختبار :

$$F^* = \frac{SSAB^*}{1} \div \frac{SSRem^*}{ab-a-b} \qquad (21.13)$$

يتبع التوزيع $F(1, ab - a - b)$.

وهكذا فإنه لاختبار:

$$H_0 : D = 0 \text{ (لا يوجد تفاعلات)} \qquad (21.14a)$$
$$H_a : D \neq 0 \text{ (تفاعلات من الشكل } D\alpha_i\beta_j \text{ موجودة)}$$

نستخدم إحصاءة الاختبار F^* المعرفة في (21.13). والقيم الكبيرة لـ F^* تقود إلى النتيجة H_a . وقاعدة القرار المناسبة لإبقاء مخاطرة الخطأ من النوع الأول عند المستوى α هي:

$$\text{إذا كان : } F^* \leq F(1 - \alpha; 1, ab - a - b) \text{ استنتج } H_0 \qquad (21.14b)$$
$$\text{إذا كان : } F^* > F(1 - \alpha; 1, ab - a - b) \text{ استنتج } H_a$$

وقد دُرست قوة هذا الاختبار، ويبدو أنه إذا كانت التفاعلات، على وجه التقريب، من النوع المفترض في (21.8) وموجودة، وكانت التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B، كبيرة، فإن الاختبار يكون فعالا في كشف وجود التفاعلات. ويُدعى هذا الاختبار عادةً اختبار توكي بدرجة واحدة من الحرية. ويمكن استخدام هذا الاختبار ،أيضا، لاختبار وجود تفاعلات عامة.

مثال

سنطبق اختبار توكي في مثال قسط التأمين. والبيانات مقدمة في الجدول (٢١ــ ٢)أ.

ونحصل أولا على عناصر $SSAB^*$:

$$\sum\sum(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..})Y_{ij}=(120-175)(190-175)(140)+\ldots$$
$$+(210-175)(160-175)(200)=-13{,}500$$
$$\sum(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{..})^2=\frac{SSA}{2}=\frac{9{,}300}{2}=4{,}650$$
$$\sum(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y}_{..})^2=\frac{SSB}{3}=\frac{1{,}350}{3}=450$$

وبالتالي يكون مجموع مربعات التفاعل:

$$SSAB^*=\frac{(-13{,}500)^2}{4{,}650(450)}=87.1$$

وقد وجدنا سابقا في الجدول (٢١-٢ب) أن $SSTO = 10{,}750$ ، $SSA = 9{,}300$ ، و $SSB = 1{,}350$؛ وبالتالي لدينا من (21.12a):

$$SSRem^* = 10{,}750 - 9{,}300 - 1{,}350 - 87.1 = 12.9$$

وأخيرا نحصل من (21.13) على إحصاءة الاختبار:

$$F^*=\frac{87.1}{1}\div\frac{12.9}{3(2)-3-2}=6.8$$

وبافتراض أن مستوى المعنوية $\alpha = 0.10$، نحتاج إلى القيمة الجدولية $F(.90;1,1)=39.9$. وبما أن $F^* = 6.8 \leq 39.9$ نستنتج أن المنطقة وحجم المدينة لا يتفاعلان. والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0.23.

واستخدام نموذج اللاتفاعل للبيانات في الجدول (٢١-١)أ يبدو إذن استخداما له ما يبرره.

إجراءات علاجية إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة

إذا أشار اختبار توكي إلى وجود تأثيرات تفاعل في تطبيق لتحليل التباين $n = 1$، فينبغي بذل جهود لإزالة التفاعلات بحيث يمكن الاستفادة من التحليل الموصوف في الفقرة (٢١-١). وكما وصفنا في الفصل الثامن عشر يمكن، في الغالب، استخدام التحويلات لإزالة تأثيرات التفاعل أو لجعلها غير ذات أهمية.

ويمكن تجربة تحويلات بسيطة مثل تحويل الجذر التربيعي أو التحويل اللوغاريتيمي، أو يمكن بصورة بديلة البحث ضمن عائلة تحويلات القوة لـ Y الموصوفة

في الفصل الرابع في سياق تحويلات بوكس ـ كوكس. والطريقة تتلخص في القيام بتحويلات لِـ Y وفقا لـ (4.29) وذلك من أجل قيم مختارة لـِ λ . ولكل من قيم λ هذه، نحصل على إحصاءة اختبار توكي (21.13). وإذا أدت قيمة من قيم λ إلى إحصاءة اختبار F^* غير معنوية، فسنكون قد عثرنا عندئذٍ على تحويل يزيل تأثير التفاعل. وكثيرا ما نعثر على مدى من قيم λ التي تقود إلى إحصاءات اختبار غير معنوية، وفي مثل هذه الحالة يمكن اختيار قيمة بسيطة لِـ λ من ذلك المدى مثل $\lambda = 0.5$.

وإذا لم نستطع العثور على تحويل يجعل التفاعل غير ذي بال، فيمكن استخدام طريقة تحليل تقريبية؛ انظر، مثلا، المرجع (٢١-١).

ملاحظة

إذا كان أحد العاملين أو كلاهما كميا، فيمكن، أيضا، الحصول على اختبار لتأثيرات التفاعل بواسطة طرق الانحدار. وقد نوقشت سابقا اختبارات الانحدار هذه، الخاصة بتاثيرات التفاعل.

(٢١-٣) اختبارات التحاين عندما لا يكون لمتوسطات المعالجات الأهمية نفسها

أسلوب اختبار خطي عام

ذكرنا في فصول سابقة أن أساليب التقدير الأساسية تبقى هي ذاتها قابلة للتطبيق سواء أكانت متوسطات المعالجات متساوية الأهمية أم لا، إلا أن صيغ الاختبار في التحاين المعتاد لا تكون مناسبة عندما لا تكون متوسطات المعالجات متساوية الأهمية. وبدلا عن ذلك، يجب، في العادة، إجراء اختبارات التحاين باستخدام أسلوب الاختبار الخطي العام المعطى في الفقرة (٨ ـ ٦) بدلالة المصفوفات، عندما تكون متوسطات المعالجة غير متساوية الأهمية.

وسنعتبر الآن كيفية استخدام أسلوب الاختبار الخطي العام عندما لا يكون لمتوسطات المعالجات الأهمية نفسها. وعلى أي حال، نحتاج أولا إلى التأكيد على أن اختبار تأثيرات التفاعل لا يتأثر بعدم تساوي أهمية متوسطات المعالجات باعتبار أن الاختبار يتعلق بتوازي منحنيات متوسطات المعالجات أو غياب هذا التوازي. وقد أوضحنا

ذلك في الأشكال (١٨-١)، و(١٨-٢)، و(١٨-٣). وتُبنى منحنيات متوسطات المعالجات هذه على متوسطات المعالجات μ_{ij} بمفردها، وبالتالي فهي لا تنطوي على متوسطات لمتوسطات المعالجات. وهكذا نقوم باختبار التفاعلات كما هو موضح في الفقرة (١٨-٦) عندما تكون حجوم العينات متساوية، وكما هو موضح في الفقرة (٢٠-٢)عندما تكون حجوم العينات غير متساوية، وذلك سواء أكان لمتوسطات المعالجات الأهمية نفسها أم لا.

وعندما لا يكون لمتوسطات المعالجات الأهمية نفسها يمكن إجراء اختبارات التأثيرات الرئيسة للعوامل بكل سهولة عن طريق العمل بنموذج متوسطات الخلايا (18.15). وبما أن ذلك لا ينطوي على أية مبادئ جديدة، فسنوضح اختبارات التأثيرات الرئيسة باللجوء إلى مثال.

مثال. في مثال هرمون النمو في الفصل العشرين جدول (٢٠-١)، من المعروف أن عدد الأطفال الذكور الذين يخضعون لمعالجة هرمون النمو يبلغ ضعف عدد الأطفال الإناث، وتبقى هذه النسبة نفسها في حالة أطفال يعانون انحطاطا حادا أو معتدلا أو طفيفا في تطور العظام. ونرغب في استقراءات تتعلق بالمجتمع الهدف من الأطفال الخاضعين للتداوي. وعلى وجه التحديد نريد اختبار ما إذا كانت حالة تطور العظام تؤثر أو لا تؤثر في تغير معدل النمو. والبدائل إذن هي :

$$H_0: \frac{2\mu_{11}+\mu_{21}}{3} = \frac{2\mu_{12}+\mu_{22}}{3} = \frac{2\mu_{13}+\mu_{23}}{3} \qquad (21.15)$$

H_a: ليست كل المتساويات صحيحة

وسنعيد عرض البديل H_0 بالطريقة المكافئة التالية:

$$H_0: \begin{matrix} \frac{2\mu_{11}+\mu_{21}}{3} - \frac{2\mu_{12}+\mu_{22}}{3} = 0 \\ \frac{2\mu_{11}+\mu_{21}}{3} - \frac{2\mu_{13}+\mu_{23}}{3} = 0 \end{matrix} \qquad (21.15a)$$

وبما أن H_0 معبر عنها بدلالة μ_{ij}، فسنستخدم نموذج متوسطات الخلايا بعاملين (18.15):

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad (21.16)$$

ولعرض هذا النموذج الخطي بدلالة للصفوفات على الشكل $\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$، نعرف المصفوفة $\mathbf{X}$ كما هو موضح في (18.19). ويتضمن الجدول (٢١-٣) المصفوفة $\mathbf{X}$ والمتجه $\boldsymbol{\beta}$ لبيانات مثل هرمون النمو في الجدول (٢٠-١) وكان المتجه Y قد أُعطي سابقا في الجدول (٢٠-٢)، ومتجه المتوسط $\mathbf{X\beta}$ مبيّن، أيضا، في الجدول (٢١-٣). ونرى أن $E\{Y_{ijk}\} = \mu_{ij}$، كما يقتضي نموذج التحاين (21.16).

ويمكن عرض الفرضية H_0 في (21.15a) الآن كما يلي مستخدمين الشكل المصفوفي (8.66):

$$\mathbf{H}_0 : \underset{s\times p}{\mathbf{C}}\, \underset{p\times 1}{\boldsymbol{\beta}} = \underset{s\times 1}{\mathbf{h}} \tag{21.17}$$

حيث

$$\underset{2\times 6}{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

جدول (٢١-٣) المصفوفات $\boldsymbol{\beta}, \mathbf{X}$ و $\mathbf{X\beta}$ لنموذج التحاين (21.16)، مثال هرمون النمو

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X\beta} = \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{11} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{22} \\ \mu_{22} \\ \mu_{23} \\ \mu_{23} \\ \mu_{23} \end{bmatrix}$$

$$\underset{6\times1}{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix}\mu_{11}\\ \mu_{12}\\ \mu_{13}\\ \mu_{21}\\ \mu_{22}\\ \mu_{23}\end{bmatrix} \qquad \underset{2\times1}{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

لاحظ أن هذه الصياغة تُنتج (21.15a):

$$\underset{2\times1}{\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix}\left(\frac{2}{3}\right)\mu_{11}-\left(\frac{2}{3}\right)\mu_{12}+\left(\frac{1}{3}\right)\mu_{21}-\left(\frac{1}{3}\right)\mu_{22}\\ \left(\frac{2}{3}\right)\mu_{11}-\left(\frac{2}{3}\right)\mu_{13}+\left(\frac{1}{3}\right)\mu_{21}-\left(\frac{1}{3}\right)\mu_{23}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \mathbf{h}$$

ولحساب $SSE(R) - SSE(F)$، نستخدم (8.70):

$$(\mathbf{Cb}_F - \mathbf{h})'(\mathbf{C}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{Cb}_F - \mathbf{h}) \tag{21.18}$$

ونحتاج أولا للحصول على تقديرات متجه المعالم $\mathbf{b}_F$. وبما أننا نعلم مـن (18.29) أن تقديرات متوسطات المعالجات $\overline{Y}_{ij.}$ هي تقديرات المربعات الدنيا، فلدينا:

$$\mathbf{b}_F = \begin{bmatrix}\overline{Y}_{11.}\\ \overline{Y}_{12.}\\ \overline{Y}_{13.}\\ \overline{Y}_{21.}\\ \overline{Y}_{22.}\\ \overline{Y}_{23.}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.0\\ 1.9\\ .9\\ 2.4\\ 2.1\\ .9\end{bmatrix}$$

ويمكننا الآن التعويض في (21.18) للحصول على $SSE(R) - SSE(F)$. ولا نقـدم الحسابات المصفوفية باعتبارها مجرد روتين. ونجد:

$$SSE(R) - SSE(F) = 3.454$$

لقد حصلنا في الجدول (٢٠ـ٣) سـابقا على مجمـوع مربعـات الخطأ للنمـوذج التام؛ وهو $SSE(F) = 1.3000$. ودرجات الحرية الموافقة لـ SSE للنموذج التام عددها $df_F = 8$، كمـا هـو مبـين في الجـدول (٢٠ـ٣)أ. وعـدد درجـات الحريـة الموافـق لــ $SSE(R)$-$SSE(F)$ هو $df_R - df_F = s = 2$ وبالتالي، تكون إحصاءة الاختبار الخطي العـام (8.71):

$$F^* = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{s} \div \frac{SSE(F)}{n-p}$$

$$= \frac{3.454}{2} \div \frac{1.3000}{8} = 10.63$$

وإذا كانت H_0 صحيحة، فإن F^* تتبع التوزيع F بدرجتين وثماني درجات من الحرية وضبط مستوى المعنوية عند $\alpha = .05$ يتطلب $F(.95;28) = 4.64$. وبما أن $F^*=10.63 > 4.64$ فنستنتج H_a، أي أن متوسطات مستوى العامل المرجحة للمجموعات المختلفة لتطور العظام غير متساوية. والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0.006.

ملاحظة

كان يمكن إجراء اختبار البدائل (21.15a) ، أيضا، بتقدير المقارنتين:

$$L_1 = \frac{2\mu_{11} + \mu_{21}}{3} - \frac{2\mu_{12} + \mu_{22}}{3} \qquad L_2 = \frac{2\mu_{11} + \mu_{21}}{3} - \frac{2\mu_{13} + \mu_{23}}{3}$$

باتباع طريقة المقارنات المتعددة (طريقة بونفيرون) وملاحظة ما إذا كانت فترتا الثقة الناتجتان تتضمنان الصفر أم لا.

ترجيحات متناسبة مع حجوم العينات

هناك تبسيطات في تحديد المقدار $SSE(R) - SSE(F)$ في إحصاءة الاختبار الخطي العام لاختبار التأثيرات الرئيسة للعاملين A ,B، عندما تكون ترجيحات متوسطات المعالجات μ_{ij} متناسبة مع حجوم عينات المعالجات n_{ij} . وستكون مثل هذه الترجيحات مناسبة في بعض الظروف.

لنعتبر دراسة مخازن البيع بالتجزئة (القطّاعي) حيث يُراد دراسة تأثيرات حجم المخزن (العامل A) وموقع الخزن ضمن المدينة (العامل B) على الخسائر الناجمة عن سرقة البضائع المعروضة. وستتم استقراءات حول جميع مخازن البيع بالتجزئة في المجتمع المدروس. اختيرت عينة عشوائية من n_T من مخازن البيع بالتجزئة من مجتمع المخازن كافة، ثم صُنفت المخازن التي وقع عليها الاختيار وفقا لحجمها وموقعها. وسنرمز لحجوم عينات الخلايا الناتجة بـ n_{ij}. وإذا كانت نسب المخازن في فئات "الحجم – الموقع" المختلفة في المجتمع نسبا معروفة، فيمكن استخدام هذه النسب كترجيحات

مناسبة للقيام باستقراءات حول التأثيرات الرئيسة للحجم والموقع، ويمكن استخدام طرق الاختبار الخطي العام الذي ناقشناه لتوّنا. وعلى أي حال، عندما لا تكون هذه النسب معلومة، فيمكن استخدام حجوم عينات الخلايا n_{ij} لتقدير هذه النسب وبالتالي يمكن أن تخدم كترجيحات معقولة.

ولتوضيح هذا، لنفترض أننا استخدمنا في دراسة مخازن البيع بالتجزئة فئتي حجم $a = 2$، وثلاث فئات موقع $b = 3$ وأن العينة العشوائية تتضمن $n_T = 60$ مخزنا أنتجت بعد تصنيفها حجوم عينات الخلايا n_{ij} التالية:

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	المجموع
$i = 1$	20	5	4	29
$i = 2$	10	15	6	31
المجموع	30	20	10	60

وهكذا يكون $n_{11} = 20$ ، $n_{21} = 10$ ، وهلمجرا. وبالإضافة إلى ذلك، لنرمز بـ $n_{i.}$ و $n_{.j}$ لحجوم العينات الكلية لمستويات العامل A والعامل B، كما عرفناها في (20.1a) و(20.1b) على الترتيب، فلدينا هنا $n_{1.} = 29$, $n_{.1} = 30$ ، وهكذا.

وسينطوي اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A عندما تعكس حجوم العينات n_{ij} الأهمية النسبية لمتوسطات المعالجات، على مقارنة المتوسط المرجح للمستوى $i = 1$ للعامل A:

$$\frac{20\mu_{11} + 5\mu_{12} + 4\mu_{13}}{29}$$

والمتوسط المرجح للمستوى $i = 2$ للعامل A:

$$\frac{10\mu_{21} + 15\mu_{22} + 6\mu_{23}}{31}$$

ومعبرا عنها بصورة رمزية، ستكون البدائل:

$$H_0: \left(\frac{n_{11}}{n_{1.}}\right)\mu_{11} + \left(\frac{n_{12}}{n_{1.}}\right)\mu_{12} + \left(\frac{n_{13}}{n_{1.}}\right)\mu_{13} = \left(\frac{n_{21}}{n_{2.}}\right)\mu_{21} + \left(\frac{n_{22}}{n_{2.}}\right)\mu_{22} + \left(\frac{n_{23}}{n_{2.}}\right)\mu_{23}$$

H_a: المساواة غير صحيحة

وبصورة مماثلة، فإن البدائل لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B ستكون كما يلي

في مثال هرمون النمو حيث تعكس حجوم العينات أهمية متوسطات المعالجات:

$$H_0:\left(\frac{n_{11}}{n_{.1}}\right)\mu_{11}+\left(\frac{n_{21}}{n_{.1}}\right)\mu_{21}=\left(\frac{n_{12}}{n_{.2}}\right)\mu_{12}+\left(\frac{n_{22}}{n_{.2}}\right)\mu_{22}=\left(\frac{n_{13}}{n_{.3}}\right)\mu_{13}+\left(\frac{n_{23}}{n_{.3}}\right)\mu_{23}$$

H_a: ليست كل المتساويات صحيحة

وبصورة عامة، ستكون البدائل لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A عندما تكون ترجيحات متوسطات المعالجات متناسبة مع حجوم العينات، كما يلي:

$$H_0:\sum_j\left(\frac{n_{1j}}{n_{1.}}\right)\mu_{1j}=\ldots=\sum_j\left(\frac{n_{aj}}{n_{a.}}\right)\mu_{aj} \qquad (21.19)$$

H_a: ليست كل المتساويات صحيحة

والبدائل لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B هي:

$$H_0:\sum_j\left(\frac{n_{i1}}{n_{.1}}\right)\mu_{i1}=\ldots=\sum_j\left(\frac{n_{ib}}{n_{.b}}\right)\mu_{ib} \qquad (21.20)$$

H_a: ليست كل المتساويات صحيحة

ويمكن البرهان على أنه يمكن تبسيط الحد $SSE(R)$ - $SSE(F)$ لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A، والذي ينطوي على البدائل (21.19)، إلى مجموع مربعات المعالجات العادي لعامل بمفرده كما ورد في (14.25)، حيث المعالجات هي مستويات العامل A:

$$SSA=\sum_i n_{i.}(\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{...})^2 \qquad (21.21)$$

وحيث:

$$\bar{Y}_{i..}=\frac{Y_{i..}}{n_{i.}} \qquad (21.21a)$$

$$\bar{Y}_{...}=\frac{Y_{...}}{n_T} \qquad (21.21b)$$

و

$$Y_{i..}=\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}}Y_{ijk} \qquad (21.21c)$$

$$Y_{...}=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}}Y_{ijk} \qquad (21.21d)$$

وبصورة مماثلة، يمكن تبسيط الحد $SSE(F) - SSE(R)$ لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B، والذي ينطوي على البدائل (21.20)، إلى مجموع مربعات المعالجات لعامل بمفرده في (14.25) حيث نعتبر مستويات العامل B كمعالجات:

$$SSB = \sum_j n_{.j} (\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...})^2 \tag{21.22}$$

وحيث:

$$\overline{Y}_{.j.} = \frac{Y_{.j.}}{n_{.j}} \tag{21.22a}$$

و:

$$Y_{.j.} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{=1}^{n_{ij}} Y_{ijk} \tag{21.22b}$$

مثال. في مثال هرمون النمو في الجدول (٢٠-١)، لنفرض أن حجوم عينات المعالجات n_{ij} تعكس الأهمية النسبية لمتوسطات المعالجات. فقد رأينا في الفصل العشرين أن الجنس (العامل A) وتطور العظام (العامل B) لا يتفاعلان. ونرغب الآن في اختبار ما إذا كان الجنس يؤثر في متوسط تغير معدل النمو. والبدائل (21.19) هي هنا:

$$H_0: \left(\frac{3}{7}\right)\mu_{11} + \left(\frac{2}{7}\right)\mu_{12} + \left(\frac{2}{7}\right)\mu_{13} = \left(\frac{1}{7}\right)\mu_{21} + \left(\frac{3}{7}\right)\mu_{22} + \left(\frac{3}{7}\right)\mu_{23}$$

H_a: المساواة غير صحيحة

ولحساب SSA في (21.21) نحتاج من الجدول (٢٠-١) لما يلي:

$Y_{1..} = 11.6$	$n_{1.} = 7$	$\overline{Y}_{1..} = 1.65714$
$Y_{2..} = 11.4$	$n_{2.} = 7$	$\overline{Y}_{2..} = 1.62857$
$Y_{..} = 23.0$	$n_T = 14$	$\overline{Y}_{...} = 1.64286$

وهكذا نجد:

$$SSA = 7(1.65714 - 1.64286)^2 + 7(1.62857 - 1.64286)^2 = .002857$$

وهناك درجة واحدة من الحرية $a - 1 = 2 - 1 = 1$ ، موافقة لـ SSA.

وقد وجدنا سابقا في الجدول (٢٠-٣)أ أن مجموع مربعات الخطأ للنموذج التام $SSE(F) = 1.3000$ ويرتبط به ثماني درجات من الحرية. وبالتالي تكون إحصاءة

الاختبار الخطي العام:

$$F^* = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{df_R - df_F} \div \frac{SSE(F)}{df_F} = \frac{SSA}{1} \div MSE(F)$$

$$= \frac{.002857}{1} \div \frac{1.3000}{8} = .018$$

ومن أجل $\alpha = .05$، نحتاج إلى $F(.95; 1,8) = 5.32$. وبما أن $F^* = 0.18 \leq 5.32$، فنستنتج H_0 ، أي أن متوسط تغير معدل النمو هو نفسه للأطفال الذكور والإناث. والقيمة -P للاختبار 0.897 .

وبصورة مماثلة يمكن اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B.

تعليقات

١ ـ اعتُبرت حجوم عينات الخلايا في البدائل (21.19) و(21.20) كمقادير ثابتة، وليست متغيرات عشوائية. وهكذا، فإن صلاحية البدائل تعتمد على منطقية اعتبار الحجوم الفعلية لعينات الخلايا كمؤشرات لأهمية متوسطات المعالجات.

٢ ـ ويمكن الحصول، أيضا، على مجموع المربعات SSA في بسط (21.21)، وSSB في بسط (21.22)، باستخدام أسلوب الانحدار الذي شرحناه في الفصل العشرين في حالة متوسطات معالجة متساوية الأهمية، ووضع المتغيرات المناسبة لتأثير العامل كمتغيرات ابتدائية بغية الحصول على مجموع مربعات إضافي.

وعلى سبيل المثال، يمكن توفيق نموذج الانحدار (20.4) في مثال هرمون النمو بحيث نحصل على $SSR(X_1)$ ، وسنجد عندئذٍ:

$$SSA = SSR(X_1)$$

وبصورة مماثلة يمكن الحصول على SSB من خلال:

$$SSB = SSR(X_2) + SSR(X_3 \mid X_2)$$

٣ ـ في الحزم الإحصائية SAS و$SPSS^x$، يمكن الحصول على مجموع المربعات في (21.21) و(21.22) باستخدام مجموع مربعات *PROC GLM-Type I* و *ANOVA Option10*، على الترتيب. ولا يقدم البرنامج *BMDP2V* هذه النتائج بصورة مباشرة.

حجوم عينات متناسبة. تقع حالة خاصة من الترجيحات المتناسبة مع حجوم العينات

عندما تتبع حجوم العينات نفسها نمطا تناسبيا. فلنفرض أن سلسلة من مؤسسات الحمية الغذائية تقوم بتجارب على نظامي حمية متساويتي الأهمية. وتقدم المؤسسات الطعام لعدد من النساء يبلغ ثلاثة أمثال العدد من الرجال الذين تزودهم بالطعام. اختير ثلاثمائة امرأة ومائة رجل، وخُصِّص نصف العدد من كل فئة عشوائيا لكل من نظامي الحمية. وبالتالي، فإن حجوم عينات المعالجات تصبح كما يلي :

الحمية	رجال	نساء	المجموع
1	50	150	200
2	50	150	200
المجموع	100	300	400

ونلاحظ أن حجوم عينات المعالجات تتبع العلاقة:

$$n_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n_T} \qquad (21.23)$$

ويتضمن الشرط (21.23) أن حجوم العينات في أي صفين (أو عمودين) متناسبة، وتدعى حالة كهذه حالة التواترات المتناسبة.

وفي هذه الحالة الخاصة لأوزان متناسبة مع حجوم العينات (أي عندما تكون حجوم العينات متناسبة، أيضا، فيما بينها) لا يُعطى SSA و SSB فقط بالصيغتين البسيطتين (21.21) و (21.22) ، على الترتيب، ولكن مجموع مربعات التفاعل، أيضا، يُعطى بالصيغة البسيطة :

$$SSAB = \sum_i \sum_j n_{ij} (\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...})^2 \qquad (21.24)$$

وفضلا عن ذلك، تكون مجاميع المربعات في هذه الحالة الخاصة متعامدة بحيث أن $SSE, SSAB, SSB, SSA$ تجمع تماما إلى $SSTO$.

تعليقات

١ ـ تنطبق الصيغة (21.24) حيثما كانت حجوم العينات متناسبة، وسواء أكانت متوسطات المعالجات متساوية الأهمية أم لا، فكما نعلم سابقا لا يعتمد مجموع مربعات التفاعلات على ترجيحات متوسطات المعالجات.

٢ ـ عند استخدام حجوم عينات متناسبة ولكن حجوم العينات لا تعكس الأهمية النسبية لمتوسطات المعالجات (مثلا، عندما لا تكون حجوم العينات متساوية ولكن لمتوسطات المعالجات الأهمية نفسها)، فلا بد من استخدام أسلوب الانحدار أو أسلوب الاختبار الخطي العام اللذين شرحناهما سابقا.

(٤ـ٢١) نماذج II (مستويات عامل عشوائية) و III (مستويات عامل مختلطة) لدراسات تتضمن عاملين

نموذج تحاين عشوائي

لنعتبردراسة تتضمن تأثيرات شغّيلة آلة (عامل A) وتأثيرات الآلات (عامل B) على عدد القطع المنتجة في يوم. استُخدم في الدراسة خمسة شغّيلة وثلاث آلات. إلا أن الاستقراءات سوف لا تقتصر على الشغّيلة الخمسة والآلات الثلاث بالذات التي تضمنتها الدراسة، ولكنها زيادة على ذلك ستتناول جميع المشتغلين على الآلات وجميع الآلات المتوفرة في الشركة. وسيكون نموذج التحاين العشوائي (نموذج II) مناسبا لدراسة ذات عاملين. إذ يمكن اعتبار كل من مجموعتي مستويات العاملين عينة من مجتمع (جميع الشغيلة، جميع الآلات) سنخرج باستقراءات حوله.

وفي نموذج تحاين عشوائي لدراسة ذات عاملين، نفترض، بصورة مشابهة لما افترضناه في نموذج تحاين عشوائي لدراسة تتضمن عاملا واحدا، أن كلا من التأثيرات الرئيسة α_i للعامل A والتأثيرات الرئيسة β_j للعامل B هي متغيرات عشوائية مستقلة، وفضلا عن ذلك، نفترض أن تأثيرات التفاعل $(\alpha\beta)_{ij}$ متغيرات عشوائية مستقلة. وهكذا يكون نموذج التحاين العشوائي لدراسة ذات عاملين مع حجوم عينات متساوية n على الشكل:

$$Y_{ijk} = \mu_{.} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad (21.25)$$

حيث:

$\mu_{.}$ ثابت

α_i، β_j، $(\alpha\beta)_{ij}$ متغيرات عشوائية طبيعية مستقلة توقعاتها أصفار وتبايناتها، على الترتيب، σ^2_α، σ^2_β، $\sigma^2_{\alpha\beta}$.

ε_{ijk} مستقلة وتتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(0, \sigma^2)$.

α_i، β_j، $(\alpha\beta)_{ij}$، ε_{ijk} مستقلة فيما بينها مثنى مثنى.

$i = 1,..., a$ ؛ $j = 1,..., b$ ؛ $k = 1,..., n$

والقيمة المتوقعة للمشاهدة Y_{ijk} في نموذج التحاين هذا هي:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu. \qquad (21.25a)$$

وتباين Y_{ijk} ونرمز له بـ σ_Y^2 هو:

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma_Y^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_{\alpha\beta}^2 + \sigma^2 \qquad (21.25b)$$

وهكذا يكون للمشاهدات Y_{ijk} تباين ثابت. وهي تتوزع طبيعيا لأنها تراكيب خطية في متغيرات عشوائية طبيعية مستقلة. وفضلا عن ذلك، وقبل إجراء التجارب العشوائية، تكون المشاهدات المختلفة مستقلة باستثناء تلك المشاهدات من المستوى نفسه للعامل A و/أو من المستوى نفسه للعامل B، حيث تكون مرتبطة بسبب احتوائها لبعض الحدود العشوائية المشتركة.

معنى النموذج، سنشرح معنى الحدود في نموذج التحاين (21.25) من خلال مثال الإنتاج المتضمن لعاملين هما شغيلة آلة وآلات، والتأثير الرئيس للشغّيل i في الدراسة (وقد اختير عشوائيا من مجتمع شغيلة الآلات) هو α_i. وبصورة مماثلة فإن التأثير الرئيس للآلة j (وقد اختيرت عشوائيا من مجتمع الآلات) هو β_j. وفضلا عن ذلك، فإن التفاعل بين الشغّيل i والآلة j هو $(\alpha\beta)_{ij}$. ويفترض نموذج التحاين (21.25) أن هذه التأثرات الرئيسة للشغيلة على الإنتاج اليومي تتوزع طبيعيا بمتوسط يساوي الصفر وتباين σ_α^2. وبصورة مماثلة، فإن التأثيرات الرئيسة للآلات تتوزع طبيعيا بمتوسط يساوي الصفر وتباين σ_β^2. وأخيرا فإن تفاعلات الشغيل ـ آلة تتوزع طبيعيا بمتوسط يساوي الصفر وتباين $\sigma_{\alpha\beta}^2$. وبما أن نموذج التحاين (21.25) يفترض أن هذه التاثيرات الثلاثة متغيرات عشوائية مستقلة فإن متوسط الإنتاج لمركب الشغيل i ـ الآلة j ونقصد $\mu_{ij} = \mu. + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$، يمكن أن يُنظر إليه في نموذج التحاين العشوائي كمجموع اختيارات مستقلة لـ α_i، β_j و $(\alpha\beta)_{ij}$ من ثلاثة توزيعات طبيعية مختلفة.

ملاحظة

نحذّر بأنه لا ينبغي استخدام نموذج التحـاين العشـوائي إلا إذا كـانت مسـتويات كل عامل من العوامل المختلفة تمثل حقا عينة عشوائية من مجتمعات تهتم بها الدراسة.

نموذج تحاين مختلط

عندما ينطوي أحد العاملين على مستويات عامل مثبتة بينما ينطوي الآخـر علـى مستويات عامل عشوائية، يكون نموذج التحاين المختلط (النمـوذج III) هـو النمـوذج المناسب. وكمثال يمكن أن يكون هذا النموذج مناسبا فيه نسوق دراسة لتأثيرات أربع مواد تدريب مختلفة (عامل A) وخمسة معلمين (عامل B) على التعلّم في برنامج تدريبي في شركة. ويمكن اعتبار المستويات الأربعة للمواد التدريبية مثبتة، باعتبـار أن الاهتمـام يتمركز على مواد التدريب المستخدمة بالذات. وعلى الوجـه الآخـر، يمكـن النظـر إلى مستويات المعلمين على أنها عشوائية باعتبـار أن الاسـتقراءات ستجري حـول مجتمـع المعلمين الذي يشكل المعلمون الخمسة المستخدمون في الدراسة عينة منه.

وعندما تكـون مسـتويات العـامل A مثبتـة ومسـتويات العـامل B عشـوائية فـإن التأثيرات α_i تكون ثوابت، وتكون التأثيرات β_j متغيرات عشـوائية. وتأثـيرات التفـاعل $(\alpha\beta)_{ij}$ هـي، أيضـا، متغيرات عشـوائية لأن مسـتويات العـامل B عشـوائية. ونمـوذج التحاين المختلط والبسيط نسبيا لمثل هذه الحالة حيـث A عـامل التأثـيرات المثبتـة، و B عامل التأثيرات العشوائية، واختيرت حجوم عينة ثابتة n لكل معالجة، هو :

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad (21.26)$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت.

α_i ثوابت خاضعة للقيد $\sum \alpha_i = 0$.

β_j مستقلة وتتبع التوزيع $N(0,\sigma_\beta^2)$

$(\alpha\beta)_{ij}$ تتبع التوزيع $N(0,\frac{a-1}{a}\sigma_{\alpha\beta}^2)$ خاضعة للقيود:

$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

$$\sigma\left\{(\alpha\beta)_{ij}, (\alpha\beta)_{i'j}\right\} = -\frac{1}{a}\sigma^2_{\alpha\beta} \qquad i \neq i'$$

ε_{ijk} مستقلة وتتبع التوزيع $N(0, \sigma^2)$.

β_j، $(\alpha\beta)_{ij}$ و ε_{ijk} مستقلة مثنى مثنى.

$$i = 1, \ldots, a; j = 1, \ldots, b; k = 1, \ldots, n$$

لاحظ في نموذج التحاين المختلط هذا أننا نفترض استقلال أي حدود تفاعل $(\alpha\beta)_{ij}$ و$(\alpha\beta)_{i'j'}$، مالم يشر كل منهما إلى المستوى العشوائي نفسه للعامل B، الحالة التي يكونان فيها مرتبطين سلبا.

وفي نموذج التحاين المختلط (21.26)، تكون القيمة المتوقعة للمشاهدة Y_{ijk} هي:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{..} + \alpha_i \tag{21.26a}$$

وتباين Y_{ijk} هو:

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma^2_Y = \sigma^2_\beta + \frac{a-1}{a}\sigma^2_{\alpha\beta} + \sigma^2 \tag{21.26b}$$

وهكذا يكون للمشاهدات Y_{ijk} تباين ثابت. وفضلا عن ذلك، فهي تتوزع طبيعيا لأنها تراكيب خطية في متغيرات عشوائية مستقلة. وأخيرا، تكون المشاهدات المختلفة، قبل إجراء التجربة العشوائية، مستقلة باستثناء مشاهدات من المستوى العشوائي نفسه للعامل B، حيث تكون مرتبطة بسبب أنها تتضمن حدودا عشوائية مشتركة وبعض الحدود العشوائية المرتبطة. وسنقدم في الفصل الخامس والعشرين مناقشة أكثر تفصيلا للارتباط بين المشاهدات في نماذج التحاين المختلطة.

تعليقات

١ ـ سبب التعبير عن تباين حدود التفاعل في نموذج التحاين (21.26) على الشكل $(a-1)\sigma^2_{\alpha\beta} / a$ بدلا من الشكل المبسط $\sigma^2_{\alpha\beta}$ هو توخّي البساطة في عبارة توقع متوسط المربعات، مما سيسهل القيام باستقراءات في هذا النموذج.

٢ ـ لاحظنا أن النموذج (21.26) يفترض $\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0$، وسوف لا تكون عادة مساوية للصفر.

٣ ـ هناك صياغة لنماذج تحاين مختلطة أكثر تعقيدا.

(٢١ـ٥) اختبارات تحليل التباين للنموذجين II و III

في كل من نموذجي التحاين المختلط والعشوائي لعاملين، تتطابق حسابات تحليل التباين لمجموع المربعات مع تلك الخاصة بنموذج تحاين مثبّت. وهكذا، فإن الصيغ (18.38)-(18.40) قابلة للتطبيق تماما في نموذجي التحاين II و III . وبصورة مماثلة، فإن تحديد درجات الحرية ومتوسط المربعات هو بالضبط كما في نموذج التحاين المثبت، أي كما هو مبين في الجدول (١٨ـ٩). ولا يختلف نموذجا التحاين العشوائي والمختلط عن نموذج التحاين المثبّت إلا في توقع متوسطات المربعات والاختيار الذي يتبع ذلك لإحصاءة الاختبارة المناسبة.

توقع متوسطات المربعات

يمكن استنباط توقع متوسط المربعات في نموذجي التحاين العشوائي والمختلط بالاستفادة من خواص النموذج وبتطبيق نظريات التوقع المعتادة. وهي مبينة في الجدول (٢١ـ٤)، مع ما يقابلها في نموذج التحاين المثبّت. والاشتقاقات عويصة إلا أن قواعد بسيطة قد استُنبطت لإيجاد توقّع متوسط المربعات لنماذج التحاين العشوائية والمختلطة، ونستأنف الحديث عن هذه القواعد في الفصل السابع والعشرين.

ملاحظة

ولإيضاح استنباط توقع متوسطات مربعات باستخدام نظريات التوقع، سنجد $E(MSA)$ لنموذج تحاين عشوائي بعاملين (21.25). ونرغب في إيجاد:

$$E\{MSA\}=E\left\{\frac{nb\sum(\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{...})^2}{a-1}\right\}$$

والآن :

$$Y_{i..}=\sum_j\sum_k\left[\mu_{..}+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}+\varepsilon_{ijk}\right]$$

$$=nb\mu_{..}+nb\alpha_i+n\sum_j\beta_j+n\sum_j(\alpha\beta)_{ij}+\sum_j\sum_k\varepsilon_{ijk}$$

ومنه نجد:

جدول (٢١-٤) توقع متوسطات المربعات في دراسات تتضمن عاملين

متوسط مربعات	df	مستويات مثبتة للعاملين (A و B مثبتان)	مستويات عشوائية (A و B عشوائيان)	مستويات مختلطة للعاملين (A مثبت و B عشوائيان)
MSA	$a - 1$	$\sigma^2 + nb\frac{\Sigma\alpha_i^2}{a-1}$	$\sigma^2 + nb\,\sigma_\alpha^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + nb\frac{\Sigma\alpha_i^2}{a-1} + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
MSB	$b - 1$	$\sigma^2 + nb\frac{\Sigma\beta_j^2}{b-1}$	$\sigma^2 + na\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + na\sigma_\beta^2$
MSAB	$(a-1)(b-1)$	$\sigma^2 + n\frac{\Sigma\Sigma(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta}^2$
MSE	$(n-1)ab$	σ^2	σ^2	σ^2

$$\overline{Y}_{i..}=\frac{Y_{i..}}{nb}=\mu_{..}+\alpha_i+\overline{\beta}_{.}+\overline{(\alpha\beta)}_{i.}+\overline{\varepsilon}_{i..} \qquad (21.27)$$

حيث يشير الخط كالمعتاد إلى عملية أخذ المتوسط فوق الأدلة التي حلّت محلها نقاط. وبصورة مماثلة نجد:

$$\overline{Y}_{...}=\mu_{..}+\overline{\alpha}_{.}+\overline{\beta}_{.}+\overline{(\alpha\beta)}_{..}+\overline{\varepsilon}_{...} \qquad (21.27a)$$

وبالتالي، لدينا:

$$\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{...}=(\alpha_i-\overline{\alpha}_{.})+\left[\overline{(\alpha\beta)}_{i.}-\overline{(\alpha\beta)}_{..}\right]+(\overline{\varepsilon}_{i..}-\overline{\varepsilon}_{...}) \qquad (21.28)$$

وبتربيع طرفي (21.28) والجمع، نجد:

$$\sum_i(\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{...})^2=\sum_i(\alpha_i-\overline{\alpha}_{.})^2+\sum_i\left[\overline{(\alpha\beta)}_{i.}-\overline{(\alpha\beta)}_{..}\right]^2 \qquad (21.29)$$

$$+\sum_i(\overline{\varepsilon}_{i..}-\overline{\varepsilon}_{...})^2+ \quad \text{حدود جُدائية}$$

ولإيجاد $E\left\{\sum\left(\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{...}\right)^2\right\}$، نحتاج إلى أخذ توقع كل حد في الجانب الأيمن. وتسقط الحدود الجدائية من الاعتبار نظرا لاستقلال α_i، $(\alpha\beta)_{ij}$ و ε_{ijk}، والحقيقة أن توقع كل من هذه المتغيرات العشوائية هو الصفر. ويمكن التفكير في كل من الحدود الباقية على أنه البسط في تباين عينة من a من المشاهدات، ونعلم من حقيقة أن تباين عينة غير منحاز أن:

$$E\left\{\sum_{i=1}^{a}(Y_i-\overline{Y})^2\right\}=(a-1)\sigma^2(Y_i) \qquad (21.30)$$

وبالتالي:

$$E\left\{\sum_i(\alpha_i-\overline{\alpha}_{.})^2\right\}=(a-1)\sigma_\alpha^2 \qquad (21.31)$$

ذلك لأن $\sigma^2\{\alpha_i\}=\sigma_\alpha^2$ وبصورة مماثلة، نجد:

$$E\left\{\sum_i(\overline{\varepsilon}_{i..}-\overline{\varepsilon}_{...})^2\right\}=(a-1)\frac{\sigma^2}{bn} \qquad (21.32)$$

باعتبار أن $\sigma^2\{\overline{\varepsilon}_{i..}\}=\frac{\sigma^2}{bn}$ و:

$$E\left\{\sum\left[\overline{(\alpha\beta)}_{i.}-\overline{(\alpha\beta)}_{..}\right]^2\right\}=(a-1)\frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{b} \qquad (21.33)$$

وباستخدام (21.33) - (21.31) نجد:

$$E\left\{\sum(\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{...})^2\right\}=(a-1)\sigma_\alpha^2+(a-1)\frac{\sigma_{\alpha\beta}^2}{b}+(a-1)\frac{\sigma^2}{bn} \quad (21.34)$$

و:

$$E\{MSA\}=\frac{nb}{a-1}E\left\{\sum(\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{...})^2\right\}=nb\sigma_\alpha^2+n\sigma_{\alpha\beta}^2+\sigma^2 \quad (21.35)$$

وهي النتيجة المبينة في الجدول (٢١ـ٤).

إنشاء إحصاءة اختبار

كالمعتاد ينشأ كل إحصاء لاختبار تأثيرات عامل عن مقارنة متوسطي مربعات يتمتعان بالخواص التالية:

١ـ تحت الفرضية H_0 لكل منهما التوقع نفسه.

٢ـ تحت الفرضية H_a يكون توقع متوسط المربعات في البسط أكبر من توقع متوسط المربعات في المقام.

ويمكن البرهان على أن إحصاءة الاختبار تتبع التوزيع F إذا كانت H_0 صحيحة. وتوضع قاعدة القرار بالطريقة المعتادة حيث تؤدي القيم الكبيرة لإحصاءة الاختبار إلى H_a.

وعلى سبيل المثال، لاختبار وجود تأثيرات رئيسة للعامل A في نموذج التحاين العشوائي (21.25)، ونقصد:

$$\begin{aligned} H_0&:\sigma_\alpha^2=0 \\ H_a&:\sigma_\alpha^2>0 \end{aligned} \quad (21.36)$$

ونرى من الجدول (٢١ـ٤) أن MSA و$MSAB$ لهما التوقع نفسه إذا كان $\sigma_\alpha^2=0$ ، أي إذا لم يكن للعامل A تأثيرات رئيسة. وإذا كان $\sigma_\alpha^2>0$ ، فإن $E\{MSA\}$ أكبر من $E\{MSAB\}$. وبالتالي تكون إحصاءة الاختبار المناسبة:

$$F^*=\frac{MSA}{MSAB} \quad (21.37)$$

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند المستوى α هي:

$$(21.38)$$

إذا كانت : $F^*\le F[1-\alpha;a-1,(a-1)(b-1)]$ استنتج H_0

إذا كانت : $F^*> F[1-\alpha;a-1,(a-1)(b-1)]$ استنتج H_a

ونلاحظ أن المقام عند اختبار التأثيرات الرئيسة لعامل A في نموذج التحاين العشوائي هو $MSAB$ ، بينما يكون في نموذج التحاين المثبت MSE .

ونلخص في الجدول (٢١ـ٥) إحصاءات الاختبار المناسبة لنموذجي التحاين المختلط والعشوائي. ولأغراض المقارنة، نقدم في الجدول، أيضا، إحصاءات الاختبار لنموذج التحاين المثبت، وكما نرى من الجدول (٢١ـ٥) ، يختلف مقام إحصاءة الاختبار في نموذجي التحاين المختلط والعشوائي عنه في نموذج التحاين المثبت، وذلك في عدد من الحالات. وبالتالي، فمن المهم أن يكون توقع متوسط المربعات معروفا عند استخدام نماذج عشوائية أو مختلطة بحيث يمكن تحديد إحصاءة الاختبار المناسبة.

جدول (٢١ـ٥) إحصاءات اختبار لنماذج تحاين مختلطة وعشوائية ومثبتة.

اختبار وجود تأثيرات رئيسة لـ	نموذج تحاين مثبت (A و B ثابتان)	نموذج تحاين عشوائي (A و B عشوائيان)	نموذج تحاين مختلط (A مثبت، B عشوائي)
العامل A	MSA / MSE	$MSA / MSAB$	$MSA / MSAB$
العامل B	MSB / MSE	$MSB / MSAB$	MSB / MSE
التفاعلات AB	$MSAB / MSE$	$MSAB / MSE$	$MSAB / MSE$

مثال

نعود إلى مثال التحاين المختلط السابق وفيه أربع مواد تدريب مختلفة (عامل A، مثبت) وخمسة معلمين (عامل B، عشوائي). وقد امتُحنت أربعة صفوف من أجل كل مركب مادة تدريب ـ معلم. ويبين الجدول (٢١ـ٦) تحليل التباين كما أعطته حزمة حاسب خاصة بدراسات عاملين ، والبيانات الأصلية غير معطاة. ولاختبار ما إذا كانت مواد التدريب تتفاعل مع المعلمين أم لا:

$$H_0 : \sigma^2_{\alpha\beta} = 0$$
$$H_a : \sigma^2_{\alpha\beta} > 0$$

نستخدم وفقا للجدول (٢١ـ٥) إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{MSAB}{MSE}$$

ومستخدمين النتائج في الجدول (٢١-٦) نجد:

$$F^* = \frac{3.9}{2.1} = 1.86$$

جدول (٢١-٦) جدول تحاين لنموذج تحاين مختلط يتناول مثال التدريب (A مثبت، B عشوائي، $n = 4, b = 5, a = 4$).

مصدر التغير	SS	df	MS	F^*
العامل A (المواد التدريبية - مثبت)	42	3	14.0	14.0/3.9 = 3.59
العامل B (المعلمون - عشوائي)	54	4	13.5	13.5/2.1=6.43
التفاعل AB	47	12	3.9	3.9/2.1=1.86
الخطأ	126	60	2.1	
المجموع	269	79		

$F(.95; 3, 12) = 3.49$ $\quad F(.95; 4, 60) = 2.53$
$F(.95; 12, 60) = 1.92$

وعند مستوى معنوية $\alpha = .05$، نحتاج إلى $F(.95;12,60)=1.92$. وبما أن $F^*=1.86 \leq 1.92$، نستنتج أن مواد التدريب والمعلمين لاتتفاعل. والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0.06.

ويبين الجدول (٢١-٦) إحصاءتي الاختبار لاختبار التأثيرات الرئيسة لمواد التدريب والتأثيرات الرئيسة للمعلمين، وبمقارنة إحصاءتي الاختبار مع المئينات المناسبة للتوزيع F المعطاة في أسفل الجدول (٢١-٦) عند مستوى معنوية $\alpha = .05$، نجد أن فعاليات المعلمين مختلفة وتأثيرات مواد التدريب مختلفة.

ملاحظة

في حال وجود مشاهدة واحدة لكل معالجة ($n = 1$) ، فكما نذكر من الفقرة (٢١-١) لا يمكن إجراء اختبارات مضبوطة مع نموذج تحاين مثبت لعاملين ما لم يكن ممكنا تعديل النموذج. والسبب هو أن $MSE = 0$ دائما في حالة كهذه مما لايسمح بالحصول على تقدير لـ σ^2. ويشير الجدول (٢١-٤) إلى إمكانية القيام باختبارات مضبوطة للتأثيرات الرئيسة لكل من العامل A والعامل B مع نموذج تحاين عشوائي فيه ($n = 1$) ، ودون أية قيود مفترضة حول التفاعلات. وذلك بسبب أن $MSAB$ هو المقام

المناسب لإحصاءة الاختبار هنا، ويمكن تحديد *MSAB* بصرف النظر عن حجم العينة. ومع نموذج تحاين مختلط حيث العامل *A* مثبت، يمكن، أيضا، اختبار وجود التأثيرات الرئيسة للعامل *A* عندما $n=1$ دون الحاجة إلى فروض تقيّد التفاعلات. إلا أن الاختبار المضبوط للتأثيرات الرئيسة للعامل *B* سيحتاج إلى الافتراض بأن جميع التفاعلات صفر، أو إلى تعديل ما لنموذج التحاين.

(٢١-٦) تقدير تأثيرات عامل في النموذجين II و III

تقدير مركبات التباين

في حالة عوامل عشوائية تأثيراتها الرئيسة مهمة ، نرغب في الغالب بتقدير مقدار مركبة التباين. ويمكننا بسهولة استنباط مقدرات نقطية غير منحازة، مستخدمين تراكيب خطية لتوقعات متوسطات المربعات في الجدول (٢١-٤). وفي نموذج التحاين العشوائي، مثلا ، يمكن تقدير σ_α^2 بملاحظة أن :

$$E\{MSA\}-E\{MSAB\}=\sigma^2+nb\sigma_\alpha^2+n\sigma_{\alpha\beta}^2-\sigma^2-n\sigma_{\alpha\beta}^2=nb\sigma_\alpha^2$$

وبالتالي فإن المقدر النقطي غير المنحاز لـ σ_α^2 هو:

$$s_\alpha^2=\frac{MSA-MSAB}{nb} \tag{21.39}$$

مثال في مثال التدريب في الجدول (٢١-٦)، وجدنا للعامل العشوائي *B* تأثيرات مهمة. ولتقدير σ_β^2 نستفيد من توقعات متوسطات المربعات في الجدول (٢١-٤) لنموذج مختلط فيه العامل *A* مثبّت، والعامل *B* عشوائي، ونحدد مقدرا نُقطيا غير منحاز كما يلي:

$$s_\beta^2=\frac{MSB-MSE}{na} \tag{21.40}$$

وبالتعويض نجد:

$$s_\beta^2=\frac{13.5-2.1}{16}=.71$$

تقدير التأثيرات المثبتة في نموذج مختلط

عندما تكون التأثيرات الرئيسة لعامل مثبت، في نموذج مختلط لعاملين، تأثيرات

ذات أهمية، فنرغب عادة في الحصول على تقديرات لهذه التأثيرات على شكل مقارنات، ومناقشتنا السابقة في الفصل التاسع عشر لنموذج تحاين مثبت ذي عاملين قابلة للتطبيق هنا ، مع تغيير رئيس يظهر في التباين المقدَّر للمقارنة، وفي نموذج التحاين المثبت يتضمن التباين المقدَّر *MSE*، كما هو مبين مثلا، في (19.8) ولكن، عند التعامل مع نموذج مختلط، لايعود متوسط المربعات المناسب الذي نستخدمه في صيغة التباين المقدَّر *MSE*. وهناك قاعدة بسيطة تخبرنا بمتوسط المربعات المناسب، ونعني ذلك المتوسط المستخدم في مقام إحصاءة اختبار وجود تأثيرات رئيسة للعامل المثبت المدروس. وعلى سبيل المثال، مع النموذج المختلط (21.26) حيث A هو العامل المثبت، يكون *MSAB* هو متوسط المربعات المناسب (جدول ٢١-٥). ودرجات الحرية عند وضع فترة ثقة هي تلك الموافقة لمتوسط المربعات المستخدم لتقدير تباين المقارنة .

مثال. في مثال التدريب في الجدول (٢١-٦) لم نعثر على تأثيرات تفاعل . ونرغب في تقدير الفرق بين متوسطي مقداري التعلم عند استخدام مادتي التدريب 1 و 2 مستخدمين 95% فترة ثقة. ونتائج العينة ذات الصلة هي:

$$\bar{Y}_{1.} = 43.1 \qquad \bar{Y}_{2.} = 40.8$$

وبالتالي يكون تقديرنا لـ $\mu_{1.} - \mu_{2.}$ هو:

$$\hat{D} = \bar{Y}_{1.} - \bar{Y}_{2.} = 43.1 - 40.8 = 2.3 \tag{21.41}$$

وباستخدام الصيغة (19.16b) حيث تحل *MSAB* محل *MSE*، يكون التباين المقدَّر:

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2\,MSAB}{bn} \tag{21.42}$$

وفي مثالنا، لدينا:

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2(3.9)}{20} = .39$$

أو $s\{\hat{D}\} = 0.62$. وعدد درجات الحرية الموافق لـ *MSAB* هو 12، وبالتالي نجد $t\{.975; 12\} = 2.179$ ويكون حدا الثقة بالتالي $2.3 \pm 2.179(.62)$ وتكون فترة الثقة المرغوبة:

$$0.9 \le \mu_{1.} - \mu_{2.} \le 3.7$$

وهكذا نستنتج بمعامل ثقة 0.95 أن المادة التدريبية 1 أكثر فعالية من المادة التدريبية 2، كون متوسطها أكبر بما يتراوح بين 0.9 و 3.7 وحدة قياس.

طرق المقارنات المتعددة. يمكن الاستفادة من طرق المقارنات المتعددة في حالة التأثيرات الرئيسة لعامل مثبت في نموذج تحاين مختلط بالطريقة نفسها المطبقة عندما يكون نموذج التحاين مثبتا. وفي التباين المقدَّر للمقارنة نحتاج ببساطة إلى استبدال متوسط مربعات مناسب بـ *MSE*. وعلى سبيل المثال، لنفرض أننا نرغب في الحصول على جميع المقارنات الثنائية بين مواد التدريب المختلفة في مثال التدريب في الجدول (٢١-٦) بتطبيق طريقة توكي. فنحسب $s^2\{\hat{D}\}$ كما في المثال السابق. والعامل T في (19.16 c) سيكون الآن:

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}q\left[1-\alpha;a,(a-1)(b-1)\right] \qquad (21.43)$$

حيث حلت $(a-1)(b-1)$ محل $(n-1)$ كدرجات حرية موافقة لمتوسط المربعات المستخدم . وبالاشارة إلى مثال التدريب بالذات المعطى في الجدول (٢١-٦)، فإننا كي نضع فترات بمعامل ثقة عائلي يساوي 95% لجميع المقارنات الثنائية بين مواد التدريب نحتاج إلى:

$$q(.95;4,12)=4.20$$

و:

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}(4.20)=2.97$$

المرجع المذكور

[21.1] Johnson, D. E., and F. A. Graybill. "*Estimation of σ^2 in a To-Way Classification Model with Interaction.*" *Journal of the American Statisticl Association* 67 (972), pp. 388 - 94.

مسائل

(٢١-١) لنفرض أننا نريد تطبيق نموذج تحليل التباين لعاملين (18.23) مع $n=1$ لكل مركب من مستويات العاملين. ما هو عدد درجات الحرية الموافقة لـ *SSE* في (18.38)؟ ماذا يقتضي ذلك؟

(٢١-٢) **طرفيات تُدار بالعملة.** قام مركز الحاسب في جامعة بتجربة وُضعت فيها طرفية حاسب تدار بالعملة في كل من أربعة مواقع مختلفة في الحرم الجامعي في الفصل الأخير وذلك خلال الأسبوع الذي يتوسط الفصل الدراسي. وكذلك خلال الأسبوع الأخير من الدراسة. ويقدم البيان التالي عدد الساعات التي بقيت فيها كل طرفية بدون استخدام خلال الأسبوع وذلك في المواقع الأربعة (عامل A) وفي كل من الأسبوعين (عامل B).

	$j=1$	$j=2$ نهائي
$i=1$	16.5	21.4
$i=2$	11.8	17.3
$i=3$	12.3	16.9
$i=4$	16.6	21.9

افترض أن نموذج التحاين بدون تفاعل (21.1) هو النموذج المناسب.

أ ـ ارسم البيان في هيئة الشكل (١٨-٥). هل يبدو أن تأثيرات التفاعل موجودة؟ هل يبدو أن التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B موجودة؟ ناقش.

ب ـ قم باختبارات منفصلة للتأثيرات الرئيسة للأسبوع وللموقع. وفي كل اختبار استخدم مستوى معنوية $\alpha = .05$ واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. إعط حدا أعلى لمستوى المعنوية العائلي؛ استخدم متباينة كيمبل . ماهي القيمة -P لكل اختبار؟

جـ ـ قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات الموقع وقدّر الفرق بين متوسطي الأسبوعين، استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 90%. اعرض نتائجك.

(٢١-٣) بالإشارة إلى مسألة **الطرفيات التي تُدار بالعملة** رقم (٢١-٢). نرغب في تقدير μ_{32}.

أ ـ أوجد تقديرا نقطيا لـ μ_{32} مستخدما (21.7b).

ب ـ تحقق من التقدير النقطي $\hat{\mu}_{32}$ الذي حصلت عليه في (أ) مستخدما

(21.7) و (21.7a) . اعرض المصفوفتين C و A اللتين استخدمتهما.

جـ ـ أوجد التباين المقدَّر لـ $\hat{\mu}_{32}$ إرشاد: استخدم (6.47) ولاحظ أن

$$A\,[(MSE)\,I]\,A' = (MSE)\,A$$

د ـ ضع 95% فترة ثقة لـ μ_{32}. فسّر تقديرك بفترة. هل يمكن تطبيق تقديرك بفترة إذا وضع في العام القادم ثلاث طرفيات في الموقع ٣؟ اشرح.

(٢١ـ٤) بالإشارة إلى مسألة **الطرفيات التي تُدار بالعملة** رقم (٢١ـ٢) طبق اختبار توكي للتجميعية، استخدم $\alpha = .025$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. إذا كان النموذج التجميعي غير مناسب، فماذا يمكنك أن تفعل؟

(٢١ـ٥) **أفكار مفاجئة.** تحرّى باحث ماإذا كانت الأفكار المفاجئة أكثر فعالية في الفئات الأكبر منها في الفئات الأصغر، وذلك بتشكيل أربع فئات من الإداريين في مجال الأعمال الزراعية، وكانت حجوم الفئات اثنين وثلاثة وأربعة وخمسة، على الترتيب. وكذلك شُكلت أربع فئات من العلماء في مجال الأعمال الزراعية، وكانت حجوم الفئات كما في حالة الإداريين. وقد أعطى الباحث المسألة نفسها لكل فئة: "كيف يمكن لكندا أن تزيد من قيمة صادراتها الزراعية؟" وقد أُعطيت كل فئة ثلاثون دقيقة لتوليد الأفكار. وكان المتغير موضع الاهتمام هو عدد الأفكار المختلفة المقترحة من كل فئة. وكانت النتائج بعد تصنيفها وفق نوع الفئة (عامل A) وحجم الفئة (عامل B) كما يلي:

العامل A (نوع الفئة)		$j = 1$ اثنان	$j = 2$ ثلاثة	$j = 3$ أربعة	$j = 4$ خمسة
		العامل B (حجم الفئة)			
$i = 1$	اداريون زراعيون	18	22	31	32
$i = 2$	علماء زراعيون	15	23	29	33

افترض أن نموذج التحاين بدون تفاعل (21.1) هو النموذج المناسب.

أ ـ ارسم البيان في هيئة الشكل (١٨ـ٥). هل يبدو أن تأثيرات التفاعل موجودة؟ هل يبدو أن التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B موجودة؟ ناقش.

ب ـ قم باختبارات منفصلة للتأثيرات الرئيسة لنوع الفئة وحجم الفئة. وفي كل اختبار استخدم مستوى معنوية $\alpha = .01$. واعرض البدائل وقاعدة القرار ، والنتيجة، إعط حدا أعلى لمستوى المعنوية العائلي؛ استخدم متباينة كيمبل . ماهي القيمة -P لكل اختبار ؟.

جـ ـ أوجد فترات ثقة لـ $D_1 = \mu_2 - \mu_1$, $D_2 = \mu_3 - \mu_2$, $D_3 = \mu_4 - \mu_3$ استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي يساوي 95%. اعرض نتائجك.

د ـ هل طريقة بونفيروني المستخدمة في الجزء جـ الطريقة الأكثر كفاءة ؟ اشرح.

(٢١ـ٦) بالإشارة إلى مسألة **الأفكار المفاجئة** (٢١ـ٥). نرغب بتقدير μ_{14}.

أ ـ أوجد تقديرا نقطيا لـ μ_{14} مستخدما (21.7b).

ب ـ تحقق من التقدير النقطي $\hat{\mu}_{14}$ الذي حصلت عليه في (أ) مستخدما (21.7) و (21.7a) اعرض المصفوفتين C و A المستخدمتين.

جـ ـ أوجد التباين المقدَّر لـ $\hat{\mu}_{14}$ إرشاد : استخدم (6.47) ولاحظ أن:

$$\mathbf{A}\,[(MSE)\,\mathbf{I}]\,\mathbf{A}' = (MSE)\,\mathbf{A}$$

د ـ ضع 99% فترة ثقة لـ $\hat{\mu}_{14}$. فسّر تقديرك بفترة. هل يبقى تقديرك بفترة قابلا للتطبيق إذا كان العاملان متفاعلين؟.

(٢١ـ٧) بالإشارة إلى مسألة **الأفكار المفاجئة** (٢١ـ٥). نفِّذ اختبار توكي للتجميعية مستخدما $\alpha = .01$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة. إذا لم يكن نموذج التجميعية مناسبا، فماذا يمكنك عمله ؟.

(٢١ـ٨) **سجق فول الصويا.** يريد خبير بتقنية الطعام أن يختبر القابليات التخزينية لنوع مطور حديثا من تقليد للسجق مصنوع من فول الصويا. وقد قام بتجربة لاختبار تأثيرات مستوى درجة الحرارة (عامل A) ومستوى الرطوبة (عامل B) في حجيرة التحميد على تغير اللون في السجق. وقد تضمنت الدراسة ثلاثة مستويات رطوبة وأربعة مستويات درجة حرارة . وقد خزنت

خمسمائة قطعة سجق في كل من مركبات الدرجة ــ الرطوبة الإثني عشرة ولمدة 90 يوما. وفي نهاية فترة التخزين حدد الباحث نسبة السجقات التي أظهرت تغيرات في اللون وذلك لكل من المركبات الاثني عشرة. وقام الباحث بتحويل البيانات وفقا لتحويل قوس الجيب (16.19) كي يجعل التباينات مستقرة. وفيما يلي البيانات المحولة $Y' = 2\arcsin\sqrt{Y}$:

العامل A (مستوى الرطوبة)	العامل B (مستوى درجة الحرارة) $j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 1$	13.9	14.2	20.5	24.8
$i = 2$	15.7	16.3	21.7	23.6
$i = 3$	15.1	15.4	19.9	26.1

افترض أن نموذج التحاين بدون تفاعل هو النموذج المناسب.

أ ـ ارسم البيان في هيئة الشكل (١٨ـ٥). هل يبدو أن تأثيرات التفاعل موجودة؟ هل يبدو أن التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B موجودة؟ ناقش.

ب ـ قم باختبارين منفصلين للتأثيرات الرئيسة للرطوبة ولدرجة الحرارة. واستخدم في كل اختبار مستوى معنوية $\alpha = .025$، واعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P لكل اختبار؟.

جـ ـ ضع فترات ثقة لـ $D_1 = \mu_2 - \mu_1$ ، $D_2 = \mu_3 - \mu_2$ ، $D_3 = \mu_4 - \mu_3$ واستخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي يساوي 95%. اعرض نتائجك.

د ـ هل طريقة بونفيروني المستخدمة في الجزء جـ الطريقة الأكثر كفاءة هنا؟ إشرح.

(٢١ـ٩) بالإشارة إلى مسألة **سجق فول الصويا** (٢١ـ٨). نرغب في تقدير μ_{23}

أ ـ أوجد تقديرا نقطيا لـ μ_{23} مستخدما (21.7B)

ب ـ تحقق من التقدير النقطي $\hat{\mu}_{23}$ الذي حصلت عليه في الجزء آ مستخدما (21.7) و(21.7a). أعرض المصفوفتين **C** و **A** المستخدمتين.

جـ ـ أوجد التباين المقدَّر لـ $\hat{\mu}_{23}$. إرشاد: استخدم (6.47) ولاحظ أن

$$\left[\mathbf{A}\left[(MSE)\mathbf{I}\right]\right]\mathbf{A}' = (MSE)\mathbf{A}$$

د ـ ضع 98% فترة ثقة لـ μ_{23} وحَوِّلها عائدا إلى وحدات القيـاس الأصليـة. فسّـر تقديرك بفترة. وهل يبقى تقديرك بفترة قابلا للتطبيق إذا تفاعل العاملان؟

(٢١ـ١٠) بالإشارة إلى مسألة **سجق فول الصويا** (٢١–٨). نفذ اختبار توكي للتجميعية مستخدما $\alpha = .05$. اعرض البدائل وقاعدة القرار والنتيجة. ماذا يمكنك عمله إذا لم يكن النموذج التجميعي مناسبا؟.

(٢١ـ١١) بالإشارة إلى مسألة **العروض النقدية** (١٨ـ١٠). من المعروف أنه في كل من مجتمعي المالكين الذكور والمالكين الإناث، 30% فتيان، 60% متوسطو العمر، و10% متقدمون في السن. اختبر باستخدام إحصاءة الاختبار t^* بدرجة واحدة من الحرية ما إذا كان متوسطا العروض النقدية للذكور وللإناث متساويين أم لا؛ استخدم $\alpha = .05$، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة ـP لهذا الاختبار؟

(٢١ـ١٢) بالاشارة إلى مسألة **معالجة القصور الكلوي في مستشفى** (١٨–١٨)، ومع الاستمرار في التعامل مع البيانات المحوَّلة $Y' = \log_{10}(Y + 1)$. من المعروف أن 75% من المرضى في كل فئة من فئات زيادة الوزن يتلقى المعالجة قصيرة الأمد.

أ – استخدم نموذج متوسطات الخلايا (18.15) للتعبير عن البديلين في اختبار ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل B موجودة أم لا.

ب ـ عرف المصفوفة $\mathbf{X}$ والمتجه $\boldsymbol{\beta}$ للتعبير عن النموذج الكامل (18.15) في هذه الحالة بشكل مصفوفي.

جـ ـ عبر عن البديلين في الجزء آ بالشكل المصفوفي (8.66).

د – استخدم (8.70) لحساب. $SSE(R) - SSE(F)$

هـ ـ اختبر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل B موجودة أم لا؛ استخدم $\alpha = .05$. اعرض قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار ؟

و ـ قارن متوسط عدد أيام الاستشفاء (بالوحدات المحوَّلة) لمرضى من فئتي

زيادة الوزن الحادّة والمعتدلة؛ استخدم 95% فترة ثقة.

(٢١-١٣) بالإشارة إلى مسألة **الأساتذة الملحقين** (٢٠-٦). من المعروف أن 10% من الأساتذة في كل اختصاص يحملون درجة البكالوريوس، 20% يحملون شهادة الماجستير، و 70% يحملون شهادة الدكتوراه.

أ - استخدم نموذج متوسطات الخلايا (18.15) للتعبير عن البديلين في اختبار ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A موجودة أم لا.

ب - عرف المصفوفة $\mathbf{X}$ والمتجه β للتعبير عن النموذج (18.15) في هذه الحالة بشكل مصفوفي.

جـ - عبر عن البديلين في الجزء (آ) بالشكل المصفوفي (18.15).

د - استخدم (8.10) لحساب $SSE(R) - SSE(F)$.

هـ - اختبر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A موجودة؛ استخدم $\alpha = .01$. اعرض قاعدة القرار والنتيجة ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

و - قارن متوسطي المدفوعات التي يتلقاها أعضاء هيئة تدريس يعلّمون مقررات إنسانية وأعضاء هيئة تدريس يعلّمون مقررات هندسية. استخدم 99% فترة ثقة، فسّر تقديرك بفترة.

(٢١-١٤) بالإشارة إلى مسألة **متطلبات المبرمج** (١٨-٢٠). إفترض أن المشاهدات التالية غير موجودة : $Y_{234}, Y_{134}, Y_{133}$، وفضلا عن ذلك، افترض أن حجوم العينات تعكس أهمية متوسطات المعالجات، اختبر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة لنوع الخبرة موجودة أم لا متخذا $\alpha = .01$. اعرض البديلين، وقاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟.

(٢١-١٥) بالإشارة إلى مسألة الأساتذة الملحقين (٢٠-٦). افترض أن حجوم العينات تعكس أهمية متوسطات المعالجات. اختبر ماإذا كانت التأثيرات الرئيسة لموضوع الاختصاص موجودة أم لا، متخذا مستوى المعنوية $\alpha = .05$. اعرض البديلين، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار ؟.

(٢١-١٦) في نموذج التأثيرات المختلطة (21.26)، لماذا يكون $\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0$ ،بينما يكون عادة $\sum_j (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$ ؟.

(٢١-١٧) يصمم مستشار تسويق عدة تجارب تتناول أداة لتصنيع الطعام مطوّرة حديثا ومنخفضة الكلفة. وأهداف التجربة الأولية (١) تأثير ثلاثة أسعار ممكنة للوحدة، اقترحها قسم المبيعات ، على رواج البيع وهي ($25.95, $25.49, $23.99).
و(٢) تحديد ما إذا كانت الخطة المستخدمة لتلوين الأداة تؤثر في رواج البيع. وهناك العديد جدا من خطط الألوان الممكنة؛ وقد اختير منها ثلاثة ألوان (أبيض، أخضر، زهري) للتجربة الأولية كي تمثل مدى الألوان الممكنة. إذا كانت التجربة تقترح أن لخطة الألوان تأثيرها، فسيجري تحرّي هذه الناحية من تصميم الأداة بالتفصيل في دراسة مقبلة. أي نموذج تحاين يمكن أن تستخدمه لتحليل التجربة الأولية ؟ ناقش.

(٢١-١٨) في دراسة تحاين لعاملين حيث $n=5, b=2, a=3$، كان تأثيرا العاملين كليهما عشوائيا وكان $\sigma^2_{\alpha\beta} = 6.0$ و $\sigma^2_\beta = 10.\sigma^2_\alpha = 8.0, \sigma^2 = 5.0$. افترض أن نموذج التحاين (21.25) قابل للتطبيق.
أ ـ أوجد $E\{MSAB\}, E\{MSB\}$, $E\{MSA\}$
ب ـ ماذا يمكن أن يكون توقع متوسط المربعات إذا كان $\sigma^2_{\alpha\beta} = 0$ ، مع بقاء جميع المعالم الأخرى بدون تغيير ؟

(٢١-١٩) علّق إحصائي مسح بما يلي "إنني شديد الارتياب باستخدام نموذجي تحاين التأثيرات العشوائية والتأثيرات المختلطة ، فقلّما يجري اختيار مستويات وفق آلية عشوائية من مجتمع معروف". ناقش.

(٢١-٢٠) **الأميال للجالون الواحد.** رغب صانع سيارات في دراسة تأثيرات الخلافات بين السائقين (عامل A)، والخلافات بين السيارات (عامل B) على استهلاك الوقود. اختير أربعة سائقين عشوائيا؛ كما اختيرت عشوائيا خمس سيارات من الطراز نفسه مع مغيّر سرعات يدوي من خط التجميع.

وقاد كل سائق كل سيارة مرتين في طريق معدّ للاختبار يمتد أربعين ميلا، وسُجل عدد الأميال المقطوعة في الجالون الواحد. وفيما يلي البيان الإحصائي للتجربة:

العامل A (سائق)	العامل B (سيارة) $j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
$i = 1$	25.3	28.9	24.8	28.4	27.1
	25.2	30.0	25.1	27.9	26.6
$i = 2$	33.6	36.7	31.7	35.6	33.7
	32.9	36.5	31.9	35.0	33.9
$i = 3$	27.7	30.7	26.9	29.7	29.2
	28.5	30.4	26.3	30.2	28.9
$i = 4$	29.2	32.4	27.7	31.8	30.3
	29.3	32.4	28.9	30.7	29.9

افترض أن نموذج التحاين (21.25) قابل للتطبيق.

أ ـ اختبر ما إذا كان العاملان يتفاعلان أم لا، استخدم $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

ب ـ اختبر بصورة منفصلة ماإذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B موجودة أم لا. استخدم $\alpha = .05$، في كل من الاختبارين واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة ، ماهي القيمة -P لكل اختبار ؟

جـ ـ أوجد تقديرات نقطية لِ σ_α^2 و σ_β^2، أي عامل يبدو أكثر تأثيرا على استهلاك الوقود؟.

(٢١ـ٢١) بالإشارة إلى مسألة **خدمة مساق القرص** (*Disk Drive*) رقم (١٨-١٦)افترض أن مركز الخدمة يستخدم عددا كبيرا من الفنيين وقد اختير منهم للدراسة ثلاثة اختيارا عشوائيا. افترض أن شروط نموذج التحاين المختلط (21.26) قابلة للتطبيق، باستثناء أن تأثيرات العامل A هي هنا عشوائية وتأثيرات العامل B مثبتة. وتحت الشروط السائدة، يخدم جميع الفنيين كلا من الأنواع الثلاثة بتواترات متساوية تقريبا.

أ ــ اختبر ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا؛ استخدم $\alpha = .01$، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار ؟

ب ـ أوجد التقدير النقطي لـ $\sigma^2_{\alpha\beta}$. هل يبدو $\sigma^2_{\alpha\beta}$ أكبر نسبيا من σ^2؟ اشرح.

جـ ـ اختبر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A موجودة أم لا؛ استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة، لماذا نعتبر اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A ذا مغزى هنا؟

د ـ اختبر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل B موجودة أم لا؛ استخدم $\alpha = .01$، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. لماذا نعتبر اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B ذا مغزى هنا؟

هـ ـ نرغب في إيجاد جميع المقارنات الثنائية بين المتوسطات للأنواع الثلاثة من مساقات الأقراص. استخدم طريقة توكي و 95% معامل ثقة للقيام بهذه المقارنات. اعرض نتائجك.

و ـ أوجد تقديرا نقطيا لـ σ^2_α. هل يبدو التغير بين الفنيين كبيرا ؟ اشرح.

(٢١-٢٢) **اللؤلؤ المزيف.** قاد بحث ابتدائي في إنتاج اللؤلؤ المزيف إلى دراسة تأثير عدد طبقات طلاء ورنيش اللك(عامل A) المطبقة على خرزة بلاستيك براقة مستخدمة كأساس اللؤلؤ على القيمة التسويقية للؤلؤة، وقد استُخدمت في الدراسة أربع دفعات في كل منها 12 خرزة (عامل B)، ونرغب، أيضا، في دراسة تأثيرها على القيمة التسويقية. والمستويات الثلاث للعامل A (6 ,8 ,10 طلاءات) كانت مثبتة سلفا، بينما اعتُبرت الدفعات الأربع عينة عشوائية من الدفعات من عملية إنتاج الخرز. وقد حُددت القيمة التسويقية لكل لؤلؤة بواسطة جماعة من الخبراء. وفيما يلي البيان الإحصائي (بعد ترميزه).

العامل A (عدد الطلاءات)	العامل B (دفعة) $j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=1$	72.0	72.1	75.2	70.4
	74.6	76.9	73.8	68.1
	67.4	74.8	75.7	72.4
	72.8	73.3	77.8	72.4
$i=2$	76.9	80.3	80.2	74.3
	78.1	79.3	76.6	77.6
	72.9	76.6	77.3	74.4
	74.2	77.2	79.9	72.9
$i=3$	76.3	80.9	79.2	71.6
	74.1	73.7	78.0	77.7
	77.1	78.6	77.6	75.2
	75.0	80.2	81.2	74.4

افترض أن نموذج التحاين المختلط (21.26) قابل للتطبيق.

أ - اختبر تأثيرات التفاعل مستخدما $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة ماهي القيمة -P للاختبار؟

ب - اختبر التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B واستخدم لكل اختبار، $\alpha = .05$ واعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P لكل اختبار؟

جـ - قدّر $D_1 = \mu_{2.} - \mu_{1.}$ و $D_2 = \mu_{3.} - \mu_{2.}$، مستخدما طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 90% اعرض نتائجك.

د - أوجد تقديرا نقطيا لـ σ_β^2. هل يبدو σ_β^2 كبيرا بالمقارنة مع ؟ ناقش.

(٢١-٢٣) بالإشارة إلى مسألة **الطرفيات التي تُدار بالعملة** (٢١-٢). لنفرض أن الأسابيع (عامل B) قد اختيرت بالعمْد. ولكن المواقع (عامل A) اختيرت عشوائيا من عدد كبير من المواقع الممكنة. وافترض أن شروط نموذج التحاين المختلط (21.26) مناسبة، باستثناء أن تأثيرات العامل A عشوائية هنا، بينما تأثيرات العامل B مثبتة.

أ ـ اختبر وجود التأثيرات الرئيسية للعامل B ؛ استخدم $\alpha = .05$.

اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار ؟

ب ـ لماذا لانستطيع اختبار وجود التأثيرات الرئيسة للعامل A هنا ؟

تمارين

(٢١ـ٢٤) عدّل الصيغ (18.39a) و (18.39b) بحيث تنطبق على نموذج التحاين (21.1) حيث $n = 1$.

(٢١ـ٢٥) اعتبر دراسة بعاملين حيث $a = 2$, $b = 2$ و $n = 1$. اكتب المصفوفة C الخاصة بالقيد $\mu_{11} = \mu_{12} + \mu_{21} - \mu_{22}$ لاستخدامها في (21.7a). بيّن أن المقدرات النقطية في (21.7b) هي عناصر $\mathbf{b}_R$ في (21.7).

(٢١ـ٢٦) بيّن أن (21.8) هي دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية الوحيدة في α_i و β_j بحيث يكون $\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0$.

(٢١ـ٢٧) استنبط في نموذج التحاين العشوائي (21.25). [إرشاد: استخدم (21.27)].

مشاريع

(٢١–٢٨) بالإشارة إلى بيانات SENIC وإلى المشروعين (٢٠–١٨) و(٢٠–١٩). افترض أن حجوم العينة تعكس أهمية متوسطات المعالجات.

أ ـ اختبر وجود التأثيرات الرئيسة للمنطقة (عامل A)، استخدم $\alpha = .01$.

اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟.

ب ـ اختبر وجود التأثيرات الرئيسة لمتوسط أعمار المرضى (عامل B)، استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟.

(٢١–٢٩) بالإشارة إلى بيانات SMSA وإلى المشروعين (٢٠–٢٠) و(٢٠–٢١). افترض أن حجوم العينة تعكس أهمية متوسطات المعالجات.

أ ـ اختبر وجود التأثيرات الرئيسة للمنطقة (عامل A) استخدم $\alpha = .005$.

اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟.

ب ـ اختبر وجود التأثيرات الرئيسة للنسبة المئوية من المجتمع في المدن المركزية (عامل B) استخدم $\alpha = .005$. اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟ .

(٢١-٣٠) لنعتبر دراسة بعاملين حيث $a=3$, $b=2$ و $n=5$ ، وحيث ينطبق نموذج التحاين العشوائي (21.25) مع $\mu_{.} = 92$, $\sigma_{\alpha}^2 = 24$, $\sigma_{\beta}^2 = 11$, $\sigma_{\alpha\beta}^2 = 0.1$ و $\sigma^2 = 8$.

أ ـ مستخدما مولدا للأعداد العشوائية الطبيعية، أوجد قيمة كل من التأثيرات الرئيسة $\alpha_i(i = 1, 2, 3)$ و $\beta_j(j = 1, 2)$ وقيمة كل تأثير تفاعل $(\alpha\beta)_{ij}$.

ب ـ ولّد خمسة حدود خطأ لكل معالجة.

جـ ـ ركّب قيم المعالم التي حصلت عليها في (آ) وحدود الخطأ التي حصلت عليها في (ب) لتوليد خمس مشاهدات Y_{ijk} لكل معالجة.

د ـ معتمدا على المشاهدات التي حصلت عليها في (جـ) احسب إحصاءة الاختبار F^* لاختبار ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A موجودة أم لا، ماهي نتيجتك مستخدما $\alpha = .05$ ؟

هـ ـ أعد الخطوات من (آ) الى (د) مائة مرة. احسب متوسط المائة متوسط مربعات في البسط، ومتوسط المائة متوسط مربعات في المقام. هل هذان المتوسطان قريبان من التوقعات النظرية؟

و ـ في أي نسبة من التكرارات المائة يقود الاختبار إلى نتيجة وجود تأثيرات رئيسة للعامل A ؟ هل قوة الاختبار جيدة للحالة المدروسة هنا؟.

دراسات متعددة العوامل

عند دراسة ثلاثة عوامل في آن واحد يكون التحليل والنموذج المستخدمان تعميماً مباشرا لحالة عاملين. وسنوضح طبيعة التعميمات هذه بالاستناد إلى دراسات تتضمن ثلاثة عوامل. وفي العادة، تُستخدم حُزم الحاسب لإنجاز الحسابات المطلوبة لدراسات متعددة العوامل تتضمن ثلاثة عوامل أو أكثر. ولكمال المناقشة، على أي حال، سنقدم الصيغ الحسابية الضرورية لدراسات تتضمن ثلاثة عوامل.

(٢٢-١) نموذج I (مستويات العامل مثبتة) لدراسات تتضمن ثلاثة عوامل

سنطور هنا نموذج تحاين بمستويات عامل مثبتة لدراسات تتضمن ثلاثة عوامل ، وذلك عندما تكون حجوم العينات لكل معالجة متساوية ولجميع متوسطات المعالجات الأهمية نفسها. وسيكون نموذج التحاين قابلاً للتطبيق على دراسات مشاهدة وعلى دراسات تجريبية مبنية على التصميم تام العشوائية.

رموز

ثلاثة عوامل A, B, C قيد الدراسة بـ a, b, c من المستويات، على الترتيب. ونرمز لمتوسط استجابة معالجة يكون فيها العامل A عند المستوى i $(i=1,\ldots,a)$ والعامل B عند المستوى j. $(j=1,\ldots,b)$ والعامل C عند المستوى k $(k=1,\ldots,c)$ بـ μ_{ijk}. ونفترض أن عدد المشاهدات لكل معالجة ثابت، ونرمز له بـ n. نفترض $n \geq 2$.

ونرمز لمتوسط الاستجابة عندما يكون A عند المستوى i و B عند المستوى j بـ μ_{ij}. خدم رموزا مشابهة لأزواج أخرى من مستويات العوامل. وبما أننا افترضنا أهمية

متساوية لجميع متوسطات المعالجات، فنعرّف:

$$\mu_{ij.} = \frac{\sum_k \mu_{ijk}}{c} \qquad (22.1a)$$

$$\mu_{i.k} = \frac{\sum_j \mu_{ijk}}{c} \qquad (22.1b)$$

$$\mu_{.jk} = \frac{\sum_i \mu_{ijk}}{a} \qquad (22.1c)$$

ونرمز لمتوسطات الاستجابة عندما يكون A عند المستوى i بـ $\mu_{i..}$، مع استخدام رموز مشابهة لمتوسطات مستويات عوامل أخرى. ونعرف:

$$\mu_{i..} = \frac{\sum_j \sum_k \mu_{ijk}}{c} \qquad (22.2a)$$

$$\mu_{.j.} = \frac{\sum_i \sum_k \mu_{ijk}}{c} \qquad (22.2b)$$

$$\mu_{..k} = \frac{\sum_i \sum_j \sum_k \mu_{ijk}}{abc} \qquad (22.2c)$$

وأخيرا نرمز لمتوسط الاستجابة الإجمالي بـ $\mu_{...}$ ، ونعّرفه على الشكل:

$$\mu_{...} = \frac{\sum_i \sum_j \sum_k \mu_{ijk}}{abc} \qquad (22.2c)$$

توضيح

ولتوضيح معاني حدود النموذج في نموذج تحليل تباين ذي ثلاثة عوامل، سنأخذ في الاعتبار دراسة تأثيرات الجنس، والعمر، ومستوى الذكاء لخريجي كلية على تعلّم مهمة معقدة. الجنس، وهو العامل A، له مستويان $a = 2$، (ذكر، أنثى). والعمر، وهو العامل B، معّرف بدلالة ثلاثة مستويات، $b=3$، (فتى، متوسط السن، كبير السن). و أخيراً، الذكاء، وهو العامل C، ومعّرف بدلالة مستويين، $c = 2$، (IQ مرتفع، IQ عادي). ويبيّن الجدول (٢٢-١) متوسطات المعالجات μ_{ijk} لجميع تراكيب مستويات العوامل الثلاثة، بالإضافة إلى تمثيلها الرمزي. ويبيّن الجدول (٢٢-١) ، أيضا، المتوسطات المختلفة للمقادير وسنشير بصورة متكررة لهذا المثال التعليمي ونحن نشرح حدود النموذج لدراسة ذات ثلاثة عوامل.

تأثيرات رئيسة

ونعرف التأثيرات الرئيسة في دراسة ذات ثلاثة عوامل بصورة مشابهة لتلك المتعلقة بدراسة ذات عاملين. وهكذا، فإن التأثير الرئيس للمستوى i للعامل A معرف على الشكل:

$$\alpha_i = \mu_{i..} - \mu_{...} \qquad (22.4a)$$

وفي المثال التعليمي في الجدول (٢٢-٢١) لدينا مثلاً:

$$\alpha_i = \mu_{i..} - \mu_{...} = 16.5 - 16$$

جدول (٢٢-١) متوسط زمن التعلّم وفقاً للجنس، والعمر والذكاء (بالدقائق)– مثال تعليمي.

العامل A (الجنس)	الذكاء (العامل C) والعمر (العامل B)											
	IQ مرتفع $k=1$				IQ عادي $k=2$				المتوسط			
	$j=1$ شاب	$j=2.$ كهل	$j=3$ مسن	متوسط	$j=1$ شاب	$j=2.$ كهل	$j=3$ مسن	متوسط	$i=1$ شاب	$i=2.$ كهل	$i=3$ مسن	متوسط
$i=1$	9	12	18	13	19	20	21	20	14	16	19.5	16.5
ذكر	μ_{111}	μ_{121}	μ_{131}	$\mu_{1.1}$	μ_{112}	$\mu_{122.}$	μ_{132}	$\mu_{1.2}$	$\mu_{11.}$	$\mu_{12..}$	$\mu_{13.}$	$\mu_{1..}$
$i=2$	9	10	14	11	19	20	21	20	14	15	17.5	15.5
أنثى	μ_{211}	μ_{221}	μ_{231}	$\mu_{2.1}$	μ_{212}	μ_{222}	μ_{232}	$\mu_{2.2}$	$\mu_{21.}$	$\mu_{22.}$	$\mu_{23.}$	$\mu_{2..}$
المتوسط	9	11	16	12	19	20	21	20	14	15.5	18.5	16
	$\mu_{.11}$	$\mu_{.21}$	$\mu_{.31}$	$\mu_{..1}$	$\mu_{.12}$	$\mu_{.22}$	$\mu_{.32}$	$\mu_{..2}$	$\mu_{.1.}$	$\mu_{.2.}$	$\mu_{.3.}$	$\mu_{...}$

وبصورة مماثلة، نعرف التأثير الرئيس للمستوى j للعامل B:

$$\beta_j = \mu_{.j.} - \mu_{...} \qquad (22.4b)$$

والتأثير الرئيس للمستوى k للعامل C:

$$\gamma_k = \mu_{..k} - \mu_{...} \qquad (22.4c)$$

ونستنتج من هذه التعاريف أن مجاميع التأثيرات الرئيسة صفر:

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = 0 \qquad (22.5)$$

تفاعلات عاملين

تُعرّف تأثيرات تفاعل عاملين في دراسة ذات ثلاثة عوامل بالطريقة نفسها التي عرفناها في دراسة ذات عاملين، باستثناء أن جميع المتوسطات يُحسب متوسطها فوق

العامل الثالث. وهكذا، وكما رأينا في (18.8a)، نعّرف التفاعل ثنائي العامل بين العامل A في مستواه الـ i والعامل B في مستواه الـ j، ونرمز له كما سبق بـ $(\alpha\beta)_{ij}$، كما يلي:

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij.} - \mu_{i..} - \mu_{.j.} + \mu_{...} \quad (22.6a)$$

وفي المثال التعليمي في الجدول (٢٢-١) نجد مثلاً:

$$(\alpha\beta)_{11} = 14 - 16.5 - 14 + 16 = -.5$$

وعلى المنوال نفسه، نعرف التفاعلات ثنائية العامل AC و BC كما يلي:

$$(\alpha\gamma)_{ik} = \mu_{i.k} - \mu_{i..} - \mu_{..k} + \mu_{...} \quad (22.6a)$$

$$(\beta\gamma)_{jk} = \mu_{.jk} - \mu_{.j.} - \mu_{..k} + \mu_{...} \quad (22.6b)$$

وفي الغالب $(\alpha\beta)_{ij}$، $(\alpha\gamma)_{ik}$، $(\beta\gamma)_{jk}$، تدعى التفاعلات ثنائية العامل تفاعلات من المرتبة الأولى. ويمكن البرهان بسهولة على أن مجاميع التفاعلات من المرتبة الأولى فوق كل دليل هو الصفر:

(22.7a) لجميع i $\sum_j(\alpha\beta)_{ij}=0$ ، لجميع j $\sum_i(\alpha\beta)_{ij}=0$

(22.7b) لجميع i $\sum_k(\alpha\gamma)_{ik}=0$ ، لجميع k $\sum_i(\alpha\gamma)_{ik}=0$

(22.7c) لجميع j $\sum_k(\beta\gamma)_{jk}=0$ ، لجميع k $\sum_j(\beta\gamma)_{jk}=0$

تفاعلات ثلاثة عوامل

وكما في دراسة تتضمن عاملين، حيث عرفنا التفاعل بين المستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B بأنه الفرق بين μ_{ij} متوسط المعالجة وبين القيمة التي تتوقعها لهذا المتوسط لو كانت تأثيرات العامل تجميعية، فكذلك نعّرف التفاعل ثلاثي العوامل $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ في دراسة تتضمن ثلاثة عوامل بأنه الفرق بين μ_{ijk} متوسط المعالجة وبين القيمة التي نتوقعها له لوكانت التأثيرات الرئيسة والتفاعلات من المرتبة الأولى كافية للتعبير عن جميع تأثيرات العوامل. والقيمة التي نتوقعها مستخدمين التأثيرات الرئيسة والتفاعلات من المرتبة الأولى عندما يكون العامل A في مستواه الـ i والعامل B في مستواه الـ j، والعامل C في مستواه الـ k هو:

$$\mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} \quad (22.8)$$

وبالتالي نعرف التفاعل ثلاثي العامل $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$، ويدعى، أيضا، التفاعل من المرتبة الثانية، كما يلي:

$$(\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \mu_{ijk} - [\mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} \quad (22.9a)$$

أو بصورة مكافئة:

$$(\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \mu_{ijk} - \mu_{ij.} - \mu_{i.k} - \mu_{.jk} + \mu_{i..} + \mu_{.j.} + \mu_{..k} - \mu_{...} \qquad (22.9b)$$

ومن تعريف التفاعلات ثلاثية العامل نستنتج أنها عندما تجمع فوق أي دليل فإن المجموع الناتج هو الصفر:

$$\sum_i (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0 \qquad \sum_j (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0 \qquad \sum_k (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0 \qquad (22.10)$$

لجميع j,k لجميع i,k لجميع i,j

وإذا كانت جميع التفاعلات ثلاثية العامل صفرا، نقول إنه لا توجد تفاعلات ثلاثية العامل بين العوامل B, A و C. وإذا كانت بعض التفاعلات $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$، على الأقل، غير الصفر، فنقول إن التفاعلات ثلاثية العامل موجودة.

دعنا نجد التفاعل ثلاثي العامل $(\alpha\beta\gamma)_{111}$ للمثال التعليمي في الجدول (٢٢-١)، فذلك يتطلب قيم الحدود التالية:

$$\mu_{...} = 16 \qquad (\alpha\beta)_{11} = 14 - 16.5 - 14 + = -.5$$
$$\alpha_1 = 16.5 - 16 = .5 \qquad (\alpha\gamma)_{11} = 13 - 16.5 - 12 + 16 = .5$$
$$\beta_1 = 14 - 16 = -2 \qquad (\beta\gamma)_{11} = 9 - 14 - 12 + 16 = -1$$
$$\gamma_1 = 12 - 16 = -4 \qquad \mu_{111} = 9$$

وبالتالي نجد:

$$\alpha\beta\gamma)_{111} = 9 - (16 + .5 - 2 - 4 - .5 + .5 - 1) = -.5$$

وبما أن $(\alpha\beta\gamma)_{111}$ غير الصفر، فنعلم فورا أن التفاعلات ثلاثية العامل موجودة في هذا المثال.

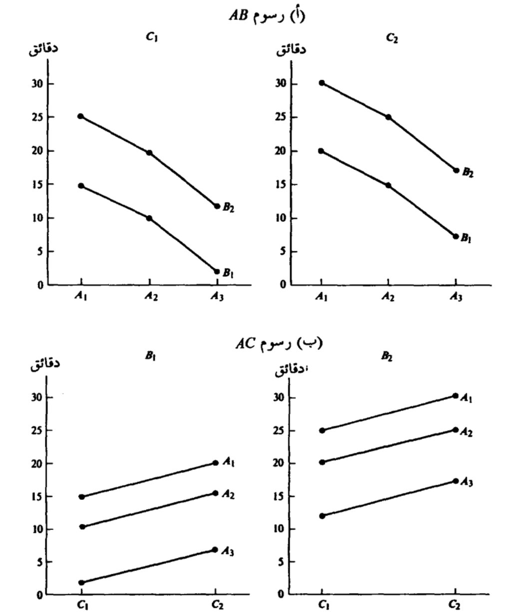
تفسير التفاعلات في دراسات تتضمن ثلاثة عوامل

ولإلقاء الضوء على طبيعة التفاعلات في دراسات تتضمن ثلاثة عوامل، سندرس بعض الأمثلة باستخدام جداول وخطوط بيانية، مبتدئين بتأثيرات عامل، وهو جدّ بسيط، ومتدرجين إلى المعقد وهو تأثيرات تفاعل ثلاثي العوامل. ونقدم في كل مثال المتوسطات الحقيقية للمعالجة μ_{ijk}.

مثال ١ـ تأثيرات رئيسة، فقط. يوضح الشكل (٢٢-١) حالة توجد فيها تأثيرات رئيسة لـ C, B, A دون وجود تفاعلات من أي نوع. ومنحنيات الاستجابة AB في الشكل (٢٢-١)آ هي رسوم بيانية لمتوسطات المعالجات في مقابل C. وتعكس ميول المنحنيات AB غير المساوية للصفر التأثيرات الرئيسة لـ A. وتعكس الفروق في ارتفاعات المنحنيات AB ضمن كل لوحة من لوحات الشكل (٢٢-١)آ التأثيرات

الرئيسة لـ B، أما التأثيرات الرئيسة لـ C فتعكسها المنحنيات المتقابلة في اللوحتين من حيث اختلاف ارتفاعاتها.

شكل (٢٢-١) التأثيرات الرئيسة لـ A , B و C بدون تفاعلات.



وغياب التفاعلات AB مبيّن من خلال توازي منحنيات الاستجابة في كل لوحة. ونعلم من دراستنا لعاملين أن توازي منحنيات الاستجابة يتضمن غياب التفاعلات. وهنا يتضمن توازي منحنيات الاستجابة ضمن كل لوحة:

١- التفاعلات $(\alpha\beta)_{ij}$ بين العاملين B , A تساوي الصفر.

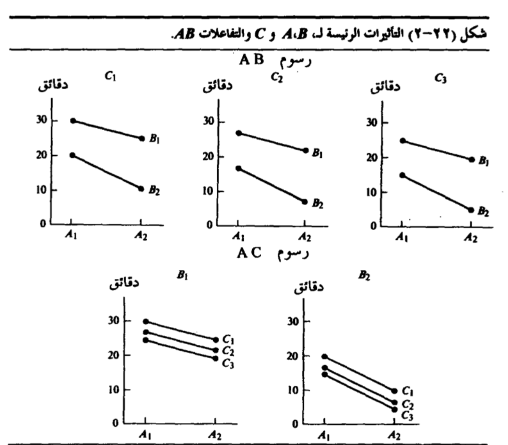
٢- التفاعلات $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ بين العوامل C, B , A تساوي الصفر.

ويصبح غياب التفاعلين BC و AC في هذا المثال واضحا عند رسم منحني استجابة BC ومنحني استجابة AC مقابل A و B، على الترتيب. وهكذا يبين الشكل (٢٢-١)ب متوسطات المعالجات نفسها μ_{ijk} حيث رُسمت منحنيات استجابة AC في مقابل B، لاحظ أن هذه المنحنيات متوازية في كل لوحة مما يعني أن التفاعلات AC صفر.

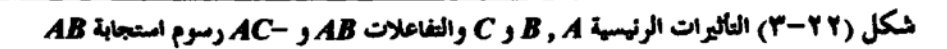
مثال ٢- التأثيرات الرئيسة والتفاعلات AB. يوضح الشكل (٢٢-٢) حالة توجد فيها التأثيرات الرئيسة لكل من A و B و C والتفاعلات AB دون غيرها من التفاعلات. لاحظ أن منحنيي استجابة AB في كل لوحة من الشكل (٢٢-٢)آ لم يعودا متوازيين، مما يعكس وجود التفاعلات AB. وعلى أي حال، فإن المنحنيات الأعلى في اللوحات الثلاث متوازية، وكذلك الأمر بالنسبة للمنحنيات الدنيا وهذا يتضمن أنه عندما تُرسم المنحنيات AC في مقابل B فستكون منحنيات استجابة AC ضمن كل لوحة متوازية. وهذا مبين في الشكل (٢٢-٢)ب، الذي يشمل متوسطات المعالجة نفسها التي يشملها الشكل (٢٢-٢)آ. وتوازي منحنيات استجابة AC ضمن كل لوحة في الشكل (٢٢-٢)ب، يعني بدوره عدم وجود التفاعلات AC، بالاضافة إلى عدم وجود التفاعلات ABC، أي أن $(\alpha\gamma)_{ik}$ جميعها تساوي الصفر، و$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ جميعها تساوي الصفر.

وهكذا، إذا كانت منحنيات استجابة $AB(BC,AC)$ المقابلة لأي مستوى معطى للعامل $C(A,B)$ متوازية من أجل جميع مستويات $C(A,B)$ كما في الشكل (٢٢-٢)آ، مع أن منحنيات الاستجابة ضمن لوحة بمفردها غير متوازية، فهذا يعني عدم وجود تفاعلات ثلاثية العامل.

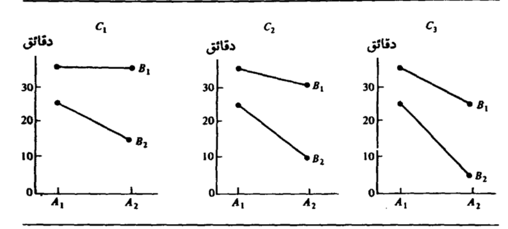
شكل (٢٢-٢) التأثيرات الرئيسة لـ A، B و C والتفاعلات AB.



مثال ٣- التأثيرات الرئيسة والتفاعلات AB و AC. وعلى أي حال، فإن هذا لايعني أن غياب التوازي سواء ضمن لوحة أو بين لوحتين يتضمن وجود تفاعلات ثلاثية العامل. ويعرض الشكل (٢٢-٣) حالة تكون فيها التأثيرات الرئيسة AB، و C والتفاعلات ثنائية العامل AB و AC موجودة ولكن لا يوجد أي تفاعلات ثلاثية العامل، مع أن منحنيات الاستجابة غير متوازية لاضمن اللوحة الواحدة ولا بين اللوحات. وتعكس واقعة أن منحنيات الاستجابة AB في حضور المستوى للعامل B غير متوازية من أجل المستويات الثلاثة للعامل C وجود التفاعلات AC . وغياب التوازي بين منحنيات استجابة AB ضمن كل لوحة يعكس وجود التفاعلات AB. ولاحظ، على أي حال، أن الفروق $\mu_{11k} - \mu_{12k}$ تبقى نفسها من أجل جميع مستويات العامل C، وكذلك الأمر بالنسبة للفروق $\mu_{21k} - \mu_{22k}$ وبالتالي لا توجد تفاعلات ثلاثية العامل.



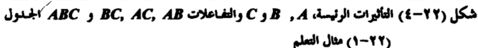
شكل (٢٢-٣) التأثيرات الرئيسية A , B و C والتفاعلات AB و AC– رسوم استجابة AB



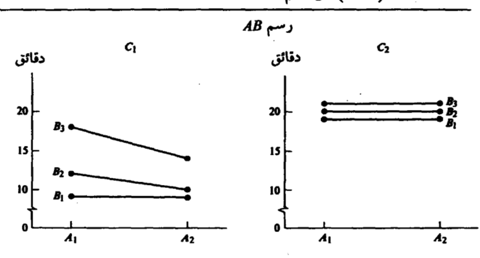
مثال ٤– التأثيرات الرئيسة والتفاعلات BC, AC, AB و ABC. يبين الشكل (٢٢-٤) رسوم استجابة AB من أجل المستويات المختلفة للعامل C، وذلك في حالة المثال التعليمي في الجدول (٢٢-١) لتأثيرات الجنس والعمر والذكاء على زمن التعلّم. وتعكس رسوم متوسطات المعالجات في الشكل (٢٢-٤)، كما رأينا سابقا، وجود تأثيرات رئيسة وتفاعلات من المرتبة الأولى ومن المرتبة الثانية. وبصورة خاصة، يبين الشكل (٢٢-٤) أنه في حالة أشخاص بمستوى IQ عادي، لايكون للجنس تأثير على متوسط زمن التعلّم، ويكون للعمر تأثير بسيط، فقط، مما يؤدي الى أزمنة تعلّم أطول قليلاً لكبار السن. وعلى الوجه الآخر، نجد في حالة أشخاص بمستوى IQ مرتفع، أن الإناث يميلون إلى التعلم بسرعة أكبر من الذكور بالنسبة لكبار السن، فقط، وليس بالنسبة للفتية، وأن كبار السن يتطلبون أزمنة تعلم أطول بكثير مما يتطلبه الفتية.

ملاحظة

إذا كان من الصعب فهم التفاعلات ثلاثية العوامل ، فإن التفاعلات من مرتبة أعلى مثل التفاعلات رباعية العوامل هي، أيضا، أكثر إبهاما، ومن حسن الحظ أننا غالبا مانجد في الواقع العملي أن هذه التفاعلات من مرتبة أعلى صغيرة تماما أو غير موجودة. وعندما تكون الحالة كذلك، فيمكن إغفالها عند تحليل تأثيرات العوامل.



شكل (٢٢-٤) التأثيرات الرئيسة، A ، B و C والتفاعلات AB, AC, BC و ABC الجدول (٢٢-١) مثال التعلم



نموذج متوسطات الخلايا

لتكن Y_{ijkm} المشاهدة الـ $m(m=1,..., n)$ للمعالجة المؤلفة من المستوى i للعامل $A(i = 1,...,a)$ ، والمستوى j للعامل $B(j=1,...,b)$، والمستوى k للعامل $C(k=1,...,c)$.
وهكذا يكون العدد الكلي للمشاهدات في الدراسة:

$$n_T = nabc \tag{22.11}$$

ونموذج التحاين لدراسة تتضمن ثلاثة عوامل بدلالة متوسطات الخلايا (المعالجات) μ_{ijk} ، مع مستويات مثبتة لكل عامل هو:

$$Y_{ijkm} = \mu_{ijk} + \varepsilon_{ijkm} \tag{22.12}$$

حيث:

μ_{ijk} هي معالم.

ε_{ijkm} مستقلة وكل منها $N(0, \sigma^2)$

$i = 1,..., a\,; j = 1,..., b\,; k = 1,..., c\,; m = 1,..., n$

نموذج تأثيرات عامل

ويمكن تطوير نموذج مكافىء لتأثيرات عامل، ويستوعب البنية العاملية، من خلال التعبير عن متوسطات المعالجات μ_{ijk} بدلالة التأثيرات المختلفة للعوامل. ومن تعريف التفاعل ثلاثي العامل (22.9a) ، نجد المطابقة:

$$\mu_{ijk} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \quad (22.13)$$

حيث:

$$\mu_{...} = \frac{\sum\sum\sum \mu_{ijk}}{abc}$$
$$\alpha_i = \mu_{i..} - \mu_{...}$$
$$\beta_j = \mu_{.j.} - \mu_{...}$$
$$\gamma_k = \mu_{..k} - \mu_{...}$$
$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij.} - \mu_{i..} - \mu_{.j.} + \mu_{...}$$
$$(\alpha\gamma)_{ik} = \mu_{i.k} - \mu_{i..} - \mu_{..k} + \mu_{...}$$
$$(\beta\gamma)_{jk} = \mu_{.jk} - \mu_{.j.} - \mu_{..k} + \mu_{...}$$
$$(\alpha\beta\gamma)_{ik} = \mu_{ijk} - \mu_{ij.} - \mu_{i.k} + \mu_{.jk} + \mu_{i..} + \mu_{.j.} + \mu_{..k} + \mu_{...}$$

وبالتالي يكون نموذج تحاين تأثيرات عامل المكافيء في دراسة تتضمن ثلاثة عوامل:

$$Y_{ijkm} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkm} \quad (22.14)$$

حيث:

ε_{ijkm} مستقلة و$N(0, \sigma^2)$

α_i, β_j, γ_k, $(\alpha\beta)_{ij}$, $(\alpha\gamma)_{ik}$, $(\beta\gamma)_{jk}$, $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ ثوابت خاضعة للقيود:

$$\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = \sum_k \gamma_k = 0$$
$$\sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_j (\alpha\beta)_{ij} = \sum_i (\alpha\gamma)_{ik} = 0$$
$$\sum_k (\alpha\gamma)_{ik} = \sum_j (\beta\gamma)_{ik} = \sum_k (\beta\gamma)_{ik} = 0$$
$$\sum_i (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \sum_j (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = \sum_k (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$$

ونموذج متوسطات الخلايا (22.12) ونموذج تأثيرات عامل المكافيء هما نموذجان خطيان، تماما كما في حالة عاملين. وسنوضح ذلك لاحقا في هذا الفصل من خلال مثال.

(٢٢-٢) تحليل التباين

رموز

رموز مجاميع ومتوسطات عينة هي تعميم مباشر لتلك في حالة دراسات تتضمن عاملين. وكالمعتاد، تشير النقطة الملحقة كدليل إلى عملية جمع أو عملية أخذ متوسط فوق الدليل الذي حلت محله النقطة. ولدينا:

$$Y_{ijk.} = \sum_{m} Y_{ijkm} \qquad \bar{Y}_{ijk.} = \frac{Y_{ijk.}}{n} \qquad (22.15a)$$

$$Y_{ij..} = \sum_{k}\sum_{m} Y_{ijkm} \qquad \bar{Y}_{ij..} = \frac{Y_{ij..}}{cn} \qquad (22.15b)$$

$$Y_{i.k.} = \sum_{j}\sum_{m} Y_{ijkm} \qquad \bar{Y}_{i.k.} = \frac{Y_{i.k.}}{bn} \qquad (22.15c)$$

$$Y_{.jk.} = \sum_{i}\sum_{m} Y_{ijkm} \qquad \bar{Y}_{.jk.} = \frac{Y_{.jk.}}{an} \qquad (22.15d)$$

$$Y_{i...} = \sum_{j}\sum_{k}\sum_{m} Y_{ijkm} \qquad \bar{Y}_{i...} = \frac{Y_{i...}}{bcn} \qquad (22.15e)$$

$$Y_{.j..} = \sum_{i}\sum_{k}\sum_{m} Y_{ijkm} \qquad \bar{Y}_{.j..} = \frac{Y_{.j..}}{acn} \qquad (22.15f)$$

$$Y_{..k.} = \sum_{i}\sum_{j}\sum_{m} Y_{ijkm} \qquad \bar{Y}_{..k.} = \frac{Y_{..k.}}{abn} \qquad (22.15g)$$

$$Y_{....} = \sum_{i}\sum_{j}\sum_{k}\sum_{m} Y_{ijkm} \qquad \bar{Y}_{....} = \frac{Y_{....}}{abcn} \qquad (22.15h)$$

مثال. يوضح الجدول (٢٢-٢) هذه الرموز لدراسة تأثيرات الجنس، وشحوم الجسم، وتاريخ التدخين على مدى الأهلية لإجراء تمارين في اختبار شدة لأشخاص تتراوح أعمارهم بين 25 إلى 35 سنة. ولكل من العوامل الثلاثة مستويان، وتوجد ثلاثة تكرارات لكل معالجة. الجداول (٢٢-٢)آ، ب، و جـ، تبين على الترتيب، البيانات، والمجاميع، والمتوسطات، بالإضافة إلى الرموز المقابلة لها. وسنحلل هذا البيان بالكامل فيما بعد.

توفيق نموذج تحاين

عند توفيق نموذج متوسطات الخلايا (22.12) بطريقة المربعات الدنيا، نجد كالمعتاد أن المقدرات هي متوسطات المعالجات المقدّرة:

$$\hat{\mu}_{ijk} = \bar{Y}_{ijk.} \qquad (22.16)$$

جدول (٢٢-٢) مشاهدات العينة، المجاميع، والمتوسطات لدراسة تتضمن ثلاثة عوامل مثال اختبار الشدة

(أ) البيانات

	تاريخ التدخين $k = 1$	$k = 2$
معدل شحوم مرتفع $j = 1$		
ذكر $i = 1$	$24(Y_{1111})$	$18(Y_{1121})$
	$29(Y_{1112})$	$19(Y_{1122})$
	$25(Y_{1113})$	$23(Y_{1123})$
أنثى $i = 2$	$20(Y_{2111})$	$15(Y_{2121})$
	$22(Y_{2112})$	$10(Y_{2122})$
	$18(Y_{2113})$	$11(Y_{2123})$
معدل شحوم منخفض $j = 2$		
ذكور $i = 1$	$15(Y_{1211})$	$15(Y_{1221})$
	$15(Y_{1212})$	$20(Y_{1222})$
	$12(Y_{1213})$	$13(Y_{1223})$
أنثى $i = 2$	$16(Y_{2211})$	$10(Y_{2221})$
	$9(Y_{2212})$	$14(Y_{2222})$
	$11(Y_{2213})$	$6(Y_{2223})$

(ب) مجاميع

	$k = 1$	$k = 2$	جميع k
$j = 1$:			
$i = 1$	$78(Y_{111.})$	$60(Y_{112.})$	$138(Y_{11..})$
$i = 2$	$60(Y_{211.})$	$36(Y_{212.})$	$96(Y_{21..})$
جميع i	$138(Y_{.11.})$	$96(Y_{.12.})$	$234(Y_{.1..})$
$j = 2$:			
$i = 1$	$42(Y_{121.})$	$48(Y_{122.})$	$90(Y_{12..})$
$i = 2$	$36(Y_{221.})$	$30(Y_{222.})$	$66(Y_{22..})$
جميع i	$78(Y_{.21.})$	$78(Y_{.22.})$	$156(Y_{.2..})$
جميع j:			
$i = 1$	$120(Y_{1.1.})$	$108(Y_{1.2.})$	$228(Y_{1...})$
$i = 2$	$96(Y_{2.1.})$	$66(Y_{2.2.})$	$162(Y_{2...})$
جميع i	$216(Y_{..1.})$	$174(Y_{..2.})$	$390(Y_{....})$

(ج) متوسطات

$j = 1$	$k = 1$	$k = 2$	جميع k
$j = 1$:			
$i = 1$	$26(\bar{Y}_{111.})$	$20(\bar{Y}_{112.})$	$23(\bar{Y}_{11..})$
$i = 2$	$20(\bar{Y}_{211.})$	$12(\bar{Y}_{212.})$	$16(\bar{Y}_{21..})$
جميع i	$23(\bar{Y}_{.11.})$	$16(\bar{Y}_{.12.})$	$19.5(\bar{Y}_{.1..})$
$j = 2$:			
$i = 1$	$14(\bar{Y}_{121.})$	$16(\bar{Y}_{122.})$	$15(\bar{Y}_{12..})$
$i = 2$	$12(\bar{Y}_{221.})$	$10(\bar{Y}_{222.})$	$11(\bar{Y}_{22..})$
جميع i	$13(\bar{Y}_{.21.})$	$16(\bar{Y}_{.22.})$	$13(\bar{Y}_{.2..})$
جميع j:			
$i = 1$	$20(\bar{Y}_{1.1.})$	$18(\bar{Y}_{1.2.})$	$19(\bar{Y}_{1...})$
$i = 2$	$16(\bar{Y}_{2.1.})$	$11(\bar{Y}_{2.2.})$	$13.5(\bar{Y}_{2...})$
جميع i	$18(\bar{Y}_{..1.})$	$14.5(\bar{Y}_{..2.})$	$16.25(\bar{Y}_{....})$

وهكذا تكون القيم التوفيقية للمشاهدات هي متوسطات المعالجات المقدّرة:

$$\hat{Y}_{ijkm} = \hat{\mu}_{ijk} = \overline{Y}_{ijk.} \qquad (22.17)$$

والرواسب هي انحرافات القيم المشاهدة عن متوسطات المعالجات المقدرة:

$$e_{ijkm} = Y_{ijkm} - \hat{Y}_{ijkm} = Y_{ijkm} - \overline{Y}_{ijk.} \qquad (22.18)$$

أما مقدرات المربعات الدنيا للمعالم في نموذج تأثيرات العامل المكافىء (22.14) فهي كما يلي:

	المعلمة	المقدّر
(22.19a)	$\mu_{..}$	$\hat{\mu}_{..} = \overline{Y}_{....}$
(22.19b)	α_i	$\hat{\alpha}_i = \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{....}$
(22.19c)	β_j	$\hat{\beta}_j = \overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{....}$
(22.19d)	γ_k	$\hat{\gamma}_k = \overline{Y}_{..k.} - \overline{Y}_{....}$
(22.19e)	$(\alpha\beta)_{ij}$	$\widehat{(\alpha\beta)}_{ij} = \overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{.j..} + \overline{Y}_{....}$
(22.19f)	$(\alpha\gamma)_{ik}$	$\widehat{(\alpha\gamma)}_{ik} = \overline{Y}_{i.k.} - \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{..k.} + \overline{Y}_{....}$
(22.19g)	$(\beta\gamma)_{jk}$	$\widehat{(\beta\gamma)}_{jk} = \overline{Y}_{.jk.} - \overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{..k.} + \overline{Y}_{....}$
(22.19h)	$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$	$\widehat{(\alpha\beta\gamma)}_{ijk} = \overline{Y}_{ijk.} - \overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i.k.} - \overline{Y}_{.jk.} + \overline{Y}_{i...} + \overline{Y}_{.j..} + \overline{Y}_{..k.} - \overline{Y}_{....}$

والقيم التوفيقية والرواسب لنموذج تأثيرات العامل (22.14) تبقى نفسها تماما كما في نموذج متوسطات الخلايا (22.12)، الحالة التي وجدناها ،أيضا، في دراسات تتضمن عاملين.

تجزيء مجموع المربعات الكلي

مع تجاهل البنية العاملية للدراسة واعتبارها ببساطة متضمنة لـ abc من المعالجات، نحصل على التجزيء المعتاد لمجموع المربعات الكلي:

$$SSTO = SSTR + SSE \qquad (22.20)$$

حيث:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m (Y_{ijkm} - \overline{Y}_{....})^2 \qquad (22.20a)$$

$$SSTR = n \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m (\overline{Y}_{ijk.} - \overline{Y}_{....})^2 \qquad (22.20b)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m (Y_{ijkm} - \overline{Y}_{ijk.})^2 = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m e_{ijkm}^2 \qquad (22.20c)$$

لنعتبر الآن انحراف متوسط المعالجة المقدّر $(\overline{Y}_{ijk.} - \overline{Y}_{....})$ الذي يظهر في *SSTR*، فيمكن التعبير عنه بدلالة مقدرات المربعات الدنيا (22.19) للتأثيرات الرئيسة وللتفاعلات ثنائية وثلاثية العامل:

$$\underbrace{\overline{Y}_{ijk.} - \overline{Y}_{....}}_{\text{انحراف متوسط المعالجة المقدّر}} = \underbrace{\overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{....}}_{\text{تأثير رئيسي}} + \underbrace{\overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{....}}_{\text{تأثير رئيسي}} + \underbrace{\overline{Y}_{..k.} - \overline{Y}_{....}}_{\text{تأثير رئيسي}} + \underbrace{\overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{.j..} + \overline{Y}_{....}}_{\text{تفاعل}}$$

$$+ \underbrace{\overline{Y}_{i.k.} - \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{..k.} + \overline{Y}_{....}}_{\text{تأثير تفاعل}} + \underbrace{\overline{Y}_{.jk.} - \overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{..k.} + \overline{Y}_{....}}_{\text{تأثير تفاعل}}$$

$$+ \underbrace{\overline{Y}_{ijk.} - \overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i.k.} - \overline{Y}_{.jk.} + \overline{Y}_{i...} + \overline{Y}_{.j..} + \overline{Y}_{..k.} - \overline{Y}_{....}}_{\text{تأثير تفاعل}}$$

وعند تربيع الطرفين والجمع فوق i ، j ، k و m، تسقط جميع الحدود الجدائية ونحصل على:

$$SSTR = SSA + SSB + SSC + SSAB + SSAC + SSBC + SSABC \qquad (22.21)$$

حيث:

$$SSA = nbc \sum_i (\overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{....})^2 \qquad (22.21a)$$

$$SSB = nac \sum_j (\overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{....})^2 \qquad (22.21b)$$

$$SSC = nab \sum_k (\overline{Y}_{..k.} - \overline{Y}_{....})^2 \qquad (22.21c)$$

$$SSAB = nc \sum_i \sum_j (\overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{.j..} + \overline{Y}_{....})^2 \qquad (22.21d)$$

$$SSAC = nb \sum_i \sum_k (\overline{Y}_{i.k.} - \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{..k.} + \overline{Y}_{....})^2 \qquad (22.21e)$$

$$SSBC = na \sum_j \sum_k (\overline{Y}_{.jk.} - \overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{..k.} + \overline{Y}_{....})^2 \qquad (22.21f)$$

$$SSABC = n \sum_i \sum_j \sum_k (\overline{Y}_{ijk.} - \overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i.k.} - \overline{Y}_{.jk.} + \overline{Y}_{i...} + \overline{Y}_{.j..} + \overline{Y}_{..k.} - \overline{Y}_{....})^2 \qquad (22.21g)$$

ومن (22.20) و(22.21) نكون قد أثبتنا هكذا التحليل المتعامد:

$$SSTO = SSA + SSB + SSC + SSAB + SSAC + SSBC + SSABC + SSE \quad (22.22)$$

حيث، SSA ، SSB و SSC هي مجاميع المربعات المعتادة للتأثيرات الرئيسة. وعلى سبيل المثال، كلما كانت تأثيرات B الرئيسة المقدّرة ($\overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{....}$) كبيرة (بالقيم المطلقة) ، كلما كان SSB كبيرا.

و$SSAB$ ، $SSAC$ و $SSBC$ هي مجاميع مربعات التفاعلات ثنائية العامل المعتادة.

وعلى سبيل المثال، كلما كانت التفاعلات AB المقدّرة ($\overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{.j..} + \overline{Y}_{....}$) كبيرة (بالقيمة المطلقة)، كلما كان $SSAB$ كبيرا.

وأخيرا، $SSABC$ هو مجموع مربعات التفاعل ثلاثي العامل. وكلما كانت هذه التفاعلات ثلاثية العامل المقدرة كبيرة (بالقيمة المطلقة)، كلما كان $SSABC$ كبيرا.

صيغ حسابية. وفي الظروف الخاصة التي تجري فيها الحسابات يدويا، يكون استخدام الصيغ التعريفية المعطاة سابقا معقدا، وتتبع الصيغ الحسابية لحالة ثلاثة عوامل نفس نموذج صيغ العاملين:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m Y_{ijkm}^2 - \frac{Y_{ijk.}^2}{n} \quad (22.23a)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m Y_{ijkm}^2 - \sum_i \sum_j \sum_k \frac{Y_{ijk.}^2}{n} \quad (22.23b)$$

$$SSA = \frac{\sum_i Y_{i...}^2}{nbc} - \frac{Y_{....}^2}{nabc} \quad (22.23c)$$

$$SSB = \frac{\sum_j Y_{.j..}^2}{nac} - \frac{Y_{....}^2}{nabc} \quad (22.23d)$$

$$SSC = \frac{\sum_k Y_{..k.}^2}{nab} - \frac{Y_{....}^2}{nabc} \quad (22.23e)$$

ويمكن الحصول على مجموع مربعات التفاعل ثنائي العامل $SSAB$ من خلال التعامل مع المتوسطات $\overline{Y}_{ij..}$ واعتبار هذه المتوسطات وعددها ab متوسطا أساسا لدراسة تتضمن عاملين و "مجموع مربعات المعالجات "لهذه الدراسة بعاملين، وسنرمز لها بـ $SSTR\ (A,B)$ هو كالمعتاد:

$$SSTR(A,B) = nc\sum_i\sum_j(\overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{....})^2 = \frac{\sum_i\sum_j Y_{ij..}^2}{nc} - \frac{Y_{....}^2}{nabc} \qquad (22.24)$$

ويمكن تبيان أن:

$$SSTR(A, B) = SSA + SSB + SSAB \qquad (22.25)$$

وبالتالي يمكن إيجاد $SSAB$ بالطرح:

$$SSAB = SSTR(A, B) - SSA - SSB \qquad (22.26a)$$

وبصورة مماثلة نجد $SSAC$ و $SSBC$ كما يلي:

$$SSAC = SSTR(A, C) - SSA - SSC \qquad (22.26b)$$

$$SSBC = SSTR(B, C) - SSB - SSC \qquad (22.26c)$$

حيث:

$$SSTR(A,C) = \frac{\sum_i\sum_k Y_{i.k.}^2}{nb} - \frac{Y_{....}^2}{nabc} \qquad (22.26d)$$

$$SSTR(B,C) = \frac{\sum_j\sum_k Y_{.jk.}^2}{na} - \frac{Y_{....}^2}{nabc} \qquad (22.26e)$$

ونحصل على مجموع مربعات التفاعل ثلاثي العامل بالطرح:

$$SSABC = SSTO - SSE - SSA - SSB - SSC - SSAB - SSAC - SSBC \qquad (22.27)$$

ملاحظة

يمكن تعميم الصيغ الحسابية السابقة بسهولة في حال دراسة أكثر من ثلاثة عوامل في آن واحد، إلا أن حزم الحاسب ستُستخدم عادة في ظروف كهذه.

درجات الحرية ومتوسط المربعات

يتضمن الجدول (٢٢-٣) جدول التحاين العام لنموذج الثلاثة عوامل (22.14). ودرجات الحرية للتأثير الرئيس ومجاميع مربعات تفاعل ثنائي العامل تتفق مع تلك الخاصة بدراسات تتضمن عاملين. ونحصل على عدد درجات الحرية المقابل لـ $SSABC$ بالطرح وهو يمثل عدد العلاقات الخطية المستقلة بين جميع حدود التفاعل $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$.

وتوقع متوسط المربعات معطى، أيضا، في الجدول (٢٢-٣). لاحظ أن توقعات كل من MSA, MSB, MSC, $MSAB$, $MSAC$, $MSBC$ و $MSABC$ يساوي σ^2 إذا لم يكن هناك تأثير للعامل من النوع الذي يعكسه متوسط المربعات. وإذا كانت مثل هذه

التأثيرات موجودة، فلكل متوسط مربعات توقع يتجاوز σ^2 . وكالمعتـاد، فـإن $E\{MSE\} =$ σ^2 دوما، وبالتالي، فإن اختبار تأثـيرات عـامل يتـألف مـن مقارنـة متوسـط المربعـات المناسب مع MSE باستخدام إحصـاءة الاختبـار F^* وتشـير القيـم الكبـيرة لـ F^* إلى وجود تأثير عامل.

وفي الجدول (٢٢ـ٥) نجد جدول التحاين لمثال اختبار الشدة الذي يتضمن ثلاثـة عوامل (التفاصيل الحسابية غير معطاة).

اختبارات تأثيرات عامل

تتبع جميع الاختبارات المختلفة لتأثيرات عامل النمط نفسه؛ ونوضحها من خلال اختبار تفاعلات ثلاثية العامل. البدائل هي:

$$\begin{aligned} H_0&: \text{جميع } (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \text{ مساوية للصفر} \\ H_a&: \text{ليست جميع } (\alpha\beta\gamma)_{ijk} \text{ تساوي الصفر} \end{aligned} \tag{22.28a}$$

وإحصاءة الاختبار المناسبة هي:

$$F^* = \frac{MSABC}{MSE} \tag{22.28b}$$

وإذا كانت H_0 صحيحة، فإن F^* يتبع التوزيع F بـ $(a-1)(b-1)(c-1)$ درجـة من الحرية في البسط و $abc(n-1)$ درجة من الحريـة في المقـام، وهكـذا تكـون قـاعدة القرار مع ضبط الخطأ من النوع الأول عند المستوى α :

إذا كان $F^* \leq F[1-\alpha; (a-1)(b-1)(c-1), (n-1)abc]$، استنتج H_0

إذا كان $F^* > F[1-\alpha; (a-1)(b-1)(c-1), (n-1)abc]$ ، استنتج H_a

ويحتوي الجدول (٢٢ـ٤)على إحصـاءات الاختبـار المناسـبة ومئينـات التوزيـع F لمختلف الاختبارات الممكنة في دراسة ثلاثية العوامل.

جدول (٢٢-٣) جدول تباين عام لدراسة تتضمن ثلاثة عوامل مع مستويات عامل مثبتة.

مصدر التغير	SS	df	MS	E{MS}
ما بين المعالجات	SSTR	abc - 1	MSTR	$\sigma^2 + \frac{n\sum\sum\sum(\mu_{ijk} - \mu_{...})^2}{abc-1}$
عامل A	SSA	a - 1	MSA	$\sigma^2 + \frac{bcn}{a-1}\sum\alpha_i^2$
عامل B	SSB	b - 1	MSB	$\sigma^2 + \frac{acn}{b-1}\sum\beta_j^2$
عامل C	SSC	c - 1	MSC	$\sigma^2 + \frac{abn}{c-1}\sum\gamma_k^2$
التفاعلات AB	SSAB	(a - 1)(b - 1)	MSAB	$\sigma^2 + \frac{cn}{(a-1)(b-1)}\sum\sum(\alpha\beta)_{ij}^2$
التفاعلات AC	SSAC	(a - 1)(c - 1)	MSAC	$\sigma^2 + \frac{bn}{(a-1)(c-1)}\sum\sum(\alpha\gamma)_{ik}^2$
التفاعلات BC	SSBC	(b - 1)(c - 1)	MSBC	$\sigma^2 + \frac{an}{(b-1)(c-1)}\sum\sum(\beta\gamma)_{jk}^2$
التفاعلات ABC	SSABC	(a-1)(b-1)(c-1)	MSABC	$\sigma^2 + \frac{n}{(a-1)(b-1)(c-1)}\sum\sum(\alpha\beta\gamma)_{ijk}^2$
الخطأ	SSE	abc(n-1)	MSE	σ^2
المجموع	SSTO	abcn - 1		

ملاحظة: انظر (22.13) حيث نعرف المعالم الواردة في العمود الأخير.

تعليقات

١ ـ عندما تتضمن عائلة الاختبارات مجموعة مركبة من سبعة اختبارات فيها ثلاثة اختبارات حول التأثيرات الرئيسة وثلاثة حول التفاعلات ثنائية العامل واختبار واحد للتفاعل ثلاثي العوامل، تكون متباينة كيمبل في حالة مستوى معنوية عائلي α:

$$\alpha < 1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \dots (1 - \alpha_7) \qquad (22.29)$$

حيث α_i مستوى المعنوية للاختبار i.

٢ ـ إذا كانت التفاعلات ثلاثية العامل (وربما، أيضا، بضعا من التفاعلات ثنائية العامل) مساوية للصفر، فيبرز أحيانا التساؤل عما إذا كان ينبغي دمج مجاميع المربعات مع مجموع مربعات الخطأ. ومناقشتنا السابقة حول تحسين نموذج التحاين (فقرة ١٨ـ٩) قابلة للتطبيق هنا، أيضا.

٣ ـ إذا كانت هناك مشاهدة واحدة، فقط، لكل معالجة في دراسة تتضمن ثلاثة عوامل مع مستويات عامل مثبتة، فيمكن القيام باختبارات تحليل التباين، فقط، إذا أمكن الافتراض بأن بعض التفاعلات تساوي الصفر. ومن الأرجح عادة أن تكون التفاعلات المساوية للصفر، هي التفاعلات ثلاثية العامل. وإذا أمكن الافتراض بأن جميع التفاعلات ثلاثية العامل مساوية للصفر، فإن توقع $MSAB$ يكون σ^2 وهو يلعب دور متوسط مربعات الخطأ MSE. وتُحسب جميع متوسطات المربعات بالطريقة المعتادة، باستثناء أن $n = 1$.

٤ ـ يمكن الحصول على إحصاءات الاختبارات F^* في الجدول (٢٢ـ٤) باستخدام طريقة الاختبار الخطي العام الموضحة في الفصل الثالث. وعلى سبيل المثال، لاختبار ما إذا كانت التفاعلات ثلاثية العامل صفرا، فالبدائل هي تلك المذكورة في (22.28a) والنموذج التام هو ذلك المذكور في (22.14)، والنموذج المخفض تحت H_0: $(\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$ هو:

$$Y_{ijkm} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{ik} + \varepsilon_{ijkm} \qquad (20.30)$$

جدول (٢٢-٤) إحصاءات الاختبارات لدراسة تتضمن ثلاثة عوامل مع مستويات عامل مثبتة.

البدائل	احصاءة الاختبار	المئين
H_0 : جميع التأثيرات $\alpha_i = 0$ H_a :ليس جميع التأثيرات $\alpha_i = 0$	$F^* = \frac{MSA}{MSE}$	$F[1-\alpha; a-1, (n-1)abc]$
H_0 : جميع التأثيرات $\beta_j = 0$ H_a :ليس جميع التأثيرات $\beta_j = 0$	$F^* = \frac{MSB}{MSE}$	$F[1-\alpha; b-1, (n-1)abc]$
H_0 : جميع التأثيرات $\gamma_k = 0$ H_a :ليس جميع التأثيرات $\gamma_k = 0$	$F^* = \frac{MSC}{MSE}$	$F[1-\alpha; c-1, (n-1)abc]$
H_0 : جميع التأثيرات $(\alpha\beta)_{ij} = 0$ H_a :ليس جميع التأثيرات $(\alpha\beta)_{ij} = 0$	$F^* = \frac{MSAB}{MSE}$	$F[1-\alpha; (a-1)(b-1)(c-1), (n-1)abc]$
H_0 : جميع التأثيرات $(\alpha\gamma)_{ik} = 0$ H_a :ليس جميع التأثيرات $(\alpha\gamma)_{ik} = 0$	$F^* = \frac{MSAC}{MSE}$	$F[1-\alpha; (a-1)(c-1), (n-1)abc]$
H_0 : جميع التأثيرات $(\beta\gamma)_{jk} = 0$ H_a :ليس جميع التأثيرات $(\beta\gamma)_{jk} = 0$	$F^* = \frac{MSBC}{MSE}$	$F[1-\alpha; (b-1)(c-1), (n-1)abc]$
H_0 : جميع التأثيرات $(\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$ H_a :ليس جميع التأثيرات $(\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$	$F^* = \frac{MSABC}{MSE}$	$F[1-\alpha; (a-1)(b-1)(c-1), (n-1)abc]$

(٢٢-٣) تقويم مصداقية نموذج التحاين

لا تبرز مشاكل جديدة في اختبار مصداقية نموذج تحليل التباين بثلاثة عوامل. فيمكن اختبار طبيعة الرواسب.

$$e_{ijkm} = Y_{ijkm} - \overline{Y}_{ijk.} \qquad (22.31)$$

واختبار تباين الخطأ، واستقلال حدود الخطأ بالطريقة نفسها التي رأيناها في حالة دراسات تتضمن عاملا واحدا أو عاملين.

ويمكن استخدام التحويلات لجعل تباينات الخطأ مستقرة، ولجعل توزيعات الخطأ أكثر طبيعية، و / أو لجعل التفاعلات المهمة غير ذات أهمية. وتنطبق مناقشاتنا السابقة حول هذا الموضوع على حالة ثلاثةعوامل انطباقا تاما.

وأخيرا، تنطبق مناقشتنا السابقة حول تأثيرات الحيود عن نموذج التحاين انطباقا تاما على حالة العوامل الثلاثة. وعلى وجه الخصوص، فإن استخدام حجوم عينات متساوية لكل معالجة يجعل تأثير التباينات غير المتساوية أصغر ما يمكن.

(٢٢-٤) تحليل تأثيرات العوامل

لا تواجهنا مشاكل جديدة عند تحليل تأثيرات العوامل في دراسات تتضمن ثلاثة عوامل مع مستويات عامل مثبتة، وكما في الدراسات ذات العاملين يركّز التحليل كالعادة على متوسطات مستويات عامل عندما تكون التفاعلات المهمة غير موجودة، وعلى متوسطات المعالجات عند وجود تفاعلات مهمة. وسنقدم الآن بعض النتائج المختارة المتعلقة بتقدير تأثيرات عامل، وتتبع التحليلات الأخرى النمط نفسه.

تحليل تأثيرات عامل عندما لا تتفاعل العوامل

تقدير متوسط مستوى عامل. يُقدَّر $\mu_{i..}$ متوسط مستوى العامل A بـ

$$\hat{\mu}_{i..} = \bar{Y}_{i...} \tag{22.32}$$

وتقدير تباين هذا المقدِّر هو:

$$s^2\{\bar{Y}_{i...}\} = \frac{MSE}{nbc} \tag{22.33}$$

ونحصل على حدي الثقة لـ $\mu_{i..}$ باستخدام التوزيع t مع $(n-1)abc$ درجة من الحرية:

$$\bar{Y}_{i...} \pm t[1-\alpha/2;(n-1)abc]s\{\bar{Y}_{i...}\} \tag{22.34}$$

وبصورة مماثلة نقوم بتقدير متوسطات مستوى عامل بالنسبة للعامل B أو للعامل C.

تقدير مقارنة بين متوسطات مستويات عامل. عندما نريد تقدير مقارنة تنطوي على متوسطات مستويات العامل A و $\mu_{i..}$.

$$L = \sum c_i \mu_{i..} \qquad \text{حيث: } \sum c_i = 0 \tag{22.35}$$

فسنستخدم المقدِّر غير المنحاز لـ L:

$$\hat{L} = \sum c_i \bar{Y}_{i...} \tag{22.36}$$

وتقدير تباين $\hat{L}$ هو:

$$s^2\{\hat{L}\} = \frac{MSE}{nbc}\sum c_i^2 \tag{22.37}$$

و $(1-\alpha)$ حدّي ثقة لـ L هما:

$$\hat{L} \pm t[1-\alpha/2;(n-1)abc]s\{\hat{L}\} \tag{22.38}$$

وبصورة مماثلة نقدِّر مقارنات تنطوي على متوسطات مستويات العامل B أو العامل C.

مقارنات متعددة لمتوسطات مستويات عامل. إذا أردنا تقدير عدد من المقارنات بين $\mu_{i..}$، أي متوسطات مستويات العامل A مستخدمين معامل ثقة عائلي، فإن أحد المقادير T أو S أو B المعرّفة فيما يلي يحل محل المقدار t في (22.38):

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}q[1-\alpha;a,(n-1)abc] \quad \text{(22.39a)}$$
طريقة توكي (لمقارنات ثنائية)

$$S^2=(a-1)F[1-\alpha;a,(n-1)abc] \quad \text{(22.39b)}$$
طريقة شيفّه

$$B=t[1-\alpha/2g;(n-1)abc] \quad \text{(22.39c)}$$
طريقة بونفيروني

وبصورة مماثلة نقدِّر مقارنات متعددة بين متوسطات مستويات العامل $\mu_{.j.}$ أو متوسطات مستويات العامل $\mu_{..k}$.

تحليل تأثيرات عامل عندما تكون التفاعلات مهمة

وكما شرحنا سابقا في دراسات ذات عاملين، يحاول المرء عادة جعل التفاعلات غير مهمة باستخدام تحويل بسيط للبيانات. وإذا لم تُفلح تلك الجهود نحلل عندئذٍ التفاعلات المهمة بالطريقة التقليدية بدلالة متوسطات المعالجات μ_{ijk}.

تقدير متوسط معالجة. يُقدَّر متوسط المعالجة μ_{ijk} بـ :

$$\hat{\mu}_{ijk}=\overline{Y}_{ijk.} \quad \text{(22.40)}$$

وتقدير تباين $\overline{Y}_{ijk.}$ هو:

$$s^2\{\overline{Y}_{ijk.}\}=\frac{MSE}{n} \quad \text{(22.41)}$$

وتقدير تباين $\overline{Y}_{ijk}$ هما:

$$\overline{Y}_{ijk.}\pm t[1-\alpha/2;(n-1)abc]s\{\overline{Y}_{ijk.}\} \quad \text{(22.42)}$$

تقدير مقارنة بين متوسطات معالجة. عندما تكون التفاعلات موجودة، فنرغب عادة بالمقارنة بين متوسطات المعالجات $\overline{Y}_{ijk}$. لنرمز، كالمعتاد، بـ L لمقارنة كهذه:

$$L=\sum\sum\sum c_{ijk}\mu_{ijk} \quad \text{(22.43)}$$

حيث : $\sum\sum\sum c_{ijk} = 0$

والمقدِّر غير المنحاز لـ L هو:

$$\hat{L} = \sum\sum\sum c_{ijk}\overline{Y}_{ijk.} \tag{22.44}$$

وتقدير تباينه هو:

$$s^2\{\hat{L}\} = \frac{MSE}{n}\sum\sum\sum c_{ijk}^2 \tag{22.45}$$

وكالمعتاد، فإن حدّي الثقة لـ L هما:

$$\hat{L} \pm t[1-\alpha/2;(n-1)abc]s\{\hat{L}\} \tag{22.46}$$

وأحيانا لا تكون جميع أنواع تأثيرات التفاعل موجودة. وفي حالة كهذه، يمكن أن تتضمن المقارنات المرغوبة متوسطات الـ μ_{ijk} مأخوذة فوق أحد العوامل. وعلى سبيل المثال، عندما تكون التفاعلات BC ، فقط، موجودة، فقد نهتم بمقارنات المتوسطات $\mu_{.jk}$:

$$L = \sum\sum c_{jk}\mu_{.jk} \tag{22.47}$$

حيث $\sum\sum c_{jk} = 0$.

ومثل هذه المقارنات هي، بالطبع، حالات خاصة من مقارنات متوسطات المعالجات μ_{ijk} في (22.43). ومن (22.44) يمكن أن نحصل بسهولة على مقدِّر المقارنة (22.47) كما نحصل على تقدير التباين من (22.45)؛ وهي كما يلي:

$$\hat{L} = \sum\sum c_{jk}\overline{Y}_{.jk.} \tag{22.48}$$

$$s^2\{\hat{L}\} = \frac{MSE}{na}\sum\sum c_{jk}^2 \tag{22.49}$$

مقارنات متعددة بين متوسطات المعالجات. في المقارنات المتعددة نضع أحد المقادير T أو S أو B بدلا من t في (22.46) حيث:

طريقة توكي (المقارنات الثنائية) $$T = \frac{1}{\sqrt{2}}q[1-\alpha;abc,(n-1)abc] \tag{22.50a}$$

طريقة شيفّه $$S^2 = (abc-1)F[1-\alpha;abc-1,(n-1)abc] \tag{22.50b}$$

طريقة بونفيروني $$B = t[1-\alpha/2g;(n-1)abc] \tag{22.50c}$$

اختبارات بدرجة واحدة من الحرية. عندما تكون التفاعلات موجودة، نستخدم أحيانا ، كبديل عن تقدير المقارنات، اختبارا واحدا أو عدة اختبارات حول متوسطات المعالجات μ_{ijk}، كل منها بدرجة واحدة من الحرية.

والبدائل ذات الجانبين لاختبار بدرجة واحدة من الحرية هي:

$$\begin{aligned} &H_0: \sum\sum\sum c_{ijk}\mu_{ijk} = c \\ &H_a: \sum\sum\sum c_{ijk}\mu_{ijk} \neq c \end{aligned} \tag{22.51}$$

حيث c_{ijk} و c ثوابت مناسبة.

ولاختبار البدائل ذات الجانبين (22.51)، يمكن استخدام إحصاءة الاختبار:

$$t^* = \frac{\sum\sum\sum c_{ijk}\bar{Y}_{ijk.} - c}{\sqrt{\frac{MSE}{n}\sum\sum\sum c_{ijk}^2}} \tag{22.52}$$

التي تتبع، عندما تكون H_0 صحيحة، التوزيع t بـ $(n-1)abc$ درجة من الحرية. وبصورة بديلة يمكن استخدام $F^* = (t^*)^2$ كإحصاءة للاختبار. وعندما تكون H_0 صحيحة، تتبع F^* التوزيع F بدرجة واحدة من الحرية في البسط و $(n-1)abc$ درجة من الحرية في المقام.

(٢٢ـ٥) مثال عن دراسة تتضمن ثلاثة عوامل

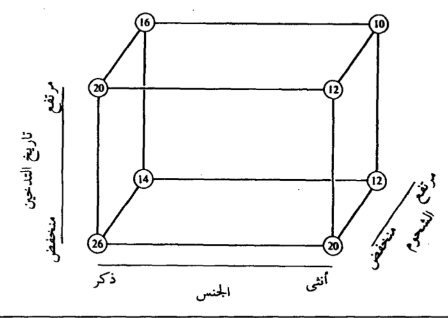
سنحلل الآن البيان الإحصائي المعطى في الجدول (٢٢ـ٢) (فقرة ٢٢ـ٢) والمتعلق بدراسة مدى الأهلية لإجراء تمارين في اختبار شدة. ويقاس مدى الأهلية لإجراء التمارين بالدقائق المنصرمة حتى وقوع التعب لشخص يستخدم دراجة، ولنذكر أن العوامل الثلاثة هي جنس الشخص (A)، شحوم الجسم مقاسة كنسبة مئوية (B)، وتاريخ التدخين لدى الشخص (C)، ولكل من العوامل مستويان. ويقدم الشكل (٢٢ـ٥) متوسطات المعالجات المقدَّرة $\bar{Y}_{ijk.}$ كما يعطيها الجدول (٢٢ـ٢)جـ في صورة مبسطة. ومتوسطات المعالجات المقدَّرة نفسها مبينة في الشكل (٢٢ـ٦) كرسوم بيانية. ويبدو من الشكلين (٢٢ـ٥) و(٢٢ـ٦) أن بعض العوامل يمكن أن تتفاعل في تأثيراتها على مدى الأهلية لإجراء التمارين، وأن الجنس، بصورة خاصة، يمكن أن يؤثر في

مدى التحمل عند القيام باختبار شدة، ويرغب البـاحث الآن بتحليـل طبيعـة تأثـيرات العامل بالتفصيل.

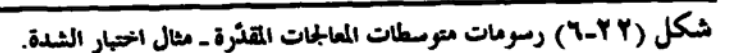
تحليل الرواسب

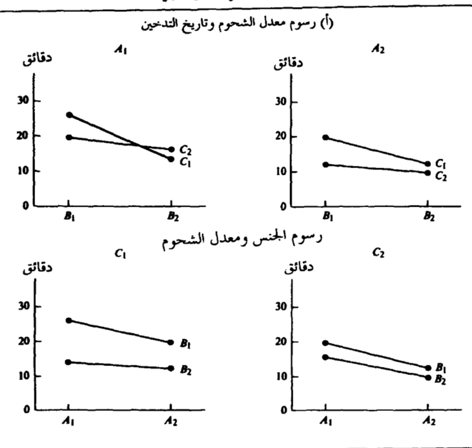
قام المحلل أولا بتهيئة رسوم نقطية للرواسـب مـن أجـل المعالجـات الثمـاني. ولم تقترح هذه الرسوم، (وهي غير معطاة هنـا)، مـع أنهـا مبنيـة علـى ثـلاث مشـاهدات، فقط، لكل معالجة، أية فروق جسيمة في تباينات الخطأ للمعالجات الثماني.

شكل (٢٢-٥) رسم تخطيطي لمتوسطات المعالجات المقدّرة ـ مثال اختبار الشدة.



وقد حصل الباحث، أيضا، على رسم احتمال طبيعي للرواسب، وهـو مبـين في الشكل (٢٢-٧). وتتخذالنقاط في هذا الرسم نمطا خطيا تقريبا ، مع أن هنـاك عـددا كبيرا من القيم المكـررة بـين الرواسـب بسـبب تدويـر الأرقـام العشـرية في البيانـات. وانطباع الخطية هذا تدعمه القيمة المرتفعة لمعامل الارتباط بين الرواسب المرتَّبة وقيمهـا المتوقعة تحت الطبيعية، ونعني 0.969. ولذلك كان الباحث مقتنعا بأن نموذج التحـاين (22.14) بثلاثة عوامل قابل للتطبيق هنا.


شكل (٢٢-٦) رسومات متوسطات المعالجات المقدّرة - مثال اختبار الشدة.



اختبارات خاصة بتأثيرات العوامل

رغب الباحث أن يختبر أولا تأثيرات العوامل المختلفة. كما رغب في اعتماد مستوى معنوية عائلي $\alpha = 0.10$، للاختبارات الأساسية السبعة، وسيؤكد هذا أنه إذا لم تكن توجد في الحقيقة أية تأثيرات عوامل، فسيكون هناك فرصة من عشرة ،فقط، في أن يقود واحد أو أكثر من الاختبارات السبعة إلى النتيجة الخاطئة بوجود تأثيرات عوامل. ومستخدما متباينة كيمبل (22.29)، قام بحل المعادلة:

$$10 = 1 - (1 - \alpha_i)^7 . \alpha =$$

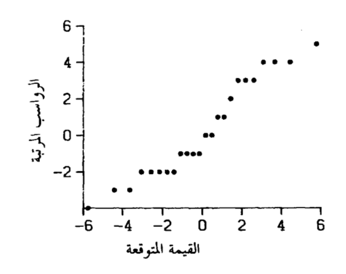
فوجد $\alpha_i = 0.015$، وهكذا، فإن استخدام مستوى معنوية $0.015 = \alpha i$ لكل اختبار يؤكد أن مستوى المعنوية العائلي سوف لا يتجاوز 0.10.

ويتضمن الجدول (٢٢-٥) نتائج تشغيلة لحزمة حاسب خاصة بتحاين متعدد العوامل. وجدول التحاين معطى بالإضافة إلى إحصاءات الاختبارات السبع والقيمة-P

لكل منها. وفي بسط كل إحصاءة اختبار متوسط مربعات تأثير العـامل المناسـب، وفي مقام كل إحصاءة اختبار *MSE*.

اختبار التفـاعلات ثلاثيـة العوامـل. نفّـذ الاختبـار الأول لتفـاعلات ثلاثيـة العوامـل. والبدائل هي:

شكل (٢٢-٧) رسم احتمال طبيعي للرواسب - مثال اختبا الشدّة.



جدول (٢٢-٥) جدول تباين لدراسة تتضمن ثلاثة عوامل - مثال اختبار الشدّة

مصدر التغير	*SS*	*df*	*MS*	*F**	القيمة -*P*
ما بين المعالجات	610.5	7	87.21		
العامل *A* (الجنس)	181.50	1	181.50	20.74	0+
العامل *B* (معدل الشحوم)	253.50	1	253.50	28.97	0+
العامل *C* (التدخين)	73.50	1	73.50	8.40	.01
التفاعلات *AB*	13.50	1	13.50	1.54	.23
التفاعلات *AC*	13.50	1	13.50	1.54	.23
التفاعلات *BC*	73.50	1	73.50	8.40	.01
التفاعلات *ABC*	1.50	1	1.50	.17	.69
الخطأ	140.00	16	8.75		
المجموع	750.5	23			

$F(.985; 1, 16) = 7.42$

H_0: جميعها مساوية للصفر $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$

H_a: ليست جميع $(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ مساوية للصفر

وقاعدة القرار هي:

إذا كان: $F^* \le F(.985;1,16) = 7.42$ استنتج H_0

إذا كان: $F^* > F(.985;1,16) = 7.42$ استنتج H_a

وإحصاءة الاختبار F^* مأخوذة من الجدول (٢٢-٥) وهي:

$$F^* = \frac{MSABC}{MSE} = \frac{1.50}{8.75} = .17$$

وبما أن $F^* = .17 \le 7.42$، فقد استنتج الباحث عدم وجود تفاعلات ABC. والقيمة-P لهذا الاختبار هي 0.69.

اختبارات التفاعلات ثنائية العامل. اختبر الباحث بعد ذلك التفاعلات ثنائية العامل. وفي الاختبار الخاص بالتفاعلات AB، نجد قاعدة القرار (البدائل معطاة في الجدول٢٢-٤) :

إذا كان: $F^* \le F(.985;1,16) = 7.42$ استنتج H_0

إذا كان: $F^* > F(.985;1,16) = 7.42$ استنتج H_a

وإحصاءة الاختبار هي:

$$F^* = \frac{MSAB}{MSE} = \frac{13.50}{8.75} = 1.54$$

وبما أن $F^* = 1.54 \le 7.42$ ، فقد استنتج الباحث عدم وجود تفاعلات AB. والقيمة-P لهذا الاختبار هي 0.23.

وتمضي الاختبارات الخاصة بالتفاعلات AC و BC بصورة مماثلة. وفيها نجد:

١ - $F^* = \frac{MSAC}{MSE} = \frac{13.50}{8.75} = 1.54 \le F(.985;1,16) = 7.42$ القيمة -P =.23

النتيجة: لا توجد تفاعلات AC.

٢ - $F^* = \frac{MSBC}{MSE} = \frac{73.50}{8.75} = 8.40 > F(.985;1,16) = 7.42$ القيمة-P =.01

النتيجة : بعض التفاعلات AC موجودة.

وعند هذه النقطة، درس الباحث عدة تحويلات بسيطة للبيان الإحصائي ليرى ما إذا كان يمكن إزاحة التفاعلات BC، إلا أنه لم يفلح في مسعاه.

اختبارات التأثيرات الرئيسة. بما أن العامل A (الجنس) لا يتفاعل مع العاملين الآخرين، فقد استدار الاهتمام إلى اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A، ولهذا الغرض نجد أن قاعدة القرار (البدائل معطاة في الجدول ٢٢ ـ ٤) هي:

إذا كان: $F^* \leq F(.985;1,16) = 7.42$ استنتج H_0

إذا كان: $F^* > F(.985;1,16) = 7.42$ استنتج H_a

وإحصاءة الاختبار هي:

$$F^* = \frac{MSAB}{MSE} = \frac{181.50}{8.75} = 20.74$$

وبما أن $F^* = 20.74 \leq 7.42$، فقد استنتج الباحث أن التأثيرات الرئيسة للعامل A موجودة. والقيمة-P لهذا الاختبار هي 0^+

و لم تُختبر التأثريات الرئيسة للعاملين B و C عند هذه النقطة بسبب ما وُجد من حضور للتفاعلات AC. وقد رغب الباحث في أن يدرس أولا طبيعة تأثيرات التفاعلات BC قبل أن يحدد ما إذا كان للتأثيرات الرئيسة للعاملين B و C أية جدوى عملية في الظروف المحيطة.

عائلة النتائج. قادت اختبارات F المنفصلة الخمسة إلى أن يستنتج الباحث (بمستوى معنوية عائلي لا يتجاوز 0.10):

١ ـ لا يوجد تفاعلات ثلاثية العامل.

٢ ـ لا يوجد تفاعلات ثنائية العامل بين الجنس (العامل A) وأي من العاملين الآخرين ـ شحوم الجسم (العامل B) وتاريخ التدخين (العامل C)، إلا أن التفاعلات بين شحوم الجسم وتاريخ التدخين موجودة.

٣ ـ التأثيرات الرئيسة للجنس (العامل A) موجودة.

وكانت هذه المجموعة من نتائج الاختبارات مفيدة جدا للباحث. وكانت الخطوة التالية في تحليله هو أن يختبر طبيعة تأثيرات التفاعلات BC والتأثيرات الرئيسة للعامل A.

تقدير تأثيرات العوامل

ولدراسة طبيعة تأثيرات التفاعلات BC، رغب الباحث في أن يقدّر بصورة منفصلة، لأشخاصٍ شحومُ الجسم عندهم عالية ومنخفضة، الفرق في متوسط زمن التعب بين المسرفين في التدخين وغير المسرفين والمقارنات المرغوبة هي :

$$L_1 = \mu_{.11} - \mu_{.12}$$
$$L_2 = \mu_{.21} - \mu_{.22}$$

وبالإضافة إلى ذلك، فإن مقارنة بمفردها بين متوسطي مستويي العامل A كافية لتحليل التأثيرات الرئيسة للعامل A باعتبار أن للعامل A مستويين، فقط، والمقارنة المفيدة (هنا مقارنة ثنائية بين متوسطي مستويي العامل) هي:

$$L_3 = \mu_{1..} - \mu_{2..}$$

وهذه المقارنات الثلاث مقدَّرة كما يلي:

$$\hat{L}_1 = \bar{Y}_{.11.} - \bar{Y}_{.12.}$$
$$\hat{L}_2 = \bar{Y}_{.21.} - \bar{Y}_{.22.}$$
$$\hat{L}_3 = \bar{Y}_{1...} - \bar{Y}_{2...}$$

ومن الجدول (٢٢-٢)جـ، نحصل على:

$$\hat{L}_1 = 23 - 16 = 7$$
$$\hat{L}_2 = 13 - 13 = 0$$
$$\hat{L}_2 = 19 - 13.5 = 5.5$$

وقد استخدم الباحث التباينات المقدَّرة (22.49) و (22.37) وحدي الثقة (22.46) بمعامل ثقة عائلي 95% مؤسَّس على طريقة بونفيروني. وبالتالي فقد احتاج، من أجل المقارنات الثلاث، للنتائج التالية:

$$B = t(1-.05 / 6; 16) = 2.673$$

$$s^2\{\hat{L}_1\} = s^2\{\hat{L}_2\} = \frac{MSE}{na}\left[(1)^2 + (-1)^2\right] = \frac{8.75}{6}(2) = 2.917$$

$$s^2\{\hat{L}_3\} = \frac{MSE}{na}\left[(1)^2 + (-1)^2\right] = \frac{8.75}{12}(2) = 1.458$$

$$s\{\hat{L}_1\} = s\{\hat{L}_2\} = 1.708 \qquad s\{\hat{L}_3\} = 1.207$$

وهكذا تكون فترات الثقة المرغوبة كما يلي:

$$2.4 = 7.0 - 2.673(1.708) \le \mu_{.11} - \mu_{.12} \le 7.0 + 2.673(1.708) = 11.6$$

$$-4.6 = 0 - 2.673(1.708) \le \mu_{.21} - \mu_{.22} \le 0 + 2.673(1.708) = 4.6$$

$$2.3 = 5.5 - 2.673(1.207) \le \mu_{1..} - \mu_{2..} \le 5.5 + 2.673(1.207) = 8.7$$

وقد استنتج الباحث بالتالي وبمعامل ثقة عائلي 0.95: (١) بين الناس ذوي الشحوم الجسمية المنخفضة يزيد متوسط زمن تحمل اختبارات الشدة لغير المسرفين في تدخينهم بمقدار 2.4 إلى 11.6 دقيقة عن متوسط زمن التحمل للمسرفين في تدخينهم. (٢) وفي الناس ذوي الشحوم الجسمية المرتفعة، لا يختلف متوسط زمن التحمل سواء أكانوا من المسرفين أم من غير المسرفين في التدخين. (٣) يزيد متوسط زمن تحمل اختبار الشدّة عند الرجال بمقدار 2.3 إلى 7.8 دقيقة عن متوسط زمن التحمل عند النساء.

وفي ضوء تأثيرات التفاعلات المهمة التي لوحظت بين شحوم الجسم وتاريخ التدخين على زمن تحمل اختبار الشدة، فقد استنتج الباحث أن التأثيرات الرئيسة للعاملين B و C غير ذات أهمية، ولذلك فقد أنهى تحليله عند هذه النقطة. وقُدِّمت النتائج الرئيسة بيانيا في الشكل (٢٢-٨). ويبين الشكل (٢٢-٨)أ مقدار تأثير الجنس على زمن تحمل اختبار الشدة، ويبين الشكل (٢٢-٨)ب طبيعة تأثريات التفاعل بين شحوم الجسم وتاريخ التدخين.

(٢٢-٦) تخطيط حجوم العينات

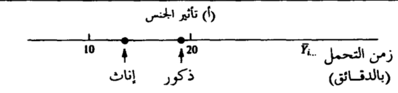
تُعالج مسألة تخطيط حجوم العينات أساسا في الدراسات التي تتضمن ثلاثة عوامل بالطريقة نفسها التي رأيناها في دراسات ذات عامل واحد أو عاملين. وبالتالي نكتفي بذكر ملاحظات قليلة مختصرة. وسنستعرض أولا قوة الاختبارات F دراسات تتضمن ثلاثة عوامل.

قوة الاختبارات F

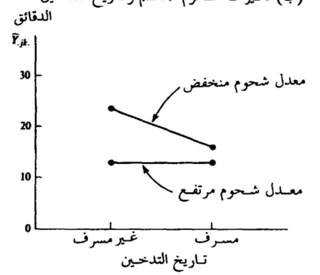
يمكن الحصول على قوة اختبار تأثيرات عامل في دراسات تتضمن ثلاثة عوامل من الجدول A.8 بالطريقة التي وصفناها في دراسات تتضمن عاملا واحدا أو عاملين. وتُعرف معلمة اللامركزية ϕ لاختبار معطى كما يلي:

شكل (٢٢-٨) النتائج الرئيسة من دراسة زمن تحمل اختبار الشدة

(أ) تأثير الجنس



(ب) تأثيرات شحوم الجسم وتاريخ التدخين



$$\phi=\frac{1}{\sigma}\left[\frac{\text{بسط الحد الثاني في } E(MS) \text{ في الجدول ٢٢-٣}}{\text{مقام الحد الثاني في } E(MS) \text{ زائدا الواحد}}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (22.53)$$

وهكذا يكون لدينا، في حالة اختبار وجود تفاعلات ثلاثية العامل:

$$\phi=\frac{1}{\sigma}\left[\frac{n\sum\sum\sum(\alpha\beta\gamma)_{ijk}^2}{(a-1)(b-1)(c-1)+1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

أساليب التخطيط

في معظم الحالات سيكون تساوي التكرارات لكل معالجة مرغوبا . وعند تخطيط حجوم العينات بأسلوب القوة يهتم المرء عادة بقوة الكشف عن وجود تأثيرات رئيسة للعامل A، وقوة الكشف عن وجود تأثيرات رئيسة للعامل B، وقوة الكشف عن وجود تأثيرات رئيسة للعامل C. ويمكن أن نحدد أولا المدى الأصغري لمتوسطات مستوى العامل A الذي يكون من المهم معه الكشف عن تأثيرات رئيسة للعامل A، ثم نحصل على حجوم العينات التي نحتاجها من الجدول (١٠-أ) حيث $a = r$. وحجم العينة الناتج هو bcn، ومنه يمكن الحصول بسهولة على n. ويكون استخدام الجدول (١٠-أ) لهذا الغرض مناسبا شريطة أن تكون حجوم العينات الناتجة غير صغيرة، وعلى وجه التحديد شريطة أن يكون $a(bcn - 1) \geq 20$ وإذا لم يتحقق هذا الشرط، فينبغي استخدام جداول القوة لبيرسون وهارتلي في الجدول (٨-أ) متّبعين أسلوب التكرار والإعادة (أو أسلوب التجربة والخطأ).

وبالطريقة نفسها يمكن تحديد قيم للمدى الأصغري لمتوسطات مستويات كل من العاملين B و C التي يكون من المهم معها الكشف عن التأثيرات الرئيسة للعامل، ثم إيجاد حجوم العينات المطلوبة. وإذا اختلفت حجوم العينات التي نحصل عليها من العامل A والعامل B والعامل C اختلافا كبيرا ، فسنحتاج إلى اتخاذ قرار تسوية بالنسبة للحجوم النهائية للعينات.

وبصورة بديلة، أو مقترنا مع أسلوب القوة، يمكن تحديد المقارنات المهمة التي نريد تقديرها، ثم إيجاد حجوم العينات التي يُتوقع أن تُفضي إلى الدقة المرجوة لمعامل الثقة العائلي المرغوب. وكثيرا ما يكون هذا الأسلوب أكثر فائدة من أسلوب القوة، مع أنه يمكن استخدام الأسلوبين كليهما للوصول إلى تحديد لحجوم العينات المطلوبة. وإذا كان الغرض من الدراسة العاملية هو تحديد التركيبة الأفضل بين الـ abc من التركيبات العاملية الممكنة، فيمكن استخدام الجدول (١١-أ) لإيجاد حجوم العينات المطلوبة، وذلك كما وصفنا في الفقرة (١٧-٣). ولهذه الغاية يكون $r = abc$.

(٢٢-٧) حجوم عينات غير متساوية في دراسات متعددة العوامل

عندما تكون حجوم عينات المعالجات في دراسة متعـددة العوامـل غـير متسـاوية، ينبغي اتباع الطرق المشروحة في الفصل العشرين والخاصـة بدراسـات تتضمـن عـاملين بعـد إجـراء تعديـلات روتينيـة. ونستمر في افـتراض أن لجميـع متوسـطات المعالجـات الأهمية نفسها وأنه لا توجد خلايا فارغة.

اختبارات تأثيرات العوامل

يمكن اختبار تأثيرات العوامل في دراسات متعددة العوامل مع حجوم عينات غـير متساوية باستخدام أسلوب الانحدار. ويُصمم لكل عامل متغيرات مؤشرة تتخـذ القيـم 1 ,-1 ,0، وعدد هذه التغيرات يساوي عدد مستويات العـامل مطروحـا منـه الواحـد، وتُمثّل تأثيرات التفاعل، كالمعتـاد، بحـدود جدائيـة، وبمـا أن مجـاميع المربعـات لا تعـود متعامدة عندما تكون حجوم عينات المعالجات غير متساوية، فلا بد مـن توفيـق نمـاذج مخفّضة مختلفة من أجل الاختبارات المعنيّة.

مثـال. لنفـرض في مثـال اختبـار الشـدة في الجـدول (٢٢-٢)، أن المشـاهدتين Y_{1113} وY_{2212} مفقودتان. فلتطوير نموذج انحدار لهـذا المثـال، ُنلاحـظ أن لكـل مـن العوامـل الثلاثة مستويين. وبالتالي نحتاج الى متغير مؤشـر واحـد لكـل عـامل، وبذلـك يكـون نموذج الانحدار التام كما يلي (نموذج تام):

$$\begin{aligned} Y_{ijkm} = \mu_{..} &+ \alpha_1 X_{ijkm1} + \beta_1 X_{ijkm2} + \gamma_1 X_{ijkm3} + (\alpha\beta)_{11} X_{ijkm1} Xijkm_2 \\ &+ (\alpha\gamma)_{11} X_{ijkm1} X_{ijkm3} + (\beta\gamma)_{11} X_{ijkm2} X_{ijkm3} \\ &+ (\alpha\beta\gamma)_{111} X_{ijkm1} X_{ijkm2} X_{ijkm3} + \varepsilon_{ijkm} \end{aligned} \tag{22.54}$$

حيث:

$X_{ijkm1} =$ 1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 1 للعامل A
-1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 2 للعامل A

$X_{ijkm2} =$ 1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 1 للعامل B
-1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 2 للعامل B

$X_{ijkm3} =$ 1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 1 للعامل C
-1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 2 للعامل C

ومعالم الانحدار في النموذج (22.54) هي معالم نموذج التحـاين كما عرفناها في (22.13).

ويتضمن الجدول (٢٢-٦) المتجه **Y** والمصفوفة **X** لنمـوذج الانحـدار التـام (22.54) لمثال اختبار الشدة مع فقدان مشاهدتين. ونحصل على النموذج المخفض لاختبار تأثيرات العوامل المختلفة بإلغاء الأعمدة المناسبة من المصفوفة **X** في الجدول (٢٢-٦).

جدول (٢٢-٦) بيان مصفوفات نموذج الانحدار (22.54) مثال اختبار الشدة مع فقدان Y_{1113} و Y_{2212}.

Y	=	**X** =		X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$
Y_{1111}	24		1	1	1	1	1	1	1	1
Y_{1112}	29		1	1	1	1	1	1	1	1
Y_{1121}	18		1	1	1	−1	1	−1	−1	−1
Y_{1122}	19		1	1	1	−1	1	−1	−1	−1
Y_{1123}	23		1	1	1	−1	1	−1	−1	−1
Y_{1211}	15		1	1	−1	1	−1	1	−1	−1
Y_{1212}	15		1	1	−1	1	−1	1	−1	−1
Y_{1213}	12		1	1	−1	1	−1	1	−1	−1
Y_{1221}	15		1	1	−1	−1	−1	−1	1	1
Y_{1222}	20		1	1	−1	−1	−1	−1	1	1
Y_{1223}	13		1	1	−1	−1	−1	−1	1	1
Y_{2111}	20		1	−1	1	1	−1	−1	1	−1
Y_{2112}	22		1	−1	1	1	−1	−1	1	−1
Y_{2113}	18		1	−1	1	1	−1	−1	1	−1
Y_{2121}	15		1	−1	1	−1	−1	1	−1	1
Y_{2122}	10		1	−1	1	−1	−1	1	−1	1
Y_{2123}	11		1	−1	1	−1	−1	1	−1	1
Y_{2211}	16		1	−1	−1	1	1	−1	−1	1
Y_{2213}	11		1	−1	−1	1	1	−1	−1	1
Y_{2221}	10		1	−1	−1	−1	1	1	1	−1
Y_{2222}	14		1	−1	−1	−1	1	1	1	−1
Y_{2223}	6		1	−1	−1	−1	1	1	1	−1

ملاحظة

تنطبق المناقشة الواردة في الفقرة (٢٠-٥) حول استخدام الحزم الإحصائية لتحليل التباين بحجوم عينات غير متساوية و/ أو خلايا فارغة إنطباقا تاما على الدراسات متعددة العوامل.

تقدير تأثيرات العوامل

يجري تقدير تأثيرات العوامل في الدراسات متعددة العوامل مع حجوم عينات غير متساوية بطريقة مماثلة لما رأيناه في دراسات تتضمن عاملين. وببساطة نحتاج إلى تعميم الصيغ الواردة في الجدول (٢٠-٥) إلى حالة ثلاثة عوامل أو أكثر.

ولتوضيح هذه التعميمات، لنعتبر المقارنات الثنائية لمتوسطات مستويات العامل A في دراسة تتضمن ثلاثة عوامل، وتكون مقارنة كهذه مع مقدّرها وتقدير تباينها كما يلي:

$$D = \mu_{i..} - \mu_{i'..} \tag{22.55a}$$

$$\hat{D} = \hat{\mu}_{i..} - \hat{\mu}_{i'..} \tag{22.55b}$$

حيث: $\hat{\mu}_{i..} = \dfrac{\sum_j \sum_k \overline{Y}_{ijk.}}{bc}$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{MSE}{b^2c^2} \sum_j \sum_k \left(\frac{1}{n_{ijk}} + \frac{1}{n_{i'jk}} \right) \tag{22.55c}$$

ودرجات الحرية المناسبة التي توافق MSE هي $n_T - abc$.

(٢٢-٨) النموذجان II و III لدراسات تتضمن ثلاثة عوامل

تماما كما في دراسات تتضمن عاملا واحدا أو عاملين، تبقى مجاميع المربعات ودرجات الحرية في تحليل التباين لنماذج متعددة العوامل (عشوائية ومختلطة) نفسها كما كانت في نموذج تباين مثبت. والمشكلة الرئيسة في النماذج متعددة العوامل العشوائية والمختلطة هي، كما رأينا في نماذج العاملين، تحديد توقعات متوسطات المربعات. وحالما تصبح هذه التوقعات معروفة، يمكن وضع إحصاءات الاختبارات وفترات الثقة في شكلها الصحيح. وسنقدم لاحقا في الفصل السابع والعشرين قواعد

لإيجاد توقع متوسط مربعات لنماذج عشوائية ومختلطة أيا كان عدد العوامل. ونقدم الآن النموذج II (مستويات العوامل عشوائية) والنموذج III (مستويات العوامل مختلطة) لدراسات تتضمن ثلاثة عوامل ونبين كيفية القيام باختبارات مناسبة. ونعتبر من جديد حالة تساوي حجوم عينات المعالجات.

نموذج II (مستويات العوامل عشوائية)

في دراسة لتأثيرات العمال والآلات ودفعات المواد الأولية على الناتج اليومي، يمكن اعتبار العوامل الثلاثة جميعها بمستويات عشوائية. ونموذج التحاين العشوائي لدراسة كهذه تتضمن ثلاثة عوامل هو:

$$Y_{ijkm} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkm} \quad (22.56)$$

حيث:

$\mu_{...}$ ثابت

$\varepsilon_{ijkm}, (\alpha\beta\gamma)_{ijk}, (\beta\gamma)_{jk}, (\alpha\gamma)_{ik}, (\alpha\beta)_{ij}, \gamma_k, \beta_j, \alpha_i$

متغيرات عشوائية طبيعية مستقلة توقع كل منها الصفر وتبايناتها، على الترتيب،

$\sigma^2, \sigma^2_{\alpha\beta\gamma}, \sigma^2_{\beta\gamma}, \sigma^2_{\alpha\gamma}, \sigma^2_{\alpha\beta}, \sigma^2_{\gamma}, \sigma^2_{\beta}, \sigma^2_{\alpha}$

$m = 1,...,n$ ، $k = 1,..., c$ ، $j = 1,..., b$ ، $i = 1,..., n$

وكما في حالة نموذج تحاين عشوائي بعاملين (21.25)، فإن المشاهدات Y_{ijkm} في نموذج التحاين العشوائي ذي العوامل الثلاثة (22.56) تتوزع طبيعيا بتباين ثابت. والقيمة المتوقعة لمشاهدة Y_{ijkm} وتباينها هما:

$$E\{Y_{ijkm}\} = \mu... \quad (22.57a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijkm}\} = \sigma^2_Y = \sigma^2_\alpha + \sigma^2_\beta + \sigma^2_\gamma + \sigma^2_{\alpha\beta} + \sigma^2_{\alpha\gamma} + \sigma^2_{\beta\gamma} + \sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + \sigma^2 \quad (22.57b)$$

وأي مشاهدتين مستقلتان ماعدا مشاهدات تشترك في مستوى أو أكثر من مستويات العوامل، فهذه تكون مرتبطة نظرا لاحتوائها حدودا عشوائية مشتركة.

ويتضمن الجدول (٢٢-٧) توقعات متوسطات المربعات لجميع مركبات جدول التحاين لنموذج التحاين العشوائي (22.56).

جدول (٢٢-٧) توقعات متوسطات المربعات في دراسة عشوائية تتضمن ثلاثة عوامل

متوسط مربعات	df	توقع متوسط المربعات
MSA	$a-1$	$\sigma^2 + nbc\sigma^2_\alpha + nc\sigma^2_{\alpha\beta} + nb\sigma^2_{\alpha\gamma} + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
MSB	$b-1$	$\sigma^2 + nac\sigma^2_\beta + nc\sigma^2_{\alpha\beta} + na\sigma^2_{\beta\gamma} + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
MSC	$c-1$	$\sigma^2 + nab\sigma^2_\gamma + nb\sigma^2_{\alpha\gamma} + na\sigma^2_{\beta\gamma} + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
$MSAB$	$(a-1)(b-1)$	$\sigma^2 + nc\sigma^2_{\alpha\beta} + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
$MSAC$	$(a-1)(c-1)$	$\sigma^2 + nb\sigma^2_{\alpha\gamma} + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
$MSBC$	$(b-1)(c-1)$	$\sigma^2 + na\sigma^2_{\beta\gamma} + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
$MSABC$	$(a-1)(b-1)(c-1)$	$\sigma^2 + n\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
MSE	$(n-1)abc$	σ^2

نموذج III (مستويات العوامل مختلطة)

لنفرض في دراسة ثلاثية العوامل أن للعاملين B و C مستويات عامل عشوائية، بينما مستويات العامل A مثبتة. فيكون نموذج التحاين المختلط لدراسة ثلاثية العوامل كهذه على الشكل التالي:

$$Y_{ijkm} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + (\alpha\beta)_{ij} + (\alpha\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\alpha\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkm} \quad (22.58)$$

حيث:

$\mu_{...}$ ثابت

α_i ثابت

$(\alpha\beta\gamma)_{ijk}$ ، $(\beta\gamma)_{jk}$ ، $(\alpha\gamma)_{ik}$ ، $(\alpha\beta)_{jk}$ ، α_k ، β_j متغيرات عشوائية طبيعية مستقلة مثنى مثنى بتوقعات مساوية للصفر وتباينات ثابتة. ε_{ijkm} مستقلة و$N(0, \sigma^2)$، وهي مستقلة عن المركبات العشوائية الأخرى.

$$\sum_i \alpha_i = \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = \sum_i (\alpha\gamma)_{ik} = \sum_i (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$$

$$i = 1,\ldots, a ; j = 1,\ldots,b ; k = 1,\ldots,c ; m = 1,\ldots,n$$

ونلاحظ أن جميع حدود التفاعلات في هذا النموذج عشوائية، باعتبار أن واحدا على الأقل من العوامل في كل حد له مستويات عامل عشوائية. ونلاحظ، أيضا، أن كافة مجاميع التأثيرات التي تنطوي على عامل مثبت تساوي الصفر عندما تجمع فوق

مستويات ذلك العامل المثبت، وتوجد ارتباطات مختلفة بين حدود التأثيرات العشوائية، مما سوف لانفصّل فيه.

والمشاهدات Y_{ijkm} في نموذج التحاين المختلط ثلاثي العوامل (22.58) تتوزع طبيعيا بتباين ثابت. والقيمة المتوقعة للمشاهدة Y_{ijkm} هي:

$$E\{Y_{ijkm}\} = \mu_{...} + \alpha_i \qquad (22.59)$$

وقبل إجراء التجارب العشوائية تكون أي مشاهدتين مستقلتين فيما عدا المشاهدات التي تحوي حدود تأثيرات عشوائية مشتركة و/ أو مرتبطة ؛ فمثل هذه المشاهدات تكون مرتبطة.

ويتضمن الجدول (٢٢-٨) جميع توقعات متوسطات المربعات لنموذج التحاين المختلط (22.58).

جدول (٢٢-٨) توقعات متوسطات المربعات في دراسة مختلطة ثلاثية العوامل (A مثبت، B و C عشوائيان)

متوسط مربعات	df	توقع متوسط المربعات
MSA	$a - 1$	$\sigma^2 + nbc\frac{\sum \alpha_i^2}{a-1} + nc\sigma_{\alpha\beta}^2 + nb\sigma_{\alpha\gamma}^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
MSB	$b - 1$	$\sigma^2 + nac\sigma_{\beta}^2 + na\sigma_{\beta\gamma}^2$
MSC	$c - 1$	$\sigma^2 + nab\sigma_{\gamma}^2 + nb\sigma_{\beta\gamma}^2$
$MSAB$	$(a - 1)(b - 1)$	$\sigma^2 + nc\sigma_{\alpha\beta}^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
$MSAC$	$(a - 1)(c - 1)$	$\sigma^2 + nb\sigma_{\alpha\gamma}^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
$MSBC$	$(b - 1)(c - 1)$	$\sigma^2 + na\sigma_{\beta\gamma}^2$
$MSABC$	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$	$\sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
MSE	$(n - 1)abc$	σ^2

ويمكن تطوير نماذج تحاين مختلطة أخرى بطريقة مماثلة. ويمكن إيجاد توقعات متوسطات المربعات لهذه النماذج المختلطة باستخدام القواعد التي سنقدمها في الفصل السابع والعشرين.

إحصاءات اختبارات مناسبة

ومن توقعات متوسطات المربعات، نبغي تحديد الإحصاءة المناسبة F لاختبار معطى. وفي الغالب يمكن إيجاد إحصاءة اختبار مضبوطة لنماذج متعددة العوامل مختلطة وعشوائية، ولكن هذا ليس ممكنا على الدوام.

اختبار F مضبوط. لنفرض أننا نرغب في تحديد ما إذا كانت التفاعلات BC موجودة أم لا في نموذج التحاين العشوائي في الجدول (٢٢-٧). فنرى بسهولة من عمود توقعات متوسطات المربعات أن إحصاءة الاختبار المناسبة هي $MSBC/MSABC$ وإذا رغبنا في دراسة السؤال نفسه في حالة نموذج التحاين المختلط في الجدول (٢٢-٨)، فإننا نستطيع ، أيضا، إيجاد إحصاءة اختبار مناسبة ولكنها هذه المرة $MSBC/MSE$. وهكذا، نرى أن إحصاءتي الاختبار ليستا متطابقتين، مع أننا ندرس تأثيرات العوامل نفسها، وذلك بسبب الفروق بين النموذجين.

وإيجاد اختبار F مضبوط في نماذج تحاين متعددة العوامل مختلطة أوعشوائية ليس ممكنا على الدوام. وعلى سبيل المثال لايمكننا اختبار وجود التأثيرات الرئيسة للعامل A في نموذج التحاين العشوائي في الجدول (٢٢-٧). ونلاحظ من الجدول عدم وجود توقع متوسط مربعات مؤلف من مركبات $E\{MSA\}$ مستثنى منها الحد $nbc\sigma_\alpha^2$. ومن الممكن أن نفترض أحيانا أن تفاعلات معينة تساوي الصفر، ونمضي عندئذ في تحديد اختبار F مضبوط بالطريقة المعتادة. وعلى سبيل المثال، لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A في نموذج التحاين العشوائي في الجدول (٢٢-٧)، قد يكون من الممكن افتراض أن $\sigma_{\alpha\gamma}^2 = 0$ (في الحقيقة، يمكن اختبار هذا الفرض باستخدام $MSAC/MSABC$). وإذا كان هذا الافتراض مناسبا ، فيمكن استخدام إحصاءة الاختبار $MSA/MSAB$ لاختبار التأثيرات الرئيسية للعامل A.

اختبار F تقريبي يعود لساترثويت (*Satterthwaite*) وفي الغالب، قد لانعلم ما إذا كانت تفاعلات معينة مساوية للصفر. وفي تلك الحالة، يمكن استخدام اختبار F مستفيدا من شبه إحصاءة اختبار F. وينطوي هذا الاختبار التقريبي، ويدعى اختبار ساترثويت، على تطوير تركيب خطي في متوسط المربعات توقعه، عندما تكون H_0

صحيحة، هو نفس توقع متوسط مربعات التأثير المرد اختباره لنعبر عن هذا التركيب الخطي كما يلي:

$$a_1MS_1 + a_2MS_2 + ... + a_hMS_h \tag{22.60}$$

حيث المقادير a_i ثابتة، ويمكن البرهان على أن عدد درجات الحرية التقريبي الموافق للتركيب الخطي (22.60) هو:

$$df \cong \frac{(a_1 MS_1 + a_2 MS_2 + ... + a_h MS_h)^2}{\frac{(a_1 MS_1)^2}{df_1} + \frac{(a_2 MS_2)^2}{df_2} + ... + \frac{(a_h MS_h)^2}{df_h}} \tag{22.61}$$

حيث يرمز df_i لعدد درجات الحرية الموافق لـ MS_i. وتُشكل إحصاءة الاختبار عندئذ بالطريقة المعتادة، وتتبع هذه الإحصاءة بصورة تقريبية التوزيع F وذلك عندما تكون H_0 صحيحة.

ونوضح هذه الطريقة باختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A في نموذج التحاين العشوائي الخاص بالجدول (٢٢-٧):

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_\alpha^2 = 0 \\ H_a &: \sigma_\alpha^2 > 0 \end{aligned} \tag{22.62}$$

ونلاحظ من الجدول (٢٢-٧) أن:

$$E\{MSAB\} + E\{MSAC\} - E\{MSABC\} = \sigma^2 + nc\sigma_{\alpha\beta}^2 + nb\sigma_{\alpha\gamma}^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 \tag{22.63}$$

وهذا يساوي بالضبط $E\{MSA\}$ عندما يكون $\sigma_\alpha^2 = 0$. وبالتالي، فإن إحصاءة الاختبار المقترحة هي :

$$F^{**} = \frac{MSA}{MSAB + MSAC - MSABC} \tag{22.64}$$

حيث نرمز لإحصاءة الاختبار بـ F^{**} لتذكّرنا بأننا استخدمنا شبه اختبار F.

مثال. يتضمن الجدول (٢٢-٩) تحليل التباين لدراسة تأثيرات العمال والآلات ودفعات المواد الأولية على الإنتاج اليومي لطريقة إنتاج مؤتمتة بصورة متقدمة، ويُفترض أن مستويات كل عامل عشوائية. ولاختبار ما إذا كان للعمال (العامل A) تأثير رئيس على الإنتاج، نستخدم إحصاءة الاختبار (22.64):

$$F^{**} = \frac{8.5}{2.5 + 4.0 + -1.5} = \frac{8.5}{5.0} = 1.7$$

والعدد التقريبي لدرجات الحرية الموافق للمقام هو:

$$df \cong \frac{(5.0)^2}{\frac{(2.5)^2}{2} + \frac{(4.0)^2}{8} + \frac{(-1.5)^2}{8}} = 4.6$$

ولا تتمخض العلاقة، عادة، عن عدد صحيح لدرجات الحرية. وعندئذ إما أن نقوم بعملية استيفاء في جدول التوزيع F، أو ندوّر إلى أقرب عدد صحيح. وفي هذا المثال سندوّر. ولمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ، نحتاج إلى $F(0.95; 2, 5) = 5.79$، وبما أن $F^{**} \leq 1.7 \leq 5.79$ فنأخذ بالنتيجة H_0، أي أنه لاتأثير للعمال على الإنتاج اليومي، وينبغي أن نتذكر أن هذا الاختبار تقريبي ولكنه: يمكن أن يكون مفيدا تماما إذا استُخدم بحذر.

جدول (٢٢-٩) جدول التحاين لدراسة تتضمن ثلاثة عوامل عشوائية ($a = 3, b = 2, c = 5, n = 3$)

مصدر المتغير	SS	df	MS
عامل A (العمال)	17	2	8.5
عامل B (الآلات)	4	1	4.0
عامل C (الدفعات)	25	4	6.2
التفاعلات AB	5	2	2.5
التفاعلات AC	32	8	4.0
التفاعلات BC	12	4	3.0
التفاعلات ABC	12	8	1.5
الخطأ	138	60	2.3
المجموع	245	89	

تقدير التأثيرات

لاتبرز مشاكل جديدة عند تطوير مقدرات غير منحازة لمركبات تباين عوامل عشوائية أو في تقدير مقارنات بين عوامل مثبتة في نماذج مختلطة، وذلك عند دراسة ثلاثة عوامل أو أكثر في الوقت نفسه. ونحصل على حدي الثقة لمقارنة بين متوسطات مستويات عامل مثبت باستخدام متوسط المربعات المذكور في مقام إحصاءة الاختبار المستخدمة لاختبار وجود التأثيرات الرئيسة لذلك العامل. ودرجات الحرية هي تلك الموافقة لمتوسط المربعات المستخدم.

مسائل

(٢٢-١) بالإشارة الى الجدول (٢٢-١) الذي يتضمن متوسطات الاستجابة لدراسة μ_{ijk} ذات ثلاثة عوامل.

أ ـ أوجد التأثيرات الرئيسة للعمر.

ب ـ أوجد تأثير التفاعل الرئيس للفتيان وذوي المستوى IQ العادي.

جـ ـ أوجد تأثير التفاعل : فتى – مستوى IQ عادي– أنثى.

(٢٢-٢) جهّز رسوم AC لمتوسطات الاستجابة μ_{ijk} في الجدول (٢٢-١)، وذلك في هيئة الشكل (٢٢-٢)ب. هل تقدم رسومك المعلومات نفسها التي يقدمها الشكل (٢٢-٤)؟ ناقش.

(٢٢-٣) جهّز رسوم BC لمتوسطات الاستجابة μ_{ijk} في الشكل (٢٢-٣)، هل تؤدي رسومك إلى أية معلومات عن التأثيرات الرئيسة والتفاعلات لم تكن متوفرة لحينها من الشكل (٢٢-٣)؟ ناقش.

(٢٢-٤) في دراسة ذات ثلاثة عوامل كانت متوسطات الاستجابة μ_{ijk} كما يلي:

	$k=1$		$k=2$	
	$j=1$	$j=2$	$j=1$	$j=2$
$i=1$	130	138	140	144
$i=2$	126	130	134	136
$i=3$	122	125	122	131

أ ـ أوجد α_1 وα_2 وα_3.

ب ـ أوجد β_1 و γ_1 .

جـ - أوجد $(\alpha\beta)_{12}$، $(\alpha\gamma)_{21}$ و $(\alpha\gamma)_{12}$.

د - أوجد $(\alpha\beta\gamma)_{111}$ و $(\alpha\beta\gamma)_{322}$.

(٢٢-٥) بالإشارة إلى المسألة (٢٢-٤)، جهز رسوم AB لمتوسطات الاستجابة μ_{ijk} في هيئة الشكل (٢٢-٣). ماذا تبين هذه الرسومات حول التأثيرات الرئيسة للعوامل وحول التفاعلات؟

(٢٢-٦) **مسألة تقسية:** نُفذت تجربة تتضمن تقسية أعمدة إدارة خفيفة ممكننة من قضبان صفيحة لدراسة تأثيرات مقدار وسيط كيميائي يضاف إلى الصفيحة وهي في حالة الانصهار (العامل A) ودرجة حرارة عملية التقسية (العامل B) والزمن المنصرم خلال عملية التقسية (العامل C)، وذلك على القساوة الخارجية لعمود الإدارة. ولكل من العوامل الثلاثة مستويان (1 منخفض؛ 2 مرتفع) وعدد الأعمدة المختبرة لكل معالجة كانت $n = 3$. وفيما يلي البيان الإحصائي للقساوة (مقاسة بوحدات برينل):

$k=2$		$k=1$		
$j=2$	$j=1$	$j=2$	$j=1$	
70.9	56.0	53.5	39.9	$i=1$
73.3	56.9	50.7	32.2	
71.6	56.6	52.8	36.3	
82.9	69.4	63.3	45.2	$i=2$
85.2	66.6	65.5	48.0	
82.3	68.8	63.6	47.5	

أ - أوجد الرواسب وفق نموذج التحاين (22.14) وجهِّز رسوما نقطية للرواسب من أجل كل مستوى من مستويات العامل A. قم بالعمل نفسه من أجل كل من العاملين الآخرين. ماذا تقترح رسومك حول مصداقية نموذج التحاين (22.14)؟

ب - نفِّذ رسم احتمال طبيعي للرواسب، وأوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت التوزيع الطبيعي. هل يبدو افتراض التوزيع الطبيعي معقولا هنا؟

(٢٢-٧) بالإشارة إلى **مسألة التقسية** (٢٢-٦). افترض أن نموذج التحاين المثبت (22.14) هو النموذج المناسب.

أ - جهّز رسوم AB لمتوسطات المعالجات المقدّرة $\bar{Y}_{ijk.}$ في هيئة الشكل (٢٢-٦)ب. هل يبدو أن هناك أية تفاعلات؟ أية تأثيرات رئيسة؟

ب - اكتب جدول تحليل التباين.

جـ - اختبر التفاعلات ثلاثية العوامل : استخدم $\alpha = 0.025$، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

د - اختبر التفاعلات AC ، AB و BC. ولكل اختبار، استخدم $\alpha = 0.025$ واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P لكل اختبار؟

هـ - اختبر التأثيرات الرئيسة لكل من A ، B و C ولكل اختبار، استخدم $\alpha = 0.025$ واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة، ما هي القيمة-P لكل اختبار؟

و - اعرض مجموعة النتائج التي يمكن الوصول إليها من الاختبارات في (جـ)، (د)، و(هـ). أوجد حدا أعلى لمستوى المعنوية العائلي لمجموعة الاختبارات ; استخدم متباينة كيمبل.

ز - هل تؤيد نتائج الجزء (و) تحليلك البياني في الجزء (آ)؟

(٢٢-٨) بالإشارة إلى مسألتي **التقسية** (٢٢-٦) و(٢٢-٧).

أ - لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة لعامل، قدّر المقارنات الثنائية التالية:

$$D_1 = \mu_{2..} - \mu_{1..} \quad D_2 = \mu_{.2.} - \mu_{.1.} \quad D_3 = \mu_{2..} - \mu_{.1}$$

استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 95 بالمائة. اعرض نتائجك.

ب - قدّر بـ 95% فترة ثقة.

(٢٢-٩) **مقاولو أبحاث التسويق**. قام مستشار في أبحاث التسويق بتقويم تأثيرات برنامج دفع الرسوم (العامل A)، أفق العمل (العامل B)، ونوع الإشراف الإداري (العامل C) على نوعية العمل المُنجز بموجب عقد من قِبَل وكالات

مستقلة لأبحاث التسويق. وكانت مستويات العوامل في الدراسة كما يلي:

العامل		مستويات العامل
A مستوى الرسم	$i = 1$	مرتفع
	$i = 2$	متوسط
	$i = 3$	منخفض
B أفق العمل	$j = 1$	أنجزت جميع العقود في الشركة
	$j = 2$	بعض العقود أنجزها مقاولون فرعيون
C الإشراف	$k = 1$	مشرفون مقيمون
	$k = 2$	مشرفون متنقلون

وقيست نوعية العمل المنجز وفق دليل يأخذ في الاعتبار عدة خصائص للنوعية. وقد اختيرت أربع وكالات لكل تركيبة من مستويات العوامل وقوّمت نوعية أعمالها. وفيما يلي قياسات النوعية:

	$k = 1$		$k = 2$	
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	124.3	115.1	112.7	88.2
	120.6	119.9	110.2	96.0
	120.7	115.4	113.5	96.4
	122.6	117.3	108.6	90.1
$i = 2$	119.3	117.2	113.6	92.7
	118.9	114.4	109.1	91.1
	125.3	113.4	108.9	90.7
	121.4	120.0	112.3	87.9
$i = 3$	90.9	89.9	78.6	58.6
	95.3	83.0	80.6	63.5
	88.8	86.5	83.5	59.8
	92.0	82.7	77.1	62.3

أ ـ أوجد الرواسب لنموذج التحاين (22.14) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. ماذا يقترح رسمك حول مصداقية نموذج التحاين (22.14)؟

ب ـ قم برسم احتمال طبيعي للرواسب، وأوجد معامل الارتباط بين

الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت التوزيع الطبيعي. هل يبدو افتراض التوزيع الطبيعي معقولا هنا؟

(٢٢-١٠) بالإشارة إلى مسألة **مقاولي أبحاث التسويق** (٢٢-٩) افترض أن نموذج التحاين المثبت (22.14) مناسب.

أ - جهّز رسوم AB لمتوسطات المعالجات المقدَّرة $\bar{Y}_{ijk.}$ في هيئة الشكل (٢٢-٦)ب. هل يبدو أن هناك أي تفاعلات؟ أي تأثيرات رئيسة؟

ب - جهّز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات مستويات العامل A المقدَّرة. ماذا يقترح هذا الرسم حول طبيعة التأثيرات الرئيسة للعامل A؟

جـ - اكتب جدول تحليل التباين.

د - اختبر التفاعلات ثلاثية العامل؛ استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة-P لهذا الاختبار؟

هـ - اختبر وجود التفاعلات AB, AC و BC. استخدم $\alpha = 0.01$ ما هي القيمة -P لكل اختبار؟

و - اختبر وجود التأثيرات الرئيسة للعامل A؛ استخدم $\alpha = 0.01$، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتائج، ما هي القيمة-P لهذا الاختبار؟

ز - اعرض مجموعة النتائج التي يمكن الوصول إليها من الاختبارات في الأجزاء (د)، (هـ)، (و). أوجد حدا أعلى لمستوى المعنوية العائلي لمجموعة الاختبارات. استخدم متباينة كيمبل.

ح - هل تؤيد نتائجك في الجزء (ز) تحليلك البياني في الجزئين (آ) و(ب)؟

(٢٢-١١) بالإشارة إلى مسألتي مقاولي **أبحاث التسويق** (٢٢-٩) و(٢٢-١٠).

أ - لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة للعامل A والتفاعلات BC، نرغب في تقدير المقارنات التالية:

$$D_1 = \mu_{1..} - \mu_{2..} \qquad D_4 = \mu_{.11} - \mu_{.12}$$
$$D_2 = \mu_{2..} - \mu_{3..} \qquad D_5 = \mu_{.21} - \mu_{.22}$$
$$D_3 = \mu_{1..} - \mu_{3..} \qquad L_1 = D_4 - D_5$$

استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 90% للقيام بالمقارنات المرغوبة. اعرض نتائجك.

ب - أوجد 95% فترة ثقة لـ $D = \mu_{121} - \mu_{221}$.

جـ - يرغب المستشار في تحديد نوع (أنواع) وكالات أبحاث التسويق المستقلة التي تقدم أعمالا بأعلى المواصفات. استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 90% للقيام بالتحديدات المرغوبة.

(٢٢-١٢) **تجميع الكترونيات**. يقوم عمال التجميع في شركة الكترونيات بإلحاق 12 قطعة بلوحة مطوّرة حديثا لاستخدامها في جهاز للتحكم الآلي في شركات صناعية. وقد قام محلل عمليات بتنفيذ تجربة لدراسة تأثيرات ثلاثة عوامل على متوسط زمن تجميع اللوحة. وكان العامل A هو جنس عامل التجميع ($i = 1$: ذكر ؛ $i = 2$: أنثى)، وكان العامل B هو تتابع القطع المجمَّعة ($j = 1, 2, 3$) وكان العامل C مقدار خبرة عامل التجميع ($k = 1$: تحت 18 شهرا ؛ $k = 2$: 18 شهرا أو أكثر). وقد استخدمت التعشية لتخصيص 15 عامل تجميع من كل جنس بمقدار معطى من الخبرة لكل من متتابعات التجميع الثلاث، حيث خُصّصت كل متتابعة لخمسة عمال تجميع. وبعد فترة التعلّم، قيس الزمن الكلي (بالدقائق) لتجميع 50 لوحة. وفيما يلي البيان الإحصائي:

	$k = 1$			$k = 2$		
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	1,250	1,319	1,217	1,021	1,119	1,033
	1,175	1,251	1,190	1,099	1,110	1,067
	1,236	1,241	1,201	1,069	1,123	1,057
	1,239	1,295	1,232	996	1,097	1,077
	1,193	1,265	1,251	1,070	1,163	1,022
$i = 2$	1,066	1,105	1,021	864	927	841
	1,076	1,043	1,020	848	944	865
	1,004	1,051	1,035	881	957	817
	1,002	1,128	1,000	892	897	911
	1,034	1,060	1,026	868	933	868

أ - أوجد رواسب نموذج التحاين (22.14) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. ماذا يقترح رسمك حول مصداقية نموذج التحاين (22.14).

ب - جهِّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. وأوجد، أيضا، معامل

الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت التوزيـع الطبيعـي،
هل يبدو افتراض التوزيع الطبيعي معقولا هنا؟.

(٢٢-١٣) بالإشارة إلى مسألة **تجميـع الالكترونيـات** (٢٢-١٢). افـترض أن نمـوذج التحاين (22.14) مناسب.

أ ـ جهِّز رسوم AB لمتوسطات المعالجـات المقـدَّرة $\bar{Y}_{ijk}$ في هيئـة الشـكل (٢٢-٦)ب. هل يبدو أن هناك أي تفاعلات؟ أي تأ ثيرات رئيسة؟

ب ـ لكل عامل جهِّز رسم احتمال طبيعـي لمتوسـطات مسـتويات العـامل المقدَّرة. ماذا تقترح هذه الرسومات حول طبيعة تأثيرات العوامل؟

جـ ـ اكتب جدول تحليل التباين

د ـ اختبر التفاعلات ثلاثية العامل، استخدم $\alpha = 0.05$. اعـرض البدائـل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

هـ ـ اختـبر التفـاعلات AC, AB و BC. ولكـل اختبـار اسـتخدم $\alpha = 0.05$ واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P لكل اختبار؟

و ـ اختبر التأثيرات الرئيسة لكل مـن B, A و C ولكـل اختبـار اسـتخدم $\alpha = 0.05$ ، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمـة-P لكل اختبار؟

ز ـ اعرض مجموعة النتائج التي يمكـن الوصـول إليهـا مـن الاختبـارات في الأجزاء (د)، (هـ) (و). أوجد حدا أعلـى لمسـتوى المعنويـة العـائلي لمجموعة الاختبارات، استخدم متباينة كيمبل.

ح ـ هل تؤيد النتائج في الجزء (ز) تحليلك البياني في الجزئين (أ) و (ب)؟

(٢٢-١٤) بالإشارة إلى مسألتي **تجميع الإلكترونيات** (٢٢-١٢) و (٢٢-١٣).

أ ـ لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة للعوامل قدّر المقارنات الثنائية التالية:

$$D_1 = \mu_{1..} - \mu_{2..} \qquad D_4 = \mu_{.2.} - \mu_{.3.}$$
$$D_2 = \mu_{.1.} - \mu_{.2.} \qquad D_5 = \mu_{..1} - \mu_{..2}$$
$$D_3 = \mu_{.1.} - \mu_{.3.}$$

استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 90% اعرض نتائجك.

ب ـ أوجد 95% فترة ثقة لـ μ_{231}.

(٢٢-١٥) من أجل نموذج التحاين المثبت (22.14) المتضمن لثلاثة عوامل، مـا هـي معملـة اللامركزية ϕ لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A؟ لاختبار التفاعلات AB؟.

(٢٢-١٦) بالإشـارة إلى مسـألتي **مقـاولي أبحـاث التسـويق** (٢٢-٩) و(٢٢-١٠)، افترض أن $\sigma = 3.0$. ما هي قوة الاختبـار للتأثيرات الرئيسـة للعـامل A في المسألة (٢٢-١٠) إذا كان $\mu_{1..} = 97, \mu_{2..} = 95, \mu_{3..} = 90$ ؟

(٢٢-١٧) بالإشـارة إلى مسـألتي **تجميـع الإلكترونيـات** (٢٢-١٢) و(٢٢-١٣). افترض أن $\sigma = 29$، ما هي قوة الاختبـار للتأثيرات الرئيسـة للعـامل B في المسألة (٢٢-١٣) إذا كان $\mu_{.1.} = 1050, \mu_{.2.} = 1100, \mu_{.3.} = 1060$؟

(٢٢-١٨) بالإشارة الى مسألة **التقسية** (٢٢-٦) لنفرض أن حجوم العينات لم تُحدد بعـد ولكـن تقـرر استخدام حجـوم عينـات متسـاوية لجميـع المعالجـات. والهدف الرئيس هو معرفة المعالجـة الـتي تـؤدي إلى أعلـى متوسـط تقسـية. واحتمال التعرّف على المعالجة الأفضل فعلا عندما يختلف متوسط التقسـية للمعالجة التي تليها في الأفضلية بمقدار 2.0 وحدة برينل أو أكثر، ينبغـي أن يصل إلى 0.99 علـى الأقـل. افـترض أن قيمـة تخطيطيـة معقولـة للإنحـراف المعياري للخطأ هي $\sigma = 1.8$. ماهي الحجوم التي نحتاجها للعينات؟

(٢٢-١٩) بالاشارة إلى مسألة **تجميع الإلكترونيات** (٢٢-١٢). لنفترض أن حجـوم العينات لم تُحدد بعد، ولكن تقرر استخدام حجـوم متسـاوية للعينـات في جميع المعالجات. وكان الهدف الرئيس هو تقدير المقارنات الثنائية التالية:

$$D_1 = \mu_{1..} - \mu_{2..} \qquad D_4 = \mu_{.2.} - \mu_{.3.}$$
$$D_2 = \mu_{.1.} - \mu_{.2.} \qquad D_5 = \mu_{..1} - \mu_{..2}$$
$$D_3 = \mu_{.1.} - \mu_{.3.}$$

ما هي حجوم العينات التي تحتاجها إذا كان ينبغي لدقة كل من التقديـرات ألا تتجاوز ±20، مسـتخدما طريقـة بونفـيروني بمعـامل ثقـة عـائلي 90% لمجموعة المقارنات مجتمعة؟ و$\sigma = 29$ هي قيمة تخطيطيـة معقولـة للانحـراف

المعياري للخطأ.

(٢٢-٢٠) بالإشارة إلى مسألة **التقسية** (٢٢-٦). لنفترض أن المشاهدتين $Y_{1211} = 53.5$ و$Y_{1212} = 50.7$ مفقودتان.

أ ـ اعرض نموذج الانحدار التام المكافىء لنموذج التحاين (22.14)؛ استخدم 1 ,1- ,0 كمتغيرات مؤشرة.

ب ـ ما هو النموذج المخفض لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A؟

جـ ـ اختبر ماإذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A موجودة أم لا بتوفيق النموذجين التام والمخفض؛ استخدم $\sigma = 0.025$، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة-P لهذا الاختبار؟

د ـ أوجد 95% فترة ثقة لِ $D = \mu_{2..} - \mu_{1..}$.

(٢٢ـ٢١) بالاشارة إلى مسألة **تجميع الإلكترونيات** (٢٢-١٢). لنفترض أن المشاهدات $Y_{1224} = 1097$,$Y_{2213} = 1051$ و $Y_{2125} = 868$ مفقودة.

أ ـ اكتب نموذج الانحدار التام المكافىء لنموذج التحاين (22.14)؛ استخدم 1 , 1- ,0 كمتغيرات مؤشرة.

ب ـ ما هو النموذج المخفض لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل C؟

جـ ـ اختبر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل C موجودة أم لا بتوفيق النموذجين التام والمخفض؛ استخدم $\alpha = 0.05$ اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة، ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

د ـ أوجد 90% فترة ثقة لـ $D = \mu_{.1} - \mu_{.2}$.

(٢٢-٢٢) بالإشارة إلى الجدول (٢٢-٩). جميع العوامل الثلاثة في تلك الدراسة لها تأثيرات عشوائية.

أ ـ اختبر ما إذا كانت التفاعلات AB موجودة أم لا، استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.

ب ـ اختبر ما إذا كان للآلات (العامل B) تأثيرات رئيسة. استخدم

مستوى معنوية $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.

(٢٢-٢٣) بالإشارة إلى مسألة تجميع الإلكترونيا ت (٢٢-١٢). لنفرض أن عدد المتتابعات التي يمكن إلحاق القطع باللوحة وفقا لها هو عدد كبير جدا، وأن المتتابعات الثلاث المدروسة قد اختيرت عشوائيا من مجموعة المتتابعات الممكنة التطبيق عمليا . افترض أن نموذج تحاين مع خطأ طبيعي قابل للتطبيق، وأن تأثيرات العاملين A و C مثبتة، بينما تأثيرات العامل D عشوائية. وفيما يلي بعض من توقعات متوسطات المربعات المناسبة لهذا النموذج:

$$E\{MSA\} = \sigma^2 + bcn\frac{\sum \alpha_i^2}{a-1} + cn\sigma_{\alpha\beta}^2$$

$$E\{MSB\} = \sigma^2 + acn\sigma_\beta^2$$

$$E\{MSAC\} = \sigma^2 + bn\frac{\sum\sum (\alpha\gamma)_{ik}^2}{(a-1)(c-1)} + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$$

$$E\{MSABC\} = \sigma^2 + n\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$$

$$E\{MSE\} = \sigma^2$$

أ ـ ما هي إحصاءة الاختبار المناسبة لاختبار التفاعلات AC؟ لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B؟

ب ـ اختبر ما إذا كانت التفاعلات AC موجودة أم لا؛ استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.

جـ ـ اختبر ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل B موجودة أم لا؛ استخدم $\alpha = 0.05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.

د ـ أوجد تقديرا نقطيا لِ σ_β^2.

(٢٢-٢٤) اعتبر نموذج التحاين المختلط (22.58) حيث أن تأثيرات العامل A مثبتة وتأثيرات كل من العاملين الآخرين عشوائية، أوجد F^{**} شبه إحصاءة اختبار F لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A. ما هو العدد التقريبي لدرجات الحرية الموافقة لمقام إحصاءة الاختبار هذه؟

تمارين

(٢٢-٢٥) بيّن، في نموذج التحاين المثبَّت (22.14) أن $\sum_i (\alpha\beta\gamma)_{ijk} = 0$.

(٢٢-٢٦) استنبط (22.23c) من (22.21a).

(٢٢-٢٧) استنبط تجزيء مجموع المربعات في (22.25).

(٢٢-٢٨) اعرض نموذج التحاين المثبت لدراسة تتضمن ثلاثة عوامل مع $n = 1$ وذلك عندما تكون جميع التفاعلات ثلاثية العامل صفرا . اكتب جدول التحاين لهذه الحالة.

(٢٢-٢٩) استنبط، في نموذج التحاين المثبت (22.14) تباين المقارنة المقدرة $\hat{L} = \sum\sum c_{ij}\overline{Y}_{ij.}$.

(٢٢-٣٠) أوجد، في نموذج التحاين العشوائي (22.56)، تباين المتوسط المقدَّر $\overline{Y}_{i..}$.

مشاريع

(٢٢-٣١) بالاشارة الى مجموعة البيانات ***SENIC*** سنعتبر مجموعة المستشفيات التالية في دراسة لتأثيرات متوسط عمر المرضى (عامل A : المتغير 3) والتسهيلات والخدمات المتوفرة (عامل B: متغيرة 12)، والمنطقة (عامل C متغير 9) على متوسط فترة بقاء المرضى في المستشفى (متغير 2):

1-14	16-28	31	32	34	35	37-39	41	44	46	50
52	53	57	58	63	66	76	77	83	111	

ولأغراض دراسة التحاين هذه، نصنف متوسط العمر إلى صنفين (أقل من 53.0 سنة، 53.0 سنة أو أكثر) ونصنف التسهيلات والخدمات المتوفرة إلى صنفين (أقل من 40.2 بالمائة، 40.2 بالمائة أو أكثر).

أ - جمّع البيانات المطلوبة وأوجد الرواسب لنموذج التحاين (22.14).

ب - أرسم الرواسب في مقابل القيم التوفيقية. ماذا يقترح رسمك حول مصداقية نموذج التحاين (22.14)؟

جـ - جهِّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. وأوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت التوزيع الطبيعي. هل يبدو

افتراض التوزيع الطبيعي معقولا هنا؟

(٢٢-٣٢) بالإشارة إلى مجموعة البيانات الإحصائية ***SENIC*** والمشروع (٢٢-٣١). افترض أن نموذج التحاين المثبت (22.14) مناسب.

أ - أرسم متوسطات المعالجات المقدَّرة $\bar{Y}_{ijk.}$ في هيئة الشكل (٢٢-٦)آ. هل يبدو أن هناك أي تأثيرات للعوامل؟ اشرح.

ب - جهِّز رسم احتمال طبيعي منفصل لمتوسطات مستويات العامل المقدَّرة، وذلك لكل عامل. ماذا تقترح هذه الرسومات حول طبيعة التأثيرات الرئيسة للعوامل؟

جـ - أوجد جدول تحليل التباين. هل يمكن اعتبار أي مصدر بمفرده من مصادر التغير مفسرا لمعظم التغير الكلي في الدراسة ؟ اشرح.

د - اختبر التفاعلات ثلاثية العامل؛ استخدم $\alpha = 0.01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P لهذا الاختبار؟.

هـ - اختبر التفاعلات AC, AB وBC، استخدم لكل اختبار $\alpha = 0.01$، واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P لكل اختبار؟

و - اختبر التأثيرات الرئيسة لـ A، B وC استخدم لكل اختبار، $\alpha = 0.01$، واعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة-P لكل اختبار؟

ز - لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة للتسهيلات المتوفرة والمنطقة، قم بكل المقارنات الثنائية الممكنة لكل من هذين العاملين، استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي. 90% اعرض نتائجك.

(٢٢-٣٣) بالإشارة الى مجموعة البيانات الإحصائية ***SMSA*** نريد دراسة تأثيرات المنطقة (عامل A : متغير 12)، النسبة المئوية للسكان في المدن المركزية (عامل B : متغير 4)، والنسبة المئوية لمن تبلغ أعمارهم 65 عاما أو أكثر (عامل C : متغير 5)، على معدل الجريمة (متغير 11 ÷ متغير 3). ولأغراض دراسة التحاين هذه نصنّف النسبة المئوية للسكان في المدن المركزية إلى صنفين 40% أو أقل، 40.1% أو أكثر) ونصنف النسبة المئوية لمن تبلغ

أعمارهم 65% أو أكثر إلى صنفين (9.9% أو أقل، 10.0% أو أكثر).

أ - جمّع البيانات المطلوبة وأوجد الرواسب لنموذج التحاين (22.14).

ب - أرسم الرواسب في مقابل القيم التوفيقية ماذا يقترح رسمك حول مصداقية نموذج التحاين (22.14).

جـ - جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. أوجد، أيضا، معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت التوزيع الطبيعي. هل يبدو افتراض التوزيع الطبيعي معقولا هنا؟

(٢٢-٣٤) بالإشارة إلى مجموعة البيانات الإحصائية *SMSA* والمشروع (٢٢-٣٣).

افترض أن نموذج التحاين ذا التأثيرات المثبتة (22.14) حيث $m = 1,\ldots, n_{ijk}$ هو نموذج مناسب.

أ - ارسم متوسطات المعالجات المقدَّرة $\bar{Y}_{ijk.}$ في هيئة الشكل (٢٢-٦)ب. هل يبدو أن هناك أي تأثيرات للعوامل؟

ب - اعرض نموذج الانحدار المكافىء في هذه الحالة؛ استخدم 1 ,1- ,0 كمتغيرات مؤشرة، وقم بتوفيق هذا النموذج التام.

جـ - اختبر التفاعلات ثلاثية العوامل، والتفاعلات AC, AB وBC. استخدم لكل اختبار $\alpha = 0.025$، واعرض البدائل، قاعدة القرار، و النتيجة، ما هي القيمة -P لكل اختبار؟

د - اختبر التأثيرات الرئيسة لـ B, A و C. استخدم لكل اختبار $\alpha = 0.025$، واعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة-P لكل اختبار؟

هـ - لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة للمنطقة، قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات المناطق. استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 95%. اعرض نتائجك.

الفصل الثالث والعشرون

تحليل التغاير

تحليل التغاير هو تقانة تجمع خصائص تحليل التباين والانحدار. ويمكن استخدامها في دراسات مشاهدة وفي تجارب مصمّمة. والفكرة الأساسية هي زيادة نموذج تحليل التباين الذي يتضمن تأثيرات العوامل بمتغير إضافي أو أكثر من المتغيرات الكمية التي تتصل بالمتغير التابع. والمقصود من هذه الزيادة هو تخفيض تباين حدود الخطأ في النموذج، أي جعل التحليل أكثر دقة. وقد تعرّضنا لنماذج التغاير باختصار في الفصل العاشر، وذكرنا هناك أنها نماذج خطية تتضمن متغيرات مستقلة نوعية ومتغيرات مستقلة كمية. وهكذا تكون نماذج التغاير مجرد حالة خاصة من نموذج الانحدار.

وفي هذا الفصل سندرس كيف يمكن أن يكون نموذج التغاير أكثر فعالية من نموذج التحاين العادي. ومن ثَمَّ سنناقش كيفية استخدام نموذج تغاير بعامل واحد للقيام باستقراءات مستفيدين من أسلوب الانحدار. ويتبع ذلك تبيان إمكانية النظر الى تحليل التغاير وكأنه، أيضا، تعديل لتحليل التباين، ونختم الفصل بالشروع في استخدام نماذج تحليل التغاير في دراسات متعددة العوامل بالإضافة إلى بعض الاعتبارات الإضافية في استخدام تحليل التغاير.

(٢٣-١) أفكار أساسية

كيف يُخفّض تحليل التغاير تشتت الخطأ

يمكن أن يشكل تحليل التغاير عونا في تخفيض تباينات كبيرة لحد الخطأ تتواجد أحيانا في نماذج تحليل التباين. لنأخذ في الاعتبار دراسة تتطرق إلى تأثيرات ثلاثة أفلام

مختلفة تشجع السفر في ولاية، ويتلقى الشخص استبيانا أوليا للحصول على معلومات حول مواقفه من الولاية. ويُعرض على الشخص عندئذ فيلم مدته خمس دقائق، ثم يُسأل مباشرة بعد ذلك عن الفيلم، عن رغبته في السفر ضمن الولاية، وهلمجرا.

وفي حالة من هذا النوع يمكن الانتفاع بتحليل التغاير. ولكي نرى لماذا يمكن أن يكون تحليل التغاير شديد الفعالية، لنتأمل في الشكل (٢٣-١)آ. فقد رُسمت هنا درجات الرغبة في السفر التي سُجلت بعد عرض كل فيلم من ثلاثة أفلام تشجيعية على مجموعة من خمسة أشخاص مختلفين. وقد استُخدمت ثلاثة رموز مختلفة للتمييز بين المعالجات المختلفة، ويتضح من الشكل (٢٣-١)أ أن حدود الخطأ، كما يبينها التبعثر حول متوسطات المعالجات μ_i، هي حدود كبيرة إلى حد ما، مما يشير إلى تباين كبير لحد الخطأ.

لنفرض الآن أننا استفدنا ،أيضا، من درجات الموقف الأولي للشخص. وقد رُسمت في الشكل (٢٣-١)ب درجة الرغبة في السفر (المسجلة بعد عرض الفيلم) مقابل درجة الموقف الأولي لكل من خمسة عشر شخصا . ونلاحظ أنه اتفق أن كانت علاقات الانحدار للمعالجات الثلاث خطية (ليس من الضروري أن يكون الأمر كذلك دائما). ونلاحظ، أيضا، أن التبعثر حول خطوط انحدار المعالجات الثلاث أقل بكثير من التبعثر حول متوسطات المعالجات μ_i في الشكل (٢٣-١)أ، وذلك كنتيجة لكون درجات الرغبة في السفر مرتبطة إرتباطا خطيا عاليا بدرجات الموقف الأولي. ويعكس التبعثر الكبير نسبيا في الشكل (٢٣-١)أ تشتتا كبيرا في حدود الخطأ يمكن أن تواجهنا في نموذج تحليل التباين لهذه الدراسة وحيدة العامل. ويعكس التبعثر الصغير في الشكل (٢٣-١)ب تشتتا أصغر لحد الخطأ الذي يمكن أن ينطوي عليه نموذج تحليل التغاير.

وهكذا نرى أن تحليل التغاير يستفيد من العلاقة بين المتغير التابع (درجة الرغبة في السفر في مثالنا) وواحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة الكمية، التي تتوفر لها

قياسات، (درجة الموقف قبل إجراء الدراسة في مثالنا) كي نخفض تشتت حد الخطأ ونجعل الدراسة أكثر فاعلية في مقارنة تأثيرات المعالجات.

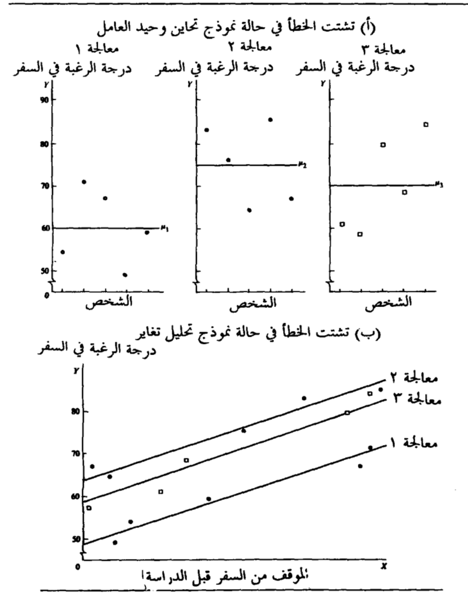
المتغيرات المصاحبة. في مصطلحات تحليل التغاير يدعى كل متغير كمي مستقل يُضاف إلى الدراسة متغيرا مصاحبا . ومن الواضح أن اختيار المتغيرات المصاحبة هو أمر مهم. وإذا لم يكن لمتغيرات كهذه علاقة بالمتغير التابع فلا شيء يُرجى من تحليل التغاير، ويمكن، وبالقدر نفسه من الجودة، استخدام نموذج تحليل تباين أبسط. و تتضمن المتغيرات المصاحبة، وهي متغيرات كثيرا ماتُستخدم عندما يكون الخاضعون للتجربة بشرا ، مواقف سابقة للدراسة، عمرا ، حاصل الذكاء (*IQ*) والقابلية، وعند استخدام المحلات التجارية كوحدات للدراسة، يمكن أن تكون المتغيرات المصاحبة مبيعات الفترة الأخيرة، وعدد المستخدمين.

اختيار المتغيرات المصاحبة. هناك مشكلة في اختيار المتغيرات المصاحبة يتميز بها تحليل التغاير. فمن أجل تفسيرات واضحة للنتائج ينبغي أن يُشاهد المتغير المصاحب قبل الدراسة; أو ينبغي، في حال مشاهدته خلال الدراسة أن لايتأثر بالمعالجات بأي طريقة من الطرق. وتحقق الدرجة التي تعبر عن الموقف قبل الدراسة مثل هذا المتطلب. وأيضا ، إذا كان من الممكن خلال الدراسة التحقق من عمر الخاضع للدراسة، فقد يكون من المنطقي أن نتوقع عدم تأثر الاستجابة حول العمر بالمعالجة. ومن المثال التالي يمكن أن نرى بسهولة سبب مثل هذا المتطلب: أقامت شركة مدرسة تدريب للمهندسين لتعليمهم مبادىء المحاسبة والميزانية. وقد استخدمت طريقتين.

وخُصّص مهندسون عشوائيا لإحداهما. وفي نهاية البرنامج تمَّ الحصول على درجة لكل مهندس تعكس مقدار تعلّمه. وقد قرر المحلل أن يستخدم كمتغير مصاحب، في تحليل تغاير، مقدار الزمن المكرّس للدراسة (الأمر الذي كان مطلوبا من كل مهندس أن يسجله). وبعد القيام بتحليل التغاير وجد المحلل أنه لم يكن لطريقة التدريب أي تأثير فعلي. وكان هذا محيرا له حتى لُفت نظره إلى أنه من المحتمل أن يتأثر بالمعالجات ،أيضا، مقدار الزمن المخصص للدراسة. وفي الحقيقة فقد أكد

التحليل ذلك. إذ انطوت إحدى طريقتي التدريب على تعلّم بمساعدة الحاسب مما كان له جاذبيته بالنسبة للمهندسين، فقضوا زمنا أكثر في الدراسة وتعلموا أيضا أكثر. وبعبارة أخرى، كان كل من درجة التعلم والزمن المكرّس للدراسة معتمدا على المعالجة في هذه الحالة.

شكل (٢٣-١) توضيح لتخفيض تشتت الخطأ بواسطة تحليل التغاير

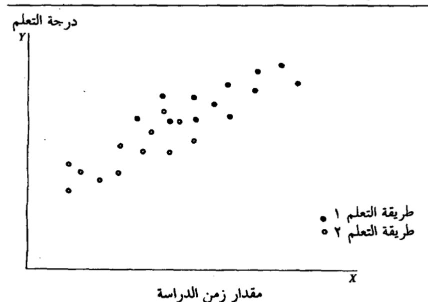


وعندما يتأثر المتغير المصاحب بالمعالجات، فإن تحليل التغاير سيزيل بعضا (أو كثيرا) من تأثير المعالجات على المتغير التابع، مما قد يجعل التحليل غير الممحّص مضللا بصورة رديئة. وينبغي اتخاذ الحرص الشديد في التحليل عند استخدام أسلوب تحليل التغاير مع متغير مصاحب يتأثر بالمعالجات.

ويبين الشكل (٢٣-٢) رسم انتشار لدرجة التعلم ومقدار زمن الدراسة للتجربة التي تتضمن تدريب المهندسين. والمعالجة ١ هي الطريقة التي تستخدم الحاسب كمساعد في التعلّم. ونلاحظ أن معظم الأشخاص تحت هذه المعالجة كرسوا أوقاتا كبيرة للدراسة. وعلى الوجه الآخر، يميل الأشخاص الذين تلقوا المعالجة ٢ إلى تكريس أوقات أقل للدراسة. وكنتيجة، تميل مشاهدات المعالجتين إلى التجمع فوق فترتين مختلفتين من المحور X.

قارن هذه الحالة مع تلك التي شاهدناها في الشكل (٢٣-١)ب في دراسة للأفلام التشجيعية. فالشكل (٢٣-١)ب يوضح كيف ينبغي أن تنتشر مشاهدات المتغير المصاحب إذا لم يكن للمعالجات تأثير على المتغير المصاحب. إذ نجد هنا أن توزيع الأشخاص على طول المحور X وفقا لدرجات الموقف السابق للدراسة، متشابه تقريبا لجميع المعالجات وخاضع ، فقط، لتغيرات تصادفية.

شكل (٢٣-٢) توضيح لمعالجات تؤثر في المتغير المصاحب



(٢٣-٢) نموذج تغاير وحيد العامل

يمكن تطبيق نماذج التغاير التي سنقدمها في هذا الفصل على دراسات مشاهدة ودراسات تجريبية مبنية وفق التصميم تام العشوائية. وفي المثال السابق عن تعلم المهندسين، خُصص المهندسون الأربعة وعشرون المشاركون في الدراسة بصورة عشوائية لطريقتي التعليم، حيث خُصص 12 مهندسا لكل طريقة تعليم. وهكذا قامت هذه الدراسة التجريبية على تصميم تام العشوائية.

ونماذج التغاير التي سنقدمها في هذا الفصل قابلة للتطبيق، أيضا، على دراسات مشاهدة، مثل تقصّي الزيادات في رواتب مستخدمي شركة في قسم المحاسبة وفقا للجنس، مع اتخاذ العمر كمتغير مصاحب.

رموز

سنستخدم رموز تحليل التباين بعامل واحد، فنرمز بـ n_i لعدد المشاهدات الخاصة بالمستوى i للعامل المدروس، وللعدد الكلي للمشاهدات بـ $n_T = \sum n_i$، ونرمز بـ Y_{ij} للمشاهدة j للمتغير التابع وحيث يكون العامل في مستواه الـ i. وسنستهل بدراسة نموذج تغاير وحيد العامل مع متغير مصاحب واحد. وندرس لاحقا نماذج بأكثر من متغير مصاحب واحد. وسنرمز بـ X_{ij} لقيمة المتغير المصاحب الموافقة للمشاهدة j وحيث يكون العامل في مستواه الـ i.

تطوير نموذج تغاير

أُعطي نموذج التحاين وحيد العامل بدلالة تأثيرات مثبّتة للعامل في (14.60) كما يلي:

$$Y_{ij} = \mu_{.} + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad (23.1)$$

ويبدأ نموذج التغاير بهذا النموذج ويضيف، ببساطة، حدا آخر (أو عدة حدود)، يعكس العلاقة بين المتغيرين المصاحب والتابع. وكتقريب أول تُستخدم عادة علاقة خطية:

$$Y_{ij} = \mu_{.} + \tau_i + \gamma X_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad (23.2)$$

و γ هنا هو معامل انحدار للعلاقة بين Y و X. والآن لم يعد الثابت $\mu_{.}$ متوسطا إجماليا . وعلى أي حال، يمكن أن نجعل هذا الثابت متوسطا إجماليا ، مما يبسّط

بالمناسبة بعض الحسابات، وذلك بالتعبير عن المتغير المصاحب كانحراف عن المتوسط الإجمالي $\overline{X}_{..}$. والنموذج الناتج هو نموذج التغاير المعتاد لدراسة وحيدة العامل مع مستويات مثبتة للعامل:

$$Y_{ij} = \mu_{.} + \tau_i + \gamma(X_{ij} - \overline{X}_{..}) + \varepsilon_{ij} \qquad (23.3)$$

حيث:

$\mu_{.}$ متوسط إجمالي

τ_i تأثيرات مثبتة للمعالجات خاضعة للقيد $\sum \tau_i = 0$

γ معامل انحدار للعلاقة بين Y و X

X_{ij} ثوابت

ε_{ij} مستقلة و$N(0, \sigma^2)$

$i = 1,..., r \,;\, j = 1,..., n_i$

ويقابل نموذج التغاير (23.3) نموذج التحاين (23.1) باستثناء الحد المضاف $\gamma(X_{ij} - \overline{X}_{..})$ ليعكس العلاقة بين Y و X. وتجدر ملاحظة أن المشاهدات المصاحبة X_{ij} قد افترضت ثابتة. وبما أن ε_{ij} هو المتغير العشوائي الوحيد في الجانب الأيمن من (23.3)، فنستنتج على الفور أن:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu_{.} + \tau_i + \gamma(X_{ij} - \overline{X}_{..}) \qquad (23.4a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ij}\} = \sigma^2 \qquad (23.4b)$$

وبما أن الـ ε_{ij} مستقلة، فإن الـ Y_{ij} مستقلة، أيضا، . وبالتالي فإن العبارة البديلة لنموذج التغاير (23.3) هي:

Y_{ij} مستقلة و $N(\mu_{ij}, \sigma^2)$ (23.5)

حيث:

$$\mu_{ij} = \mu_{.} + \tau_i + \gamma(X_{ij} - \overline{X}_{..})$$

$$\sum \tau_i = 0$$

خواص نموذج التغاير

بعض خواص نموذج التغاير (23.3) مطابقة لخواص نموذج التحاين (23.1).

وعلى سبيل المثال، حدود الخطأ ε_{ij} مستقلة ولها تباين ثـابت. وهنـاك، أيضـا، بعـض الخواص الجديدة، ونناقش هذه الخواص الآن.

مقارنات تأثيرات المعالجات. في نموذج تحليل التباين يكون لجميع مشاهدات المعالجـة i متوسـط الاسـتجابة نفسـه (μ_i). وليـس الأمـر كذلـك في نمـوذج التغـاير، باعتبـار أن متوسط الاستجابة لا يعتمد هنا، فقط، على المعالجة ولكن، أيضـا، علـى قيمـة المتغـير المصاحب X_{ij} لوحدة الدراسة. وهكذا، فـإن الاسـتجابة المتوقعـة للمعالجـة i في نمـوذج التغاير (23.3) معطى بخط الانحدار:

$$\mu_{ij} = \mu_{.} + \tau_i + \gamma(X_{ij} - \bar{X}_{..}) \qquad (23.6)$$

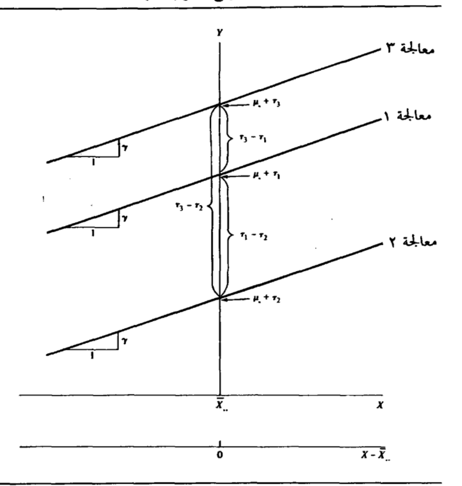
وهو يشير إلى متوسط الاستجابة للمعالجة i مـن أجـل أي قيمـة لـ X. ويوضـح الشكل (٢٣-٣)، لدراسـة بثـلاث معالجـات، كيـف يمكـن أن تبـدو خطـوط انحـدار المعالجات هذه. ونلاحظ أن $\mu_{.} + \tau_i$ هـو ترتيـب (الإحداثـي الصـادي) خـط الانحـدار للمعالجة i عندما يكون $X - \bar{X}_{..} = 0$، أي عندما يكون $X = \bar{X}_{..}$، وأن γ هو ميل كـل خط. وبما أن لجميع خطوط انحدار المعالجات الميل نفسه، فإن هذه الخطوط متوازية.

وبينما لا يمكننا أن نتحدث عن المزيـد عـن متوسـط الاسـتجابة للمعالجـة i باعتبـاره يتغير بتغير X، إلا أنـه يمكننـا قيـاس تأثـير أي معالجـة بالمقارنـة مـع أي معالجـة أخـرى بواسطة عدد بمفرده. وفي الشكل (٢٣-٣)، علـى سـبيل المثـال، تـؤدي المعالجـة 1 إلى متوسط استجابة أعلى من المعالجة 2، بصرف النظر عن قيمة X. والفرق بين متوسـطي الاستجابة هو نفسه من أجل جميع قيم X، باعتبار أن ميول خطوط الانحدار متسـاوية. وبالتالي يمكن قياس الفرق عند أي قيمة مريحة لـ X مثلا $X = \bar{X}_{..}$:

$$\mu_{.} + \tau_1 - (\mu_{.} + \tau_2) = \tau_1 - \tau_2 \qquad (23.7)$$

وهكذا يقيس $\tau_1 - \tau_2$ كم يكون متوسط الاستجابة للمعالجة 1 أعلى من متوسـط الاستجابة للمعالجة 2 وذلـك مـن أجـل أي قيمـة لـ X. ويمكـن مقارنـة أي معـالجتين أُخريـين بصـورة مماثلـة. وينتـج مـن هـذه المناقشـة مباشـرة أنـه عندمـا يكـون لجميـع المعالجات، ولكل X، متوسط الاستجابة نفسه. (أي عندما لاتوجد فروق تفاضلية بـين المعالجات)، فيجب أن تكون خطوط انحدار المعالجات متطابقة ؛ وبالتالي $\tau_1 - \tau_2 = 0$، $\tau_1 - \tau_3 = 0$، إلخ. وفي الحقيقة، جميع المعالم τ_i تساوي الصفر في تلك الحالة.

شكل (٢٣-٣) خطوط انحدار المعالجات لنموذج التغاير (23.3)



ثبات الميول. إن الفرض بأن لجميع خطوط الانحدار، في نموذج التغاير (23.3)، الميل نفسه، هو فرض حاسم. وبدونه لايمكن تلخيص الفرق بين تأثيري معالجتين بعدد بمفرده محسوب من التأثيرات الرئيسة، مثل $\tau_1 - \tau_2$. ويوضح الشكل (٢٣-٤) حالة ميول غير متوازية لمعالجتين. وهنا تؤدي المعالجة 1 إلى متوسطات استجابة أعلى من المعالجة 2 من أجل بعض قيم X ويكون العكس صحيحا من أجل قيم أخرى لـ X. وعندما تتفاعل خطوط انحدار المعالجات مع المتغير المصاحب X في شكل ميول غير متوازية، فإن تحليل التغاير لايكون مناسبا . وبدلا من ذلك ينبغي تقدير خطوط انحدار معالجات منفصلة ثم مقارنتها.

تعميمات نموذج التغاير

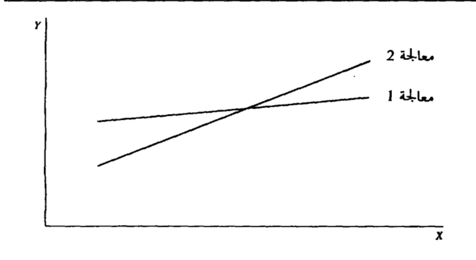
يمكن تعميم نموذج التغاير (23.3) لدراسات تتضمن عاملا واحدا من نواح عدة. ونذكر بإيجاز ثلاث طرق يمكن تعميم هذا النموذج وفقا لها.

المقادير X غير ثابتة. يفترض نموذج التغاير (23.3) أن المشاهدات X_{ij} للمتغير المصاحب ثابتة. وأحيانا قد يكون من المعقول أكثر أن نعتبر المشاهدات المصاحبة كمتغيرات عشوائية. وفي هذه الحالة، إذا رغبنا في تفسير نموذج التغاير (23.3) كنموذج شرطي، نطبقه من أجل أية قيم ملحوظة لـ X، فإن تحليل التغاير الذي سنقدمه يبقى تحليلا مناسبا .

لاخطية العلاقة. العلاقة الخطية المفترضة بين Y و X في نموذج التغاير (23.3) ليست أمرا جوهريا لتحليل التغاير، إذ يمكن استخدام أية علاقة أخرى. وعلى سبيل المثال، قد يكون النموذج كما يلي من أجل علاقة تربيعية:

$$Y_{ij} = \mu_{.} + \tau_i + \gamma_1(X_{ij} - \overline{X}_{..}) + \gamma_2(X_{ij} - \overline{X}_{..})^2 + \varepsilon_{ij} \qquad (23.8)$$

شكل (٢٣-٤) خطوط انحدار معالجات غير متوازية



تقود خطية العلاقة إلى تحليل أبسط، وفي الغالب تكون تقريبا جيدا بما فيه الكفاية لتقديم نتائج ذات مغزى. وإذا لم تشكل العلاقة الخطية تقريبا جيدا فينبغي استخدام

وصف للعلاقة في تحليل التغاير يكون أكثر ملاءمة.

عدة متغيرات مصاحبة. يستخدم النموذج (23.3) متغيرا مصاحبا واحدا ، وفي الغالب يكون هذا كافيا لتخفيض تشتت الخطأ تخفيضا كبيرا . إلا أنه يمكن تعميم النموذج بطريقة لاصعوبة فيها بحيث يشمل متغيرين أو ثلاثة متغيرات مصاحبة. ونموذج التغاير وحيد العامل، مع متغيرين مصاحبين X_1 و X_2 وإلى المرتبة الأولى، سيكون على الشكل التالي:

$$Y_{ij} = \mu_{.} + \tau_i + \gamma_1(X_{ij1} - \overline{X}_{..1}) + \gamma_2(X_{ij2} - \overline{X}_{..2}) + \varepsilon_{ij} \qquad (23.9)$$

صياغة انحدارية لنموذج التغاير

ونجد من خلال أسلوب الانحدار طريقة سهلة لتقدير معالم نموذج التغاير (23.3) والقيام باستقراءات.(إذا لم يكن القارىء قد قرأ بعد الفقرات(١٠-١) إلى(١٠-٤) فينبغي له القيام بذلك قبل المضي في هذه الفقرة).

وفيما يتعلق بنماذج تحليل التباين، سنستخدم $r - 1$ متغيرا مؤشرا يأخذ كل منها القيم 1 , 1- أو 0 لتمثيل المعالجات الـ r:

$$I_1 = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت المشاهدة من المعالجة } 1 \\ -1 & \text{إذا كانت المشاهدة من المعالجة } r \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad (23.10)$$

$$I_{r-1} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت المشاهدة من المعالجة } r-1 \\ -1 & \text{إذا كانت المشاهدة من المعالجة } r \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

لاحظ أننا نرمز الآن للمتغيرات المؤشرة بالرمز I للتمييز الواضح بين تأثيرات المعالجات والمتغير المصاحب X.

وفي التعبير عن نموذج التغاير في شكل انحداري، سنرمز، كما في فصول الانحدار، للانحراف $X_{ij} - \overline{X}_{..}$ بـ x_{ij}. وعندئذ يمكن التعبير عن نموذج التغاير (23.3) كما يلي:

$$Y_{ij} = \mu_{.} + \tau_1 I_{ij1} + \ldots + \tau_{r-1} I_{ij,r-1} + \gamma x_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad (23.11)$$

حيث:

$$x_{ij} = X_{ij} - \overline{X}$$

وهنا I_{ij1} هو المتغير المؤشر I_1 من أجل المشاهدة j من المعالجة i، وبصورة مماثلة من أجل المتغيرات المؤشرة الأخرى، لاحظ أن تأثيرات المعالجات τ_1 ,..., τ_{r-1} هي معاملات الانحدار للمتغيرات المؤشرة.

والآن وقد صغنا نموذج التغاير (23.3) كنموذج انحدار، فيمكن تطبيق المناقشة السابقة لتحليل الانحدار. ولذلك سندرس، فقط، وبإيجاز كيف نختبر صلاحية نموذج التغاير وكيف نقوم بالاستقراء ثم نتحول إلى مثال لتوضيح الطرق.

صلاحية نموذج التغاير

نبحث بعض القضايا الرئيسة المتعلقة بصلاحية نموذج التغاير (23.3) ونموذج الانحدار المكافىء (23.11) فيما يلي:

١ـ طبيعية حدود الخطأ.

٢ـ تساوي تباينات الخطأ للمعالجات المختلفة.

٣ـ تساوي ميول خطوط انحدار المعالجات المختلفة.

٤ـ خطية علاقة الانحدار لمتغير مصاحب.

٥ـ عدم ارتباط حدود الخطأ.

والقضية الجديدة الوحيدة في تقويم صلاحية النموذج هي تساوي ميول خطوط انحدار المعالجات المختلفة. وقد ناقشنا في الفقرة ١٠-٤ كيفية مقارنة عدة خطوط انحدار، وتلك المناقشة قابلة للتطبيق لاختبار ماإذا كان شرط الميول المتساوية في نموذج التغاير محققا . وسنوضح هذا الاختبار في مثال في الفقرة ٢٣-٣.

استقراءات ذات أهمية

الاستقراءات الإحصائية الرئيسة ذات الشأن في تحليل التغاير هي نفسها كما في نماذج تحليل التباين، ونقصد ما إذا كان للمعالجات أية تأثيرات، وإذا كان الأمر كذلك، فما هي هذه التأثيرات. وينطوي اختبار تأثيرات مثبتة للمعالجات على

البدائل نفسها كما في نماذج تحليل التباين:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_r = 0$$

(23.12) H_a: ليست جميع قيم τ_i مساوية للصفر

وبالإشارة إلى نموذج الانحدار المكافىء (23.11) ، فإن هذا الاختبار ينطوي ببساطة على اختبار ما إذا كانت عدة معاملات انحدار مساوية للصفر. وإحصاءة الاختبار المناسبة إذا هي تلك المذكورة في (8.25).

وإذا اختلفت المعالجات، فإننا نرغب عادة في تقصّي طبيعة هذه التأثيرات. وقد تكون المقارنات الثنائية $\tau_i - \tau_{i'}$ بين تأثيري معالجتين ذات أهمية (المسافة الرأسية بين خطي انحدار معالجتين)، أو بصورة أعم يمكن أن تكون مقارنات بين الـ τ_i مفيدة. وفي الحالتين كلتيهما، نحتاج إلى تقدير تراكيب خطية في معاملات الانحدار $\tau_1, ..., \tau_{r-1}$.

ومن وقت لآخر تكون طبيعة علاقة الانحدار بين Y و X ذات أهمية، إلا أن المتغير المصاحب X يُستخدم ،فقط، للمساعدة في تخفيض تشتت الخطأ.

ملاحظة

في تحليل التغاير لا نهتم عادة بما إذا كان معامل الانحدار γ صفرا ، أي بما إذا كانت توجد، في الحقيقة، علاقة انحدار بين Y و X. وعدم وجود علاقة لايؤدي إلى انحياز في تحليل التغاير. ويكون متوسط مربعات الخطأ ببساطة هو نفسه كما في نموذج تحليل التباين (ممثلا لتغيّر المعاينة)، مع فقدان درجة واحدة من الحرية من درجات متوسط مربعات الخطأ.

وعندما تتساوى أهمية المتغير المصاحب وأهمية تأثيرات المعالجات، فينبغي استخدام الطرق المقدمة في الفصل العاشر لإنجاز التحليل الخاص بالمتغير المصاحب.

(٢٣-٣) مثال تحليل تغاير وحيد العامل

ترغب شركة في دراسة تأثيرات ثلاثة أنواع مختلفة من الترويج على مبيعات نوع من البسكويت. وكانت أنواع الترويج الثلاثة:

معالجة ١ـ معاينة المُنتَج من قِبل الزبائن في المخزن وحيّز رف عادي.

معالجة ٢ـ حيز رف إضافي في مواقع عادية.

معالجة ٣ـ رفوف عرض خاصة في نهايتي ممر بالإضافة إلى حيز رف عادي. اختير خمسة عشر مخزنا للدراسة واستخدم تصميم تجريبي تام العشوائية. وقد خُصص كل مخزن عشوائيا إلى إحدى أنواع الترويج، خمسة مخازن لكل نوع. والشروط الأخرى المتصلة بموضوع الدراسة والتي تقع تحت سيطرة الشركة، مثل السعر والدعاية، بقيت نفسها من أجل جميع المخازن الداخلة في الدراسة. ونقدم في الجدول (٢٣-١)أ بيانات عن عدد حالات بيع المُنتَج خلال فترة الترويج، ونرمز لها بـ Y، وأيضا ، بيانات عن مبيعات المنتج في الفترة السابقة، ونرمز لها بـ X. وستُستخدم مبيعات الفترة السابقة كمتغير مصاحب.

جدول (٢٣ـ١) بيانات مثال الترويج لمبيعات نوع من البسكويت (عدد عبوات البسكويت المباعة).

(أ) بيانات

مخزن (j)										
5		4		3		2		1		معالجة
X_{i5}	Y_{i5}	X_{i4}	Y_{i4}	X_{i3}	Y_{i3}	X_{i2}	Y_{i2}	X_{i1}	Y_{i1}	i
19	33	28	45	22	36	26	39	21	38	1
25	34	18	27	29	38	26	38	34	43	2
29	28	16	21	30	31	29	32	23	24	3

(ب) متوسطات، مجاميع، ومجاميع مربعات ومجاميع جداءات

$$\bar{Y}_{1.} = 38.2 \quad \bar{Y}_{2.} = 36.0 \quad \bar{Y}_{3.} = 27.2 \quad \bar{Y}_{..} = 33.8$$

$$\bar{X}_{1.} = 23.2 \quad \bar{X}_{2.} = 26.4 \quad \bar{X}_{31.} = 25.4 \quad \bar{X}_{..} = 25.0$$

$\sum_j X_{ij}Y_{ij}$	$\sum_j X_{ij}^2$	$\sum_j X_{ij}$	$\sum_j Y_{ij}^2$	$\sum_j Y_{ij}$	معالجة i
4,491	2,746	116	7,375	191	1
4,888	3,622	132	6,622	180	2
3,558	3,367	127	3,786	136	3
12,937	9,735	375	17,783	507	المجموع

تطوير النموذج

يقدم الشكل (٢٣-٥) بيانات الجدول (٢٣-١)أ في هيئة رسم انتشار ويبدو الانحدار الخطي وتوازي الميول لخطوط انحدار المعالجات معقولين. ولذلك، فقد اختير

مبدئيا نموذج الانحدار التالي:

$$Y_{ij} = \mu_{.} + \tau_1 I_{ij1} + \tau_2 I_{ij2} + \gamma x_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad \text{نموذج تام} \tag{23.13}$$

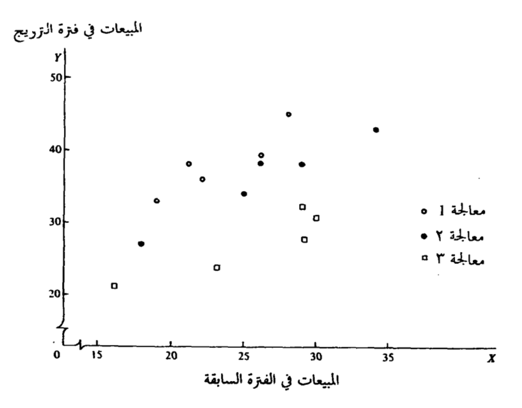
حيث:

$$I_{ij1} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تلقى المخزن المعالجة } 1 \\ -1 & \text{إذا تلقى المخزن المعالجة } 3 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$I_{ij2} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تلقى المخزن المعالجة } 2 \\ -1 & \text{إذا تلقى المخزن المعالجة } 3 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$x_{ij} = X_{ij} - \overline{X}_{..}$$

شكل (٢٣-٥) رسم انتشار لمبيعات نوع البسكويت- مثال ترويج نوع من البسكويت.



ومتجه المشاهدات **Y** والمصفوفة **X** لبيانات الجدول (٢٣-١)آ معطاة في الجدول (٢٣-٢). وقد أدت تشغيلة حاسب لحزمة الانحدار المتعدد إلى النتائج الملخصة في الجدول (٢٣-٣).

وبعدها تم الحصول على الرسوم المختلفة للرواسب لاختبار صلاحية نموذج الانحدار (23.13). ويتضمن الشكل (٢٣-٦) اثنين منها. إذ يتضمن الشكل (٢٣-٦)آ رسوما نقطية للمعالجات الثلاث. ولاتقترح هذه أية فروق رئيسة في تباينات حدود الخطأ ويتضمن الشكل (٢٣-٦)ب رسم احتمال طبيعي للرواسب، وهو يبين انحرافا متواضعا عن الخطية. إلا أن معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت التوزيع الطبيعي هو 0.958 مما لايقترح أي انحراف مهم عن الطبيعية. وقد قام المحلل باختبار تساوي ميول خطوط انحدار المعالجات الثلاث وسنصف هذا الاختبار باختصار. وعلى أساس هذه التحليلات استنتج المحلل أن نموذج الانحدار (23.13) هو نموذج مناسب هنا.

اختبار تأثيرات المعالجات

لاختبار ما إذا كانت تراويج البسكويت الثلاثة مختلفة في فعاليتها يمكننا أن نتبع إما أسلوب اختبار الخطية العام فنوفّق النموذجين التام والمخفّض، ونستخدم إحصاءة الاختبار (3.69)، أو نستخدم مجاميع مربعات إضافية وإحصاءة الاختبار (8.25). وفي الحالتين كلتيهما، تكون البدائل:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = 0 \qquad (23.14)$$

H_a: ليس كل من τ_1 و τ_2 مساوٍ للصفر

لاحظ أن $\tau_3 = \tau_1 - \tau_2$ لابد أن تساوي الصفر عندما يكون $\tau_1 = \tau_2 = 0$.

وسنقوم بالاختبار مستخدمين أسلوب اختبار الخطية العام، فنطوّر أولا النموذج المخفض تحت H_0:

$$Y_{ij} = \mu_. + \gamma x_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad (23.15)$$

النموذج المخفض

والنموذج (23.15) هو مجرد نموذج انحدار خطي بسيط لاتختلف فيه أي من المعالم باختلاف المعالجات. ومصفوفات البيانات لهذا النموذج مبينة في الجدول (٢٣-٤)آ ونتائج تحليل التباين معروضة في الجدول (٢٣-٤)ب.

جدول (٢٣-٢) مصفوفات البيانات في مثال ترويج البسكويت – نموذج التغاير (23.13)

$$
\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}38\\39\\36\\45\\33\\43\\38\\38\\27\\34\\24\\32\\31\\21\\28\end{bmatrix}
\qquad
\mathbf{X}=\begin{bmatrix}
 & I_1 & I_2 & x\\
1 & 1 & 0 & 21-25=-4\\
1 & 1 & 0 & 26-25=1\\
1 & 1 & 0 & 22-25=-3\\
1 & 1 & 0 & 28-25=3\\
1 & 1 & 0 & 19-25=-6\\
1 & 0 & 1 & 34-25=9\\
1 & 0 & 1 & 26-25=1\\
1 & 0 & 1 & 29-25=4\\
1 & 0 & 1 & 18-25=-7\\
1 & 0 & 1 & 25-25=0\\
1 & -1 & -1 & 23-25=-2\\
1 & -1 & -1 & 29-25=4\\
1 & -1 & -1 & 30-25=5\\
1 & -1 & -1 & 16-25=-9\\
1 & -1 & -1 & 29-25=4
\end{bmatrix}
$$

جدول (٢٣-٣) مُخرجات الحاسب لمثال ترويج البسكويت–نموذج التغاير (23.13)

(أ) معاملات الانحدار

$\hat{\mu}_{.}=33.800$ $\qquad$ $\hat{\tau}_2=.942$

$\hat{\tau}_1=6.017$ $\qquad$ $\hat{\gamma}=.899$

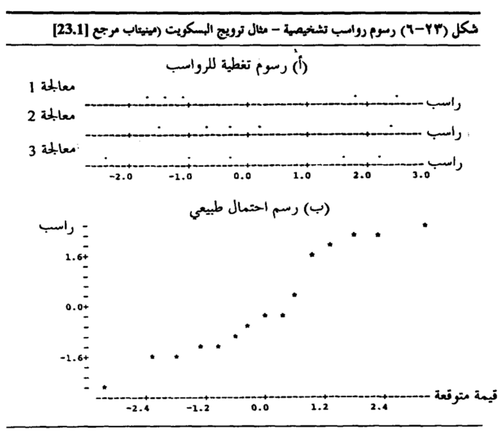
(ب) تحليل التباين

مصدر التغير	*SS*	*df*	*MS*
الانحدار	$SSR=607.829$	3	$MSR=202.610$
الخطأ	$SSE=38.571$	11	$MSE=3.506$
المجموع	$SSTO=646.400$	14	

(ج) مصفوفة تباين تغاير تفاعلات الانحدار المقدَّرة

$$
\begin{array}{c}
 \\ \hat{\mu}_{.}\\ \hat{\tau}_1\\ \hat{\tau}_2\\ \hat{\gamma}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}\hat{\mu}_{.} & \hat{\tau}_1 & \hat{\tau}_2 & \hat{\gamma}\end{array}\\
\begin{bmatrix}
.2338 & & & \\
0 & .5016 & & \\
0 & -.2603 & .4882 & \\
0 & .0189 & -.0147 & .0105
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

شكل (٢٣-٦) رسوم رواسب تشخيصية – مثال ترويج البسكويت (مينيتاب مرجع [23.1]



ونرى من الجدول (٢٣-٤)ب أن $SSE(R) = 455.722$ ومن الجدول (٢٣-٣)ب أن $SSE(F) = 38.571$. وبالتالي تكون إحصاءة الاختبار (3.69) هنا:

$$F^* = \frac{SSE(R) - SSE(F)}{(n_T - 2) - [n_{rT} - (r+1)]} \div \frac{SSE(F)}{n_T - r - 1}$$

$$= \frac{455.722 - 38.571}{13 - 11} \div \frac{38.571}{11} = 59.5$$

وسنتحكم بمستوى المعنوية عند $\alpha = 0.05$ ، فنحتاج معه إلى $F(0.95,2,11)=38.571$.
وتكون قاعدة القرار بالتالي:

إذا كان $F^* \leq 3.98$ استنتج H_0

إذا كان $F^* > 3.98$ استنتج H_a

وبما أن $F^* = 59.5 > 3.98$ فنستنتج H_a ، أي أن التراويج الثلاثة للبسكويت تختلف في فعالياتها بالنسبة للمبيعات. القيمة-P لهذا الاختبار هي 0^+.

جدول (٢٣-٤) بيانات على شكل مصفوفات ونتائج الانحدار لمثال ترويج مبيعات نوع من البسكويت - النموذج المخفض (23.15).

(أ) مصفوفات البيانات

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}38\\39\\36\\45\\33\\43\\38\\38\\27\\34\\24\\32\\31\\21\\28\end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}=\begin{bmatrix}1 & -4\\1 & 1\\1 & -3\\1 & 3\\1 & -6\\1 & 9\\1 & 1\\1 & 4\\1 & -7\\1 & 0\\1 & -2\\1 & 4\\1 & 5\\1 & -9\\1 & 4\end{bmatrix}$$

(عمود x هو العمود الثاني في $\mathbf{X}$)

(ب) تحليل تباين

مصدر التغير	SS	df
الانحدار	$SSR = 190.678$	1
الخطأ	$SSE = 455.722$	13
المجموع	$SSTO = 646.400$	14

ملاحظة

يكون اختبار ما إذا كانت $\gamma = 0$ أم لا مفيدا من وقت لآخر. وهذا هو ببساطة اختبار ماإذا كان معامل انحدار بمفرده مساويا للصفر أم لا. ويمكن القيام بهذا الاختبار باستخدام إحصاءة الاختبار t^* في (8.23)، أو باستخدام إحصاءة الاختبار F^* في (8.22).

تقدير تأثيرات المعالجات

بما أننا عثرنا على حضور لتأثيرات المعالجات في دراسة ترويج البسكويت فقد رغب المحلل في مزيد من التقصّي لهذه التأثيرات. وقد لاحظنا سابقا أن مقارنة معالجتين تنطوي على فرق من النوع $\tau_i - \tau_{i'}$، المسافة الرأسية بين خطي انحدار معالجتين. وباستخدام النظرية (1.27b) حول التباينات وحقيقة أن $\tau_3 = -\tau_1 - \tau_2$ نجد في الحال أن مقدرات جميع المقارنات الثنائية وتبايناتها هي كما يلي:

مقارنة	مقدّر	تباين	
$\tau_1 - \tau_2$	$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2$	$\sigma^2\{\hat{\tau}_1\} + \sigma^2\{\hat{\tau}_2\} - 2\sigma\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\}$	
$\tau_1 - \tau_3 = 2\tau_1 + \tau_2$	$2\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2$	$4\sigma^2\{\hat{\tau}_1\} + \sigma^2\{\hat{\tau}_2\} + 4\sigma\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\}$	(23.16)
$\tau_2 - \tau_3 = \tau_1 + \tau_2$	$\hat{\tau}_1 + 2\hat{\tau}_2$	$\sigma^2\{\hat{\tau}_1\} + 4\sigma^2\{\hat{\tau}_2\} + 4\sigma\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\}$	

ويجهّزنا الجدول (٢٣-٣)آ بما نحتاجه من معاملات الانحدار المقدّرة، كما يزودنا الجدول (٢٣-٣)جـ بتبايناتها وتغايراتها المقدّرة. ومنه نجد:

مقارنة	مقدّر	مقارنة	
$\tau_1 - \tau_2$	6.017 -.942 = 5.075	.5016 +.4882 - 2(-.2603) = 1.5104	
$\tau_1 - \tau_3$	2(6.017) +.942 = 12.976	4(.5016) +.488 + 4(-.2603) = 1.4534	(23.16a)
$\tau_2 - \tau_3$	6.017 + 2(.942) = 7.901	.5016 + 4(.488) + 4(-.2603) = 1.4132	

ونستخدم التوزيع t بـ $n_T - r - 1$ درجة من الحرية عندما نريد وضع تقدير بفترة واحدة. (درجات الحرية هي تلك الموافقة لـ MSE في نموذج التغاير التام) إلا أننا نرغب عادة بعائلة من التقديرات بفترة. وفي هذه الحالة يمكن استخدام طريقة المقارنات المتعددة لشيفّه (*Scheffé*) مع عامل ضرب S معرّف كما يلي:

$$S^2 = (r - 1)F(1 - \alpha; r - 1, n_T - r - 1) \quad (23.17)$$

أو يمكن استخدام طريقة بونفيروني مع مُضاعف عامل ضرب B حيث:

$$B = t(1 - \alpha / 2g; n_T - r - 1) \quad (23.18)$$

وحيث g عدد العبارات في العائلة. أما طريقة توكي فغير مناسبة لتحليل التغاير.

وفي حالتنا هنا فقد رغب المحلل في الحصول على جميع المقارنات الثنائية بمعامل ثقة عائلي 95%. وقد استخدم المحلل طريقة شيفّه لأنه توقع القيام ببعض التقديرات الإضافية للمقارنات. ولذلك فقد احتاج إلى:

$$S^2 = (r-1)F(.95;2,11) = 2(3.98) = 7.96 \qquad S = 2.82$$

وباستخدام النتائج في (23.16a)، فإن فترات الثقة لجميع المقارنات الثنائية بين المعالجات بمعامل ثقة عائلي 95% كانت:

$$1.61 = 5.075 - 2.82\sqrt{1.5104} \le \tau_1 - \tau_2 \le 5.075 + 2.82\sqrt{1.5104} = 8.54$$

$$9.58 = 12.976 - 2.82\sqrt{1.4534} \le \tau_1 - \tau_3 \le 12.976 + 2.82\sqrt{1.4534} = 16.38$$

$$4.55 = 7.901 - 2.82\sqrt{1.4132} \le \tau_2 - \tau_3 \le 7.901 + 2.82\sqrt{1.4132} = 11.25$$

وتشير هذه النتائج بوضوح إلى أن المعاينة في المخزن (المعالجة 1) أفضل بصورة معنوية في ترويج مبيعات البسكويت من أي من ترويجي الرفين، وأن حيز الرف الإضافي (المعالجة 2) يتفوق على العروض الخاصة في نهايتي ممر (المعالجة 3).

تعليقات

١- من وقت لآخر نرغب في مقارنات بين تأثيرات المعالجات أكثر عمومية من المقارنات الثنائية. ولاتبرز مشاكل جديدة سواء في استخدام التوزيع t لمقارنة بمفردها، أو في استخدام طريقتي شيفّه وبونفيروني لمقارنات متعددة. وعلى سبيل المثال، إذا رغب المحلل في مثال ترويج البسكويت في مقارنة تأثير معالجة المعاينة في المخزن (معالجة 1) بالمعالجتين المتضمنتين عروض رف (المعالجتين 2 و 3) فسيهتم بالمقارنة:

$$L = \tau_1 - \frac{\tau_2 + \tau_3}{2} \tag{23.19}$$

والمقدّر المناسب هو:

$$\hat{L} = \hat{\tau}_1 - \frac{\hat{\tau}_2 + (-\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2)}{2} = \frac{3}{2}\hat{\tau}_1 \tag{23.20}$$

ومن (1.16b) يكون تباين هذا المقدر:

$$\sigma^2\{\hat{L}\} = \frac{9}{4}\sigma^2\{\hat{\tau}_1\} \tag{23.21}$$

٢- قد يكون من المفيد تقدير متوسط الاستجابة للمعالجة i من أجل قيمة ما لـ

X. وكثيرا ماتعتبر القيمة $X = \bar{X}_{..}$ قيمة " نموذجية " لِـX. ونعلـم مـن الشـكل (٢٣-٣) أن متوسط استجابة المعالجة i عند $X = \bar{X}_{..}$ هو مايقطعه خط انحدار المعالجة من محـور الصادات وهو $\mu_{.} + \tau_i$. ويمكن بسـهولة تطوير مقـدَّر لـ $\mu_{.} + \tau_i$. وفي مثـال ترويـج البسكويت، نحصل على المقدّرات التالية وتبايناتها:

متوسط استجابة عند $X=\bar{X}_{..}$	مقدَّر	تباين
$\mu_{.} + \tau_1$	$\hat{\mu}_{.} + \hat{\tau}_1$	$\sigma^2\{\hat{\mu}_{.}\} + \sigma^2\{\hat{\tau}_1\} + 2\sigma\{\hat{\mu}_{.}, \hat{\tau}_1\}$
$\mu_{.} + \tau_2$	$\hat{\mu}_{.} + \hat{\tau}_2$	$\sigma^2\{\hat{\mu}_{.}\} + \sigma^2\{\hat{\tau}_2\} + 2\sigma\{\hat{\mu}_{.}, \hat{\tau}_2\}$
$\mu_{.} + \tau_3$	$\hat{\mu}_{.} - \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2$	$\sigma^2\{\hat{\mu}_{.}\} + \sigma^2\{\hat{\tau}_1\} + \sigma^2\{\hat{\tau}_2\} - 2\sigma\{\hat{\mu}_{.}, \hat{\tau}_1\} - 2\sigma\{\hat{\mu}_{.}, \hat{\tau}_2\} + 2\sigma\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\}$

(23.22)

واستخدام النتائج في (23.3) يقود إلى التقديرات التالية:

المعالجة	متوسط الاستجابة المقدَّر عند $\bar{X}_{..}$	التباين المقدَّر
1	33.800 + 6.017 = 39.817	.2338 +.5016 + 2(0) =.7354
2	33.800 +.942 = 34.742	.2338 +.4882 + 2(0) =.7220
3	33.800 - 6.017 -.942 = 26.841	.2338 +.5016 +.4882 - 2(0) - 2(0) + 2(-.2603) =.7030

اختبار الميول المتوازية

أحد الافتراضات المهمة في تحليل التغاير هو أن لجميع خطـوط انحـدار المعالجـات الميل نفسه γ. وقـد قـام المحلـل الـذي أجـرى دراسـة ترويـج البسـكويت، في الحقيقـة، باختبار هذا الافتراض قبل المضي في التحليل الذي ناقشناه سابقا . ونعلـم مـن الفصـل العاشر أنه يمكن تعميم نموذج الانحدار (23.13) بحيث يسمح بميول مختلفة للمعالجـات، وذلك بإدخال حدود تفاعل جدائية. وعلى وجه الخصوص ، سنحتاج هنـا إلى I_{1x} و I_{2x} . وسنرمز لمعاملات الانحدار المقابلة بـ β_1 و β_2، على الـترتيب. وهكـذا يكـون النموذج المعمم:

$$Y_{ij} = \mu_{.} + \tau_1 I_{ij1} + \tau_2 I_{ij2} + \gamma \chi_{ij} + \beta_1 I_{ij1}\chi_{ij} + \beta_2 I_{ij2}\chi_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad \text{نموذج معمم} \qquad (23.23)$$

ويتضمن الجدول (٢٣-٥)أ مصفوفات البيانات لهذا النمــوذج المعمـم في مثـال ترويـج البسـكويت. ونلاحـظ أن المصفوفـة **X** للنمـوذج المعمـم تختلـف عـن المصفوفـة **X** لنمـوذج الانحدار (23.13) بإضافة العمودين I_{1x} و I_{2x} . وقــد أنتـج توفيـق نمـوذج الانحـدار (23.23)، باستخدام حزمة حاســب للانحـدار المتعـدد، نتـائج التحـاين المبينـة في الجـدول (٢٣-٥)ب، ومجموع مربعات الخطأ SSE الذي حصلنا عليه بتوفيق النمــوذج المعمــم (23.23)، مكـافيء لتوفيق خطوط انحدار منفصلة لكل معالجة ثم جمع مجاميع مربعات الخطأ هذه.

واختبـار تـوازي الميـول يكـافيء اختبـار عـدم وجـود تفـاعلات في النمــوذج المعمــم (23.23):

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_a: \text{ليس كل من } \beta_1 \text{ و } \beta_2 \text{ مساويا للصفر} \qquad (23.24)$$

وما نحتاجه الآن هو أن ندرك أن النموذج المعمــم (23.23) هـو هنـا النمـوذج "التـام"، وأن نموذج التغاير (23.13) هو الآن النموذج "المخفض"، وبالتالي فلدينا من الجدولين (٢٣-٣)ب و(٢٣-٥)ب:

$$SSE(F) = 31.521 \qquad SSE(R) = 38.571$$

وهكذا تصبح إحصاءة الاختبار (3.69) هنا:

$$F^* = \frac{38.571 - 31.521}{11 - 9} \div \frac{31.521}{9} = 1.01$$

ولمستوى معنوية $\alpha = 0.05$، نحتاج إلى $F(0.95;2,9)$. وبما أن $F^* = 1.01 \leq 4.26$، فنسـتنتج H_0 ، أي أن لخطوط انحدار المعالجات الثلاث الميل نفسه والقيمة-P لهذا الاختبار هي 0.40.

(٢٣-٤) تحليل التغاير وحيد العامل كتعديل لتحليل التباين

شرحنا في الفقرات السابقة الأفكار الأساسية التي يقوم عليها تحليل التغـاير مـن خـلال النظر إلى النموذج كنموذج انحدار. ورأينا أن المسائل الإحصائية الـتي تـبرز في تحليـل التغـاير تندرج بسهولة في إطار الانحدار. وعلى أي حـال لم تكـن الحاسـبات موجـودة عندمـا طُـوِّر

تحليلالتغاير للمرة الأولى، و لم يكن من الممكن عمليا القيام بحسابات تحليل التغاير بأسلوب الانحدار. وبدلا عن ذلك، فقد طوّرت صيغ حسابية تستغل حقيقة أن المتغيرات المؤشرة تتخذ القيم 1 , 1- أو 0 وفق بنية معينة. وقد تبدو هذه الصيغ الحسابية فرعية، ولكن الحسابات اليدوية وفق هذه الصيغ هي أبسط بكثير من الحسابات اليدوية وفق أسلوب

جدول (٢٣-٥) مصفوفات البيانات ونتائج الانحدار لمثال ترويج البسكويت – النموذج المعمم (23.23).

(أ) مصفوفات البيانات

$$
\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}38\\39\\36\\45\\33\\43\\38\\38\\27\\34\\24\\32\\31\\21\\28\end{bmatrix}
\quad
\mathbf{X}=\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{bmatrix}
 & I_1 & I_2 & x & I_1x & I_{2x}\\
1 & 1 & 0 & -4 & -4 & 0\\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 0 & -3 & -3 & 0\\
1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0\\
1 & 1 & 0 & -6 & -6 & 0\\
1 & 0 & 1 & 9 & 0 & 9\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4\\
1 & 0 & 1 & -7 & 0 & -7\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & -1 & -2 & 2 & 2\\
1 & -1 & -1 & 4 & -4 & -4\\
1 & -1 & -1 & 5 & -5 & -5\\
1 & -1 & -1 & -9 & 9 & 9\\
1 & -1 & -1 & 4 & -4 & -4
\end{bmatrix}
$$

(ب) تحليل التباين

مصدر التغير	SS	df
الانحدار	$SSR = 614.879$	5
الخطأ	$SSE = 31.521$	9
المجموع	$SSTO = 646.400$	14

الانحدار. ولشرح الأساس المنطقي لهذه الصيغ الحسابية، يُنظر عادة إلى تحليل التغاير كعملية تبدأ بتحليل التباين المعتاد ثم يُعدل هذا التحليل آخذا في الاعتبار المتغيرات المصاحبة. وسنتعرض الآن لأسلوب التعديل هذا في حالة تحليل تغاير وحيد العامل مع متغير مصاحب واحد ثم نبيّن تكافؤه مع أسلوب الانحدار.

جدول تحليل التغاير

تحليل التباين لـ X و XY. الفكرة الأساسية التي ستُعتبر عند النظر إلى تحليل التغاير كتعديل لتحليل التباين العادي هو أنه يمكن القيام بتفكيك مجموع المربعات الكلي في (14.27):

$$SSTO_Y = SSTR_Y + SSE_Y \qquad (23.25)$$

من أجل المتغير X والجداء XY. لاحظ أن الدليل Y قد أضيف في (23.25) لإيضاح أن هذا التفكيك يشير إلى المتغير Y. ونتذكر أن:

$$SSTO_Y = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \overline{Y}_{..})^2 = \sum\sum Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{n_T} \qquad (23.26a)$$

$$SSTR_Y = \sum_i n_i(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2 = \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{n_i} - \frac{Y_{..}^2}{n_T} \qquad (23.26b)$$

$$SSE_Y = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2 = \sum_i \sum_j Y_{ij}^2 - \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{n_i} \qquad (23.26c)$$

وتحليل التباين نفسه للمتغير X هو:

$$SSTO_X = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{..})^2 = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \frac{X_{..}^2}{n_T} \qquad (23.27a)$$

$$SSTR_x = \sum_i n_i(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})^2 = \sum_i \frac{X_{i.}^2}{n_i} - \frac{X_{..}^2}{n_T} \qquad (23.27b)$$

$$SSE_X = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})^2 = \sum_i \sum_j X_{ij}^2 - \sum_i \frac{X_{i.}^2}{n_i} \qquad (23.27c)$$

حيث الرموز من أجل الـ X تتفق تماما مع تلك الخاصة بـ Y.

ويبدأ تحليل التباين للجداءات XY بتعريف مجموع جداءات كلي ($SPTO$):

$$SPTO = \sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{..})(Y_{ij} - \overline{Y}_{..}) = \sum_i \sum_j X_{ij}Y_{ij} - \frac{X_{..}Y_{..}}{n_T} \qquad (23.28a)$$

ولرؤية صلة بمجموع الجداءات الكلي بمجموع المربعات الكلي لـ Y أو لـ X، لاحظ أنك ستحصل على $SSTO_Y$ عند وضع Y_{ij} بدلا من X_{ij} في (23.28a)، وعند وضع X_{ij} بدلا من Y_{ij} ستحصل على $SSTO_X$. ومركبتا مجموع الجداءات الكلي هي مجموع جداءات المعالجات ($SPTR$) ومجموع جداءات الخطأ (SPE):

$$SPTR = \sum_j n_i(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}) = \sum_i \frac{X_{i.}Y_{i.}}{n_i} - \frac{X_{..}Y_{..}}{n_T} \qquad (23.28b)$$

$$SPE = \sum_i\sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})(Y_{ij.} - \overline{Y}_{i.}) = \sum_i\sum_j X_{ij}Y_{ij} - \sum_i \frac{X_{i.}Y_{i.}}{n_i} \qquad (23.28c)$$

وخلافا لمجاميع المربعات، فإن مجاميع الجداءات يمكن أن تكون سالبة.

مثال. يتضمن الجدول (٢٣-٦) تحليلات تباين لـ X، Y و XY لمثال ترويج البسكويت الذي أُعطيت بياناته في الجدول (٢٣-١)ب:

$$SPTR = \frac{1}{5}\left[116(191) + 132(180) + 127(136)\right] - \frac{375(507)}{15}$$
$$= 12{,}637.6 - 12{,}675.0 = -37.4$$

$$SSE_X = 9{,}735 - \frac{1}{5}\left[(116)^2 + (132)^2 + (127)^2\right] = 9{,}735 - 9{,}401.8 = 333.2$$

تحليل التباين المعدل لـ Y. ونحن جاهزون الآن لتعديل تحليل تباين Y كي نحصل على تحليل التغاير.

جدول (٢٣-٦) تحليل تباين لِـ X, Y و XY في مثال ترويج مبيعات نوع من البسكويت

مصدر التغير	مجاميع مربعات أو جداءات			
	Y	X	XY	df
معالجات	338.8	26.8	-37.4	2
الخطأ	307.6	333.2	299.4	12
المجموع	646.4	360.0	262.0	14

وأفضل رؤية للأسباب المنطقية للتعديل تأتي من تحليل الانحدار الخطي البسيط. فقد وجدنا هناك أنه يمكن التعبير عن مجموع مربعات الخطأ (2.21):

$$SSE = \sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum(Y_i - b_0 - b_1X_i)^2 \qquad (23.29)$$

بالشكل الجبري المكافيء (2.24b):

$$SSE = \sum(Y_i - \overline{Y})^2 - \frac{\left[\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})\right]^2}{\sum(X_i - \overline{X})^2} \qquad (23.29a)$$

والذي يمكن إعادة كتابته كما يلي:

$$SSE = \sum(Y_i - \overline{Y})^2 - b_1\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) \qquad (23.29b)$$

وبدلالة رموز تحليلنا للتباين (وفيه نستخدم دليلين و $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ من أجل $\overline{X}$ و $\overline{Y}$، على الترتيب)، يمكن إذا التعبير عن مجموع مربعات خطأ الانحدار بأي من الطريقتين التاليتين:

$$SSE = SSTO_Y - \frac{(SPTO)^2}{SSTO_X} \qquad (23.30a)$$

$$SSE = SSTO_Y - b_1(SPTO) \qquad (23.30b)$$

وبالتالي يمكن، في تحليل التغاير، الحصول على مجموع المربعات الكلي لـ Y معدلا من أجل العلاقة الخطية مع X كما يلي:

$$SSTO(adj.) = SSTO_Y - \frac{(SPTO)^2}{SSTO_X} \qquad (23.31a)$$

حيث يرمز $SSTO$(adj.) لمجموع المربعات الكلي المعدل لـ Y. وقياسا على ذلك يمكن عندئذ القول إن:

$$SSE(\text{adj.}) = SSE_Y - \frac{(SPE)^2}{SSE_X} \qquad (23.31b)$$

حيث يرمز SSE(adj.) لمجموع المربعات المعدل للخطأ الخاص بـ Y.وأخيرا ، نحصل بالطرح على:

$$SSTR(\text{adj.}) = SSTO(\text{adj.}) - SSE(\text{adj.}) \qquad (23.31c)$$

حيث يرمز $SSTR$(adj.) لمجموع مربعات المعالجات المعدل الخاص بـ Y. وتجدر ملاحظة أننا حصلنا على $SSTR$(adj.) بالطرح وليس بتعديل مشابه للتعديلات السابقة. وسيتضح سبب ذلك فيما بعد. ويتضمن الجدول (٢٣-٧) جدول تحليل التغاير العام لدراسة وحيدة العامل مع متغير مصاحب واحد. وقُدمت أولا مجاميع المربعات والجداءات، ثم أعطيت مجاميع المربعات المعدلة. وعند قسمة هذه الأخيرة على عدد درجات الحرية نحصل على متوسطات المربعات المعدلة. ونلاحظ أن عدد درجات الحرية لكل من SST(adj.) SSE(adj.)

أقل بواحد مما هي عليه في نموذج تحليل التباين. وسبب ذلك هو أننا اضطررنا إلى تقدير معامل الانحدار γ للمتغير المصاحب.

جدول (٢٣-٧) تحليل التغاير للدراسة وحيدة العامل مع متغير مصاحب واحد

مصدر التغير	مجاميع مربعات أو جداءات Y	X	XY	df
معالجات	$SSTR_Y$	$SSTR_X$	$SPTR$	$r - 1$
خطأ	SSE_Y	SSE_X	SPE	$n_T - r$
المجموع	$SSTO_Y$	$SSTO_X$	$SPTO$	$n_T - 1$

مصدر التغير	SS معدَّلة	df معدَّلة	MS معدَّلة
معالجات	$SSTR(\text{adj.})$	$r - 1$	$MSTR(\text{adj.})$
خطأ	$SSE(\text{adj.})$	$n_T - r - 1$	$MSE(\text{adj.})$
المجموع	$SSTO(\text{adj.})$	$n_T - 2$	

مثال. نجد، في مثال ترويج البسكويت، مستخدمين (23.31) ونتائج الجدول (٢٣-٦):

$$SSTO(\text{adj.}) = 646.4 - \frac{(262)^2}{360} = 455.722$$

$$SSE(\text{adj.}) = 307.6 - \frac{(299.4)^2}{333.2} = 38.571$$

$$SSTR(\text{adj.}) = 455.722 - 38.571 = 417.151$$

وهذه النتائج مقدَّمة في جدول تحليل تغاير في الجدول (٢٣-٨)، الذي يتضمن، أيضا، درجات الحرية المعدلة ومتوسطات المربعات المعدَّلة. لاحظ أن عدد درجات الحرية لمجموع المربعات الكلي المعدل ولمجموع مربعات الخطأ المعدل أقل بدرجة واحدة مما هو في تحليل التباين (جدول ٢٣-٦).

جدول (٢٣-٨) جدول تحليل تغاير لمثال ترويج البسكويت

مصدر التغير	SS معدَّل	df معدَّلة	MS معدَّل
معالجات	417.151	2	208.576
خطأ	38.571	11	3.506
المجموع	455.722	13	

اختبار تأثيرات المعالجات

ويقوم اختبار تأثيرات المعالجات:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_r = 0$$
H_a: المعالم τ_i ليست جميعها مساوية للصفر (23.32a)

على إحصاءة الاختبار المعتادة:

$$F^* = \frac{MSTR(\text{adj.})}{MSE(\text{adj.})} \tag{23.32b}$$

وإذا كانت H_0 صحيحة، فإن F^* تتبع التوزيع $F(r-1, n_T-r-1)$ وبالتالي فإن قاعدة القرار، مع ضبط مستوى المعنوية عند α، تكون:

(23.32c)
إذا كانت $F^* \le F(1-\alpha; r-1, n_T-r-1)$، استنتج H_0.
إذا كانت $F^* > F(1-\alpha; r-1, n_T-r-1)$، استنتج H_a

مثال. في مثال ترويج البسكويت لدينا من الجدول (٢٣-٨):

$$F^* = \frac{MSTR(\text{adj.})}{MSE(\text{adj.})} = \frac{208.576}{3.506} = 59.5$$

وهي بالطبع القيمة نفسها التي حصلنا عليها في الفقرة (٢٣-٣) بأسلوب الانحدار. وإذا كانت $\alpha = 0.05$ فنحتاج إلى $F(.95;2,11)=3.98$. وبما أن $F^* = 59.5 > 3.98$، نستنتج أن للتراويج الثلاثة تأثيرات مختلفة على مبيعات البسكويت.

تسوية بين أسلوبين

يلخص الشكل (٢٣-٧) العلاقات بين أسلوبي الانحدار والتعديل في تحليل التغاير. وسنشرح الآن هذه العلاقات في ثلاث خطوات:

١- نعتبر أولا تكافؤ $SSE(R)$ **في أسلوب الانحدار مع** $SSTO(\text{adj.})$ **في أسلوب** التعديل. فعند توفيق النموذج المخفض (23.15) في أسلوب الانحدار:

$$Y_{ij} = \mu + \gamma(X_{ij} - \overline{X}_{..}) + \varepsilon_{ij}$$

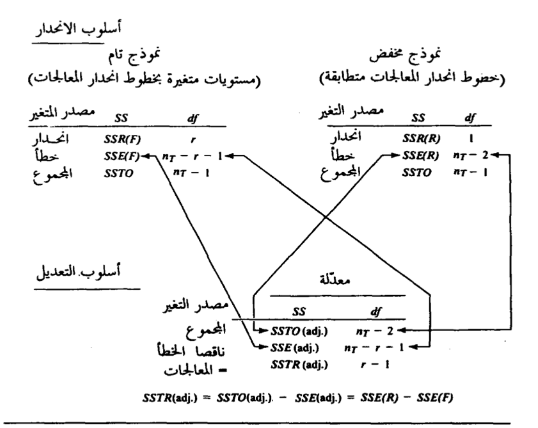
مع ملاحظة أن $x_{ij} = X_{ij} - \overline{X}_{..}$ نحصل على مقدّر المربعات الدنيا (2.10a) للميل γ:

$$g = \frac{\sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{..})(Y_{ij} - \overline{Y}_{..})}{\sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{..})^2} = \frac{SPTO}{SSTO_X} \tag{23.33}$$

ومجموع مربعات الخطأ المعتاد (2.24b):

$$SSE(R) = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \overline{Y}_{..})^2 - \frac{\left[\sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{..})(Y_{ij} - \overline{Y}_{..})\right]^2}{\sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{..})^2} \tag{23.34}$$

شكل (٢٣-٧) تسوية بين أسلوبي الانحدار والتعديل في تحليل تغاير



وفي الشكل (٢٣-٨)أ مخطط توضيحي للرواسب الداخلة في $SSE(R)$ عندما تتضمن الدراسة معالجتين. وبالتعبير عن $SSE(R)$ برموزنا، فإنها تصبح:

$$SSE(R) = SSTO_Y - \frac{(SPTO)^2}{SSTO_X} = SSTO(\text{adj.}) \qquad (23.34a)$$

وذلك وفقا لتعريف $SSTO(\text{adj.})$ الوارد في الصيغة (23.31a). وهكذا، فإن $SSTO(\text{adj.})$ هي ببساطة مجموع مربعات الخطأ عند توفيق انحدار خطي لمجموعة البيانات الإحصائية بكاملها.

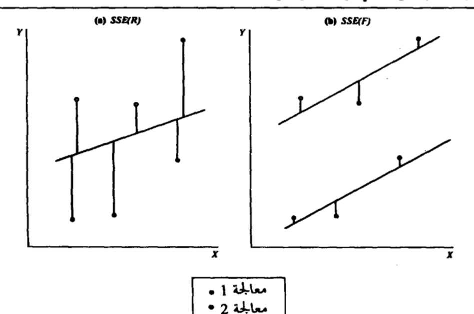
٢– ونعتبر بعدها تكافؤ $SSE(F)$ في أسلوب الانحدار و$SSE(\text{adj.})$ في أسلوب التعديل. فعند توفيق نموذج التغاير التام (23.3):

$$Y_{ij} = \mu_{.} + \tau_i + \gamma(X_{ij} - \overline{X}_{..}) + \varepsilon_{ij}$$

للبيانات، حيث نسمح باختلاف تقاطعات خطوط انحدار المعالجات مع محور الصادات $\mu + \tau_i$ إلا أننا نفترض ميلا مشتركا γ، يمكن تبيان أن مقدر المربعات الدنيا لهذا الميل المشترك هو:

$$g_w = \frac{\left[\sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})\right]^2}{\sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})^2} = \frac{SPE}{SSE_X} \qquad (23.35)$$

شكل (٢٣–٨) تمثيل تخطيطي للرواسب من أجل $SSE(R)$ و $SSE(F)$



وأن مقدر المربعات الدنيا لـ $\mu + \tau_i$ هو:

$$\overline{Y}_{i.} - g_w(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..}) \qquad (23.36)$$

وبالتالي يكون مجموع مربعات الخطأ للمعالجة i هو:

$$\sum_j \left\{Y_{ij} - \left[\overline{Y}_{i.} - g_w(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})\right] - g_w(X_{ij} - \overline{X}_{..})\right\}^2$$

$$= \sum_j \left[(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}) - g_w(X_{ij} - \overline{X}_{i.})\right]^2 \qquad (23.37)$$

وبجمع مجاميع مربعات الخطأ هذه فوق جميع المعالجات، نحصل على $SSE(F)$:

$$SSE(F) = \sum_i \sum_j \left[(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}) - g_W(X_{ij} - \overline{X}_{i.})\right]^2 \qquad (23.38)$$

ويوضح الشكل (٢٣-٨)ب الرواسب التي تدخل في حالة معالجتين.

وبنشر عبارة $SSE(F)$ في (23.38) والتبسيط، نجد:

$$SSE(F) = \sum_i \sum_j \left[(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2 - g_w \sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})\right]^2 \quad (23.38a)$$

ولكن هذه العبارة تصبح في رموزنا الجديدة:

$$SSE(F) = SSE_Y - \frac{SPE}{SSE_X} SPE = SSE_Y - \frac{(SPE)^2}{SSE_X} = SSE(\text{adj.}) \quad (23.38b)$$

وذلك وفقا لتعريف $SSE(\text{adj.})$ في ($23.31b$) وهكذا يكون $SSE(\text{adj.})$ ببساطة مجموع مربعات الخطأ عند توفيق خطوط انحدار منفصلة للمعالجات ولكل منها الميل نفسه.

٣- ونحصل على $SSTR(\text{adj.})$ على أنه الفرق $SSTO(\text{adj.})$-$SSE(\text{adj.})$، تماما كما يشكل الفرق $SSE(R)$-$SSE(F)$ البسط في إحصاءة الاختبار في أسلوب الاختبار الخطي العام.

تعليقات

١- يمكن الحصول على مؤشر لفعالية تحليل التغاير في تخفيض تشتت الخطأ بمقارنة $MSE(\text{adj.})$ في تحليل التغاير مع MSE في تحليل التباين العادي. ونعلم من الجدول (٢٣-٨) في مثال ترويج البسكويت أن $MSE(\text{adj.}) = 3.51$. ويمكننا أن نرى، أيضا ، من الجدول (٢٣-٦) أن متوسط مربعات الخطأ في تحليل التباين العادي كان سيأخذ القيمة:

$$MSE = \frac{307}{12} = 26.63$$

وبالتالي، فإن تحليل التغاير قد خفّضَ التبـاين البـاقي في هـذه الحالـة بحـوالي 87 بالمائـة، وهـو تخفيض كبير.

٢– لايقود تحليل التغاير وتحليـل التبـاين بـالضرورة إلى النتـائج نفسـها حـول تأثـيرات المعالجات. وعلى سبيل المثال، قد لايشير تحليل تباين إلى أية تأثيرات للمعالجات، بينمـا يمكـن أن يُظهر تحليل تغاير، تباين خطئه أقل، تأثيرات مهمة للمعالجات. وفي العادة، ينبغي أن نقرر بالطبع سلفا أي التحليلين سنستخدم.

٣– يمكـن اعتبـار المقـدّر g_w للميـل المشـترك γ كمتوسـط للميـول g_i لخطـوط انحـدار المعالجات المقدَّرة بصورة منفصلة. فإذا قمنا بتوفيق خط انحدار منفصل لكل معالجة، فإن الميل المقدَّر g_i للمعالجة i سيكون وفقا لطريقة المربعات الدنيا معطى بالعلاقة التالية:

$$g_i = \frac{\sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})}{\sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})^2} \tag{23.39}$$

وباستخدام $\sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})^2$ كأوزان، فإن المتوسط المرجّح للمقادير g_i يعطينا بالضبط g_w كما عرفناه في (23.35):

$$\frac{\sum_i \left[\sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})^2 \right] g_i}{\sum_i \left[\sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})^2 \right]} = \frac{\sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})}{\sum_i \sum_j (X_{ij} - \overline{X}_{i.})^2} = g_w$$

وهكذا يمكن التفكير في g_w كميل انحدار متوسط ضمن المعالجات.

وفي مثال ترويج البسكويت، نجد أن ميل الانحدار المتوسط ضمن المعالجات:

$$g_w = \frac{SPE}{SSE_X} = \frac{199.4}{333.2} = .8986$$

والميل عند توفيق خط انحدار بمفرده لجميع البيانات هو:

$$g = \frac{SPTO}{SSTO_X} = \frac{262}{360} = .7278$$

متوسطات معدّلة للمعالجات

في تحليل التبـاين، يكـون متوسـط المعالجـة المقـدّر $\bar{Y}_{i.}$ تقديـرا لمتوسـط الاستجابة مـع المعالجة i. وفي تحليل التغـاير يتحـدث العديـد مـن الكتـاب عـن الحاجـة إلى تعديـل المقـادير $\bar{Y}_{i.}$ لجعلها قابلة للمقارنـة بالنسبة للمتغير المصـاحب X، باعتبـار أن قيـم X سـوف لاتكـون نفسها، عادة، لكل المعالجات. والتعديل يأخذ الشكل:

$$\bar{Y}_{i.}(\text{adj.}) = \bar{Y}_{i.} - g_w(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}) \tag{23.40}$$

ويمكن رؤية الأساس المنطقي للتعديل مـن الشـكل (٢٣-٩). إذ يتضمـن هـذا الشـكل النقاط $(\bar{X}_{i.}, \bar{Y}_{i.})$ للمعالجات الثلاث في مثال ترويج البسكويت. ومن كل من هـذه النقـاط رسمنا خط انحدار بميل $g_w = 0.8986$ هو الميل المتوسـط ضمـن المعالجـات. ومتوسـط المعالجـة المعدَّل $\bar{Y}_{i.}(\text{adj.})$ هو ببساطة الإحداثي الصادي لخط الانحدار عند $X = \bar{X}_{..}$. وبهذه الطريقـة يُقال إن المعالجات قد أصبحت قابلة للمقارنـة بالنسبة لـِ X. وفي مثـال ترويـج البسـكويت نحصل على المتوسطات المعدلة للمعالجات كما يلي :

المعالجة	$\bar{Y}_{i.}$	$\bar{X}_{i.}$	$\bar{X}_{..}$	g_w	$g_w(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})$	$\bar{Y}_{i.}(\text{adj.})$
1	38.2	23.2	25	.8986	-1.62	39.82
2	36.0	26.4	25	.8986	1.26	34.74
3	27.2	25.4	25	.8986	.36	26.84

وتشير مقارنة مع النتائج على الصفحة إلى أن المتوسطات المعدَّلـة للمعالجـات هـذه هي ببساطة تقديرات لتقاطعات خطوط انحدار المعالجات مع المحور الصادي. وبعبارة أخرى، فإن $\bar{Y}_{i.}(\text{adj.})$ هي ببساطة مقدِّر لِـ $\mu + \tau_i$.

ويمكن تبيان أن تباين $\bar{Y}_{i.}(\text{adj.})$ هو:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{i.}(\text{adj.})\} = \sigma^2\left[\frac{1}{n_i} + \frac{(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2}{SSE_X}\right] \tag{23.41}$$

والمقدر غير المنحاز لهذا التباين هو:

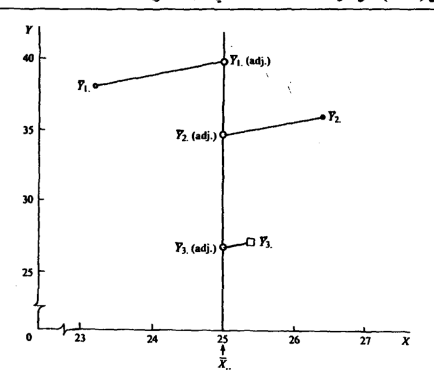
$$s^2\{\bar{Y}_{i.}(\text{adj.})\} = MSE(\text{adj.})\left[\frac{1}{n_i} + \frac{(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2}{SSE_X}\right] \tag{23.42}$$

وعلى سبيل المثال، فـإن التبـاين المقـدَّر للمتوسـط المعـدَّل للمعالجـة 1 في مثـال ترويـج البسكويت هو:

$$s^2\left\{\overline{Y}_{i.}(\text{adj.})\right\}=3.506\left[\frac{1}{5}+\frac{(23.2-25)^2}{333.2}\right]=.735$$

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في الصفحة   باستخدام أسلوب الانحدار.

الشكل (٢٣-٩) تمثيل المتوسطات المعدلة للمعالجات في مثال البسكويت



مقارنات بين المتوسطات المعدلة للمعالجات. بما أن $\overline{Y}_{i.}$(adj) هي مقدر لـ $\mu + \tau_i$، فإن المقارنة الثنائية $\overline{Y}_{i.}(adj.)-\overline{Y}_{i'(adj.)}$ هي مقدّر لـ $\tau_i - \tau_{i'}$. وفي مثال ترويج البسكويت يمكن إذا تقدير $\tau_1 - \tau_3$ من:

$$\overline{Y}_{1.}(\text{adj.})-\overline{Y}_{3.}(\text{adj.})=39.82-26.84=12.98$$

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في الصفحة   وتباين الفرق بين متوسطين معدلين لمعالجتين هو:

$$\sigma^2\left\{\overline{Y}_{i.}(\text{adj.})-\overline{Y}_{i'.}(\text{adj.})\right\}=\sigma^2\left[\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}+\frac{(\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{i'.})}{SSE_X}\right] \qquad (23.43)$$

وتقدير هذا التباين هو:

$$s^2\left\{\overline{Y}_{i.}(\text{adj.})-\overline{Y}_{i'.}(\text{adj.})\right\}=MSE(\text{adj.})\left[\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_{i'}}+\frac{(\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{i'.})}{SSE_X}\right] \qquad (23.44)$$

وفي المثال السابق، نجد:

$$s^2\left\{\overline{Y}_{1.}(\text{adj.})-\overline{Y}_{3.}(\text{adj.})\right\}=3.506\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{(23.2-25.4)^2}{333.2}\right]=1.453$$

وهو بالطبع التباين المقدَّر نفسه كما حصلنا عليه بأسلوب الانحدار في الصفحة .

ويتطابق استخدام التوزيع t في حالة تقدير بفترة واحدة لمقارنة بين المتوسطات المعدلة للمعالجات، واستخدام طريقتي شيفّه وبو نفيروني للمقارنات المتعددة، مع استخدامها في أسلوب الانحدار. ونعرفَ مقدَّرا لمقارنة بين المتوسطات المعدلة للمعالجات كما يلي:

$$\hat{L}=\sum c_i\left[\overline{Y}_{i.}(\text{adj.})\right]=\sum c_i\overline{Y}_{i.}-g_w\sum c_i\overline{X}_{i.} \quad \text{حيث :} \quad \sum c_i=0 . \qquad (23.45)$$

وتباينها المقدَّر هو:

$$s^2\{\hat{L}\}=MSE(\text{adj.})\left[\sum\frac{c_i^2}{n_i}+\frac{(\sum c_i\overline{X}_{i.})^2}{SSE_X}\right] \qquad (23.46)$$

وحدا الثقة لمقارنة بمفردها L هما:

$$\hat{L}\pm t(1-\alpha/2;n_T-r-1)s\{\hat{L}\} \qquad (23.47)$$

وفي المقارنات المتعددة نضع أحد عاملي الضرب S أو B المعرفين في (23.17) و(23.18)، على الترتيب، بدلا من عامل الضرب t.

(٢٣-٥) دراسات متعددة العوامل

اعتبرنا حتى الآن حالة تحليل تغاير لدراسات وحيدة العامل تتضمن r معالجة. ويمكن ،أيضا، استخدام تحليل التغاير في دراسات بعاملين أو عدة عوامل. ونوضح الآن استخدام تحليل التغاير لدراسات تتضمن عاملين مع متغير مصاحب واحد.

نموذج تغاير لدراسة تتضمن عاملين

أعطي نموذج التحاين المثبت لدراسة تتضمن عاملين في (18.23) كما يلي:

$$Y_{ijk}=\mu_{..}+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}+\varepsilon_{ijk} \qquad (23.48)$$
$$i=1,\dots,a;\ j=1,\dots,b;\ k=1,\dots,n$$

حيث α_i التأثير الرئيس للعامل A عند المستوى β_j, i التأثير الرئيس للعامل B عند المستوى j ،$(\alpha\beta)_{ij}$ تأثير التفاعل عندما يكون العامل A في مستواه الـ i والعامل B في مستواه الـ j. ونموذج التغاير لدراسة تتضمن عاملين مع متغير مصاحب بمفرده، مفترضين أن العلاقة بين Y والمتغيرالمصاحب X خطية، هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \gamma(X_{ijk} - \overline{X}_{...}) + \varepsilon_{ijk} \qquad (23.49)$$
$$i = 1,..., a\,; j = 1,..., b\,; k = 1,..., n$$

أسلوب الانحدار

لتوضيح أسلوب الانحدار في تحليل تغاير لدراسة تتضمن عاملين مع متغير مصاحب واحد، لنفرض أن لكل من العاملين A و B مستويين. فيكون نموذج الانحدار المقابل لنموذج التغاير (23.49) عندئذ كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_1 I_{ijk1} + \beta_1 I_{ijk2} + (\alpha\beta)_{11} I_{ijk1} I_{ijk2} + \gamma x_{ijk} + \varepsilon_{ijk} \qquad (23.50)$$

حيث:

$I_{ijk1} =$ { 1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 1 للعامل A ؛ -1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 2 للعامل A }

$I_{ijk2} =$ { 1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 1 للعامل B ؛ -1 إذا كانت المشاهدة من المستوى 2 للعامل B }

$$x_{ijk} = X_{ijk} - \overline{X}_{...}$$

ونلاحظ أن معاملات الانحدار في (23.50) هي تأثيرات العوامل α_1, β_2 و $(\alpha\beta)_{11}$ كما هي في تحليل التباين بالإضافة إلى معامل المتغير المصاحب γ.

واختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A يتطلب وضع $\alpha_1 = 0$ في النموذج المخفض. وفي المقابل نضع $\beta_1 = 0$ في النموذج المخفض عند اختبار التأثيرات الرئيسة للعامل B ونضع $(\alpha\beta)_{11} = 0$ في النموذج المخفض عند اختبار التفاعلات AB.

ويمكن بسهولة القيام بتقدير التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B بدلالة مقارنات بين معاملات الانحدار. ولايقدم استخدام طريقتي شيفّه وبونفيروني في المقارنات المتعددة أية

مشاكل جديدة. وعلى سبيل المثال، نعرِّف المضاعف (عامل الضرب) S للمقارنات المتعددة بين متوسطات مستويات العامل A كما يلي:

$$S^2 = (a-1)F(1-\alpha; a-1, n_T - ab - 1) \qquad (23.51)$$

ويُعطى المضاعف (عامل الضرب) B بالعلاقة (23.18) مع اعتبار $r = ab$.

أسلوب التعديل

عند تطبيق أسلوب التعديل في تحليل تغاير دراسة تتضمن عاملين مع متغير مصاحب واحد، نحتاج ثانية لتحليل التباين لكل من X، Y و X. وتحليل التباين لـ Y معطى في (18.38) و (18.39) وتحليل التباين لـ X مطابق له بعد استبدال X_{ij} بـ Y_{ij}. ويتضمن الجدول (٢٣-٩) تحليلي التباين هذين لـ Y و لـ X. لاحظ استخدام الدليل Y أو X للتمييز.

وتحليل التباين لـ XY هو كما يلي:

$$SPTO = \sum_i \sum_j \sum_k (X_{ijk} - \bar{X}_{...})(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...}) = \sum_i \sum_j \sum_k X_{ijk} Y_{ijk} - \frac{X_{...} Y_{...}}{abn} \qquad (23.52a)$$

$$SPA = bn \sum_i (\bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...})(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) = \frac{\sum_i X_{i..} Y_{i..}}{bn} - \frac{X_{...} Y_{...}}{abn} \qquad (23.52b)$$

$$SPB = an \sum (\bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...})(\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}) = \frac{\sum_j X_{.j.} Y_{.j.}}{an} - \frac{X_{...} Y_{...}}{abn} \qquad (23.52c)$$

$$SPE = \sum_i \sum_j \sum_k (X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.}) = SPTO - SPTR \qquad (23.52d)$$

$$SPAB = n \sum_i \sum_j (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X}_{...})(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...})$$
$$= SPTR - SPA - SPB \qquad (23.52e)$$

حيث:

$$SPTR = n \sum_i \sum_j (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{...})(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...}) = \frac{\sum_i \sum_j X_{ij.} Y_{ij.}}{n} - \frac{X_{...} Y_{...}}{abn} \qquad (23.52f)$$

ويتضمن الجدول (٢٣-٩)، أيضا، تحليل التباين للجداء XY.

وتتجاهل طريقة التعديل جميع المركبات فيما عدا مركبة الخطأ والمركبة التي نقوم باختبارها، ثم تمضي الطريقة عندئذ في إجراء التعديلات بصورة مشابهة لما رأيناه في دراسة وحيدة العامل. وهكذا، كي نختبر التأثيرات الرئيسة للعامل A:

جدول (٢٣-٩) تحليلات تباين لـ X وY و XY – دراسة تتضمن عاملين مع متغير مصاحب واحد

مصدر التغير	مجاميع مربعات أو جداءات			df
	Y	X	XY	
العامل A	SSA_Y	SSA_X	SPA	$a - 1$
العامل B	SSB_Y	SSB_X	SPB	$b - 1$
التفاعل AB	$SSAB_Y$	$SSAB_X$	$SPAB$	$(a - 1)(b - 1)$
الخطأ	SSE_Y	SSE_X	SPE	$ab(n - 1)$
المجموع	$SSTO_Y$	$SSTO_X$	$SPTO$	$abn - 1$

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_a = 0$$

H_a: ليست جميع المعالم α_i مساوية للصفر (23.53)

نستخلص من الجدول (٢٣-٩) السطرين الخاصين بالعامل A وبالخطأ. وقد تم ذلك في الجدول (٢٣-١٠)أ. ثم نستنبط مجاميع المربعات المعدلة بالطريقة المعتادة:

$$SS(A+E;\text{adj.}) = (SSA_Y + SSE_Y) - \frac{(SPA+SPE)^2}{SSA_X + SSE_X} \qquad (23.53a)$$

$$SSE(\text{adj.}) = SSE_Y - \frac{(SPE)^2}{SSE_X} \qquad (23.53b)$$

$$SSA(\text{adj.}) = SS(A + E;\text{ adj.}) - SSE(\text{adj.}) \qquad (23.53c)$$

ويتضمن الجدول (٢٣-١٠)ب تحليل التغاير لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A. وقد خُفضت درجات الحرية لكل من المجموع والخطأ بمقدار الواحد لتأخذ في الإعتبار المتغير المصاحب X، وحصلنا على درجات الحرية المعدّلة لتأثيرات العامل A بالطرح.

وكالمعتاد، فإن إحصاءة اختبار البدائل في (23.53) هي:

$$F^* = \frac{MSA(\text{adj.})}{MSE(\text{adj.})} \qquad (23.54)$$

جدول (٢٣-١٠) تحليل تغاير لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A في دراسة تتضمن عاملين مع متغير مصاحب واحد

(أ) تحليل التباين

مصدر التغير	مجاميع مربعات أو جداءات Y	X	XY	df
العامل A	SSA_Y	SSA_X	SPA	$a - 1$
الخطأ	SSE_Y	SSE_X	SPE	$ab(n - 1)$
المجموع	$SSTO_Y$	$SSA_X + SSE_X$	$SPA+SPE$	$a+ab(n - 1)-1$

(ب) تحليل التغاير

مصدر التغير	SS المعدَّل	df المعدلة	MS المعدَّل
العامل A	SSA(adj.)	$a - 1$	MSA(adj.)
الخطأ	SSE(adj.)	$ab(n - 1) - 1$	MSE(adj.)
المجموع	$SS(A+E;$adj.)	$a + ab(n - 1) - 2$	

وإذا كانت H_0 صحيحة، فإن F^* تتبع التوزيع $F[a - 1,ab(n-1)-1]$.

وبصورة مماثلة نطور اختبارات لتأثيرات العامل الآخر.

مثال

نفّذ باحث في مجال البستنة تجربة لدراسة تأثيرات نوع الزهرة (عامل A: النوعان LP , WB)، ومستوى الرطوبة (عامل B: منخفض، مرتفع) على إنتاج زهور قابلة للبيع (Y). وبسبب أن الوحدات التجريبية لم تكن من الحجم نفسه، رغب الباحث في استخدام حجم الوحدة التجريبية (X) كمتغير مصاحب. وقد كُررت كل معالجة ست مرات. والبيان الإحصائي مقدم في الجدول (٢٣-١١).

وقد تمّ توفيق نموذج الانحدار (23.50) للبيان الإحصائي باستخدام حزمة حاسب خاصة بالانحدار. ودالة الانحدار التوفيقية مبينة في الجدول (٢٣-١٢)أ. وقد رسم المحلل البيان الإحصائي وخطوط الانحدار التوفيقية (غير مبينة هنا)، وقام بعدد من رسومات الرواسب

والاختبارات. وعلى أساس هذه التشاخيص اقتنع بأن نموذج الانحدار (23.50) الذي يفترض دوال انحدار خطية متوازية وتباين ثابت للخطأ، هو نموذج مناسب هنا.

جدول (٢٣-١١) بيانات مثال الزهور القابلة للبيع

(نوع الزهرة) العامل A	العامل B (مستوى الرطوبة) j			
	B_1 (منخفض)		B_2 (مرتفع)	
i	Y_{i1k}	X_{i1k}	Y_{i2k}	X_{i2k}
النوع A_1 LP	98	15	71	10
	60	4	80	12
	77	7	86	14
	80	9	82	13
	95	14	46	2
	64	5	55	3
النوع A_2 WB	55	4	76	11
	60	5	68	10
	75	8	43	2
	65	7	47	3
	87	13	62	7
	78	11	70	9

وخطوط الانحدار التوفيقية للمعالجات الأربع الناتجة عن نموذج الانحدار التام (23.50)مقدمة في الشكل (٢٣-١٠)أ. ولدراسة طبيعة تأثيرات العوامل، نبين في الشكل (٢٣-١٠)ب الرسوم المعتادة لمتوسطات المعالجات المقدّرة. وجميع المتوسطات المقدَّرة هذه تقابل حجما $X = \bar{X} = 8.25$ للوحدة التجريبية أو $x = 0$. وسينتج أي حجم آخر للوحدة التجريبية العلاقات نفسها بالضبط التي نجدها في الشكل (٢٣-١٠)ب، ويبدو من الشكل (٢٣-١٠)ب عدم وجود تفاعلات مهمة بين نوع الزهور ومستوى الرطوبة، وقد يكون هناك تأثيرات رئيسة لكلا العاملين، وعلى وجه الخصوص لمستوى الرطوبة.

جدول (٢٣-١٢) مخرجات الحاسب لتشغيلات انحدار لمثال الزهور القابلة للبيع- نموذج الانحدار (23.50)

(أ) دالة انحدار توفيقية للنموذج (23.50)

$$\hat{Y} = 70.0 + 2.04234 I_1 + 3.68078 I_2 + .81922 I_1 I_2 + 3.27688_x$$

معامل انحدار	معامل انحدار مقدَّر	انحراف معياري مقدَّر
α_1	2.04234	.52108
β_1	3.68078	.51291
$(\alpha\beta)_{11}$	.81922	.51291
γ	3.27688	.13002

(ب) مجاميع مربعات إضافية

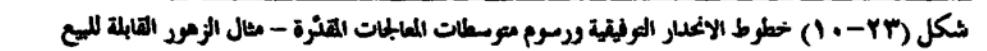
التأثير	مصدر التغير	*SS*	*df*	*MS*
المتغير المصاحب	$x \mid I_1, I_2, I_1 I_2$	3,994.52	1	3,994.52
	$I_1 \mid x, I_2, I_1 I_2$	96.60	1	96.60
	$I_2 \mid x, I_1, I_1 I_2$	323.85	1	323.85
	$I_1 I_2 \mid x, I_1, I_2$	16.04	1	16.04
	الخطأ	119.48	19	6.2884

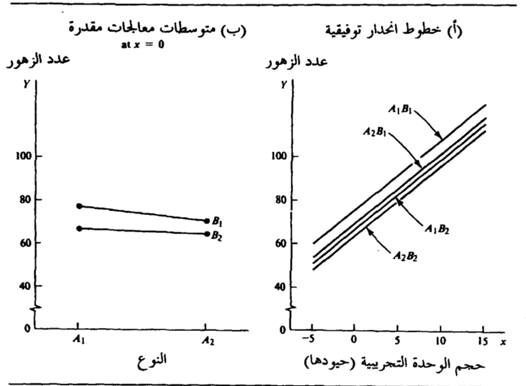
ولدراسة تأثيرات العوامل شُكّلت نماذج مخفضة بحذف متغير مستقل واحد في كل مـرة من نموذج الانحدار (23.50)، (باعتبار أن كلا من العاملين له مستويان) ثم جرى توفيق كل من هذه النماذج المخفضة. ومجاميع المربعات الناتجة بالإضافة إلى مجموع مربعات الخطأ للنموذج التام ودرجات الحرية ومتوسطات المربعات مقدمة جميعها في الجدول (٢٣-١٢)ب. ولايظهر مجموع مربعات كلي لأن مركبات تأثيرات العوامل ليست متعامدة.

ونختبر أولا وجود تفاعلات باستخدام إحصاءة الاختبار المعتادة F^*، مستخدمين النتائج في الجدول (٢٣-١٢)ب:

$$F^* = \frac{SSR(I_1 I_2 | x, I_1, I_2)}{1} \div MSE = \frac{16.04}{6.2884} = 2.55$$

ومن أجل $\alpha = 0.01$ نحتاج إلى $F(.99;1,19) = 8.18$. وبما أن $F^* = 2.55 \le 8.18$، نستنتج عدم وجود تفاعلات. والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0.13.


شكل (٢٣-١٠) خطوط الانحدار التوفيقية ورسوم متوسطات المعالجات المقدّرة - مثال الزهور القابلة للبيع



ونرغب الآن في مقارنة التأثيرات الرئيسة للعامل A والتأثيرات الرئيسة للعامل B مستخدمين فترات ثقة بمعامل ثقة عائلي 95 بالمائة. وبما أن $\alpha_2 = -\alpha_1$ ، فلدينا في المثال هنا:

$$D_1 = \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_1 - (-\alpha_1) = 2\alpha_1$$

وبصورة مماثلة نحصل عند مقارنة التأثيرات الرئيسة للعامل B:

$$D_2 = 2\beta_1$$

ومن نتائج الجدول (٢٣-١٢)أ نحصل بسهولة على تقديرات نقطية:

$$\hat{D}_1 = 2\hat{\alpha}_1 = 2(2.04234) = 4.08$$

$$\hat{D}_2 = 2\hat{\beta}_1 = 2(3.68078) = 7.36$$

وباستخدام (1.16b) نحصل بسهولة، أيضا، على الانحرافات المعيارية المقدَّرة:

$$s\{\hat{D}_1\} = 2s\{\hat{\alpha}_1\} = 2(52108) = 1.042$$

$$s\{\hat{D}_2\} = 2s\{\hat{\beta}_1\} = 2(51291) = 1.026$$

وسنستخدم طريقة التقدير المتزامنة لبونفيروني في حالة مقارنتين $g = 2$. ومن أجل معامل ثقة عائلي 95 بالمائة، نحتاج إلى: $t(1-.05/2(2); 19]= t(.9875; 19) = 2.433$.

وهكذا تكون فترتا الثقة المرغوبتين كما يلي:

$$1.5 = 4.08 - 2.433(1.042) \leq \alpha_1 - \alpha_2 \leq 4.08 + 2.433(1.042) = 6.6$$

$$4.9 = 7.36 - 2.433(1.026) \leq \beta_1 - \beta_2 \leq 7.36 + 2.433(1.026) = 9.9$$

ونستنتج، بمعامل ثقة عائلي 95 بالمائة، أن النوع *LP* يُنتج، في المتوسط، ما بين 1.5 الى 6.6 من الزهور القابلة للبيع أكثر من النوع *WB*، وذلك من أجل أي حجم معطى للوحدة التجريبية. وأيضا ، من أجل أي حجم معطى للوحدة التجريبية، يكون العدد المتوسط للزهور القابلة للبيع في حالة مستوى منخفض للرطوبة أكبر بما يتراوح بين 4.9 إلى 9.9 زهرة منه في حالة مستوى مرتفع للرطوبة. مما يشير إلى تأثير كبير لمستوى الرطوبة على الإنتاج.

ولو كانت التفاعلات موجودة لأمكننا دراسة طبيعة تأثيرات التفاعلات بمقارنة تأثير مستوى الرطوبة، على سبيل المثال، لكل من نوعي الزهور ويمكن تبيان أن هذه المقارنة معطاة بالعلاقة :

$$L = (\alpha\beta)_{12} = -(\alpha\beta)_{11}$$

وبالتالي يمكن تقدير تأثير التفاعل المرغوب باستخدام معامل الانحدار المقدَّر $\widehat{(\alpha\beta)}_{11}$ وانحرافه المعياري المقدَّر المبينان في الجدول (٢٣-١٢)أ.

ملاحظة

عندما تختلف حجوم العينة في الخلايا، في دراسات تغاير متعددة العوامل، يبقى أسلوب الانحدار قابلا للتطبيق لاختبار تأثيرات المعالجات إلا أن صيغ مجاميع المربعات المعدلة لا تعود مناسبة.

وينبغي استخدام حزم الحاسب الخاصة بتحليل التغاير مع حجوم عينة غير متساوية في الخلايا بحذر شديد بحيث نطمئن إلى أن الحزمة تقوم بالاختبارات التي ينبغي القيام بها.

(٢٣-٦) اعتبارات إضافية في استخدام تحليل التغاير

استخدام الفروق

في تشكيلة من الدراسات، تتوفر لكل وحدة دراسة مشاهدة سابقة *X* ودراسة مشاهدة لاحقة *Y* على المتغير نفسه. وعلى سبيل المثال، يمكن أن تمثل الدرجة *X* موقف شخص تجاه

شركة قبل قراءة تقريرها السنوي، و Y الدرجة بعد قراءة التقرير. والبديل الواضح لتحليل التغاير، في هذه الحالة، هو تطبيق تحليل التباين على الفروق $Y - X$. ويسمى الفرق $Y - X$، أحيانا ، دليل استجابة، لأنه يخرج بمشاهدة واحدة من مشاهدتين منفصلتين.

وإذا كان ميل خطوط انحدار المعالجات $\gamma = 1$ ، فإن تحليل التغاير يكون مكافئا في الأساس لتحليل التباين مطبقا على $Y - X$، إذ يصبح نموذج التغاير (23.2) عندما يكون $\gamma = 1$:

$$Y_{ij} = \mu. + \tau_i + X_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (23.55)$$

ويمكن كتابته كنموذج تحليل تباين نظامي:

$$Y_{ij} - X_{ij} = \mu. + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad (23.55a)$$

وهكذا إذا كانت وحدة تغير في X تؤدي إلى حوالي التغير نفسه في Y،، فمن المعقول القيام بتحليل تباين مطبقا على $Y - X$ بدلا من استخدام تحليل تغاير، ذلك لأن تحليل التباين أسهل بكثير. إلا أنه إذا لم يكن ميل الانحدار قريبا من الواحد، فقد يكون تحليل التغاير أكثر فعالية بكثير من استخدام الفرق $Y - X$.

وفي مثال ترويج البسكويت السابق لو أننا استخدمنا $Y - X$ لكان ذلك فعالا . إذ كان ذلك سينطوي على متوسط مربعات خطأ (انظر جدول ٢٣-٦):

$$\frac{SSE_Y + SSE_X - 2SPE}{12} = \frac{307.6 + 333.2 - 2(299.4)}{12} = 3.50$$

وهو عمليا نفس متوسط مربعات الخطأ $MSE(\text{adj.}) = 3.51$ لتحليل التغاير. ولنتذكر أن ميل الانحدار في مثالنا كان قريبا من الواحد ($g_w = 8986$) وبالتالي كان التكافؤ التقريبي للطريقتين.

تصحيح من أجل الانحياز

نجد أحيانا من يقترح أن تحليل التغاير يمكن أن يساعد في تصحيح الانحياز في بيانات المشاهدة. ففي مثل هذه البيانات يمكن أن تختلف المجموعات قيد الدراسة اختلافا بينا بالنسبة للمتغير المصاحب، ويمكن أن يسبب هذا انحيازا في مقارنة هذه المجموعات. فلنعتبر، مثلا ، دراسة قورنت فيها المواقف تجاه تأمين السيارات ضد الغير وذلك في أشخاص يمقتون المخاطرة وأشخاص يرغبونها. فقد وُجد أن العديد من الأشخاص في مجموعة من يمقتون المخاطرة ينحو الى أن يكون مسنا (50 إلى 70 سنة من العمر) ،بينما ينحو العديد من

الأشخاص في مجموعة من يرغبون في المخاطرة الى أن يكونوا من الشباب 20 إلى 40 سنة من العمر) وفي حالة من هذا النوع يُنصح باستخدام تحليل تغاير يتّخذ العمْر كمتغيرٍ مصاحب وذلك للمساعدة في إزاحة أي انحياز يمكن أن يوجد في بيانات المشاهدة بسبب اختلاف المجموعتين من الأعمار اختلافا كبيرا .

ومع أن هناك جاذبية كبيرة في فكرة إزاحة الانحياز في بيانات مشاهدة، إلا أنه ينبغي الحذر في استخدام تحليل التغاير لهذه الغاية. ففي المقام الأول، قد تتطلب المتوسطات المعدلة استيفاء خارجيا كبيرا لخطوط الانحدار إلى منطقة لايوجد فيها نقاط مشاهدة أو يوجد القليل منها، فقط، (في مثالنا، إلى جوار الـ 45 عاما). وكثيرا ماتكون علاقة الانحدار المستخدمة في تحليل التغاير غير مناسبة للقيام باستيفاء خارجي واسع. وفي المقام الثاني، يمكن أن يعتمد متغير المعالجة على المتغير المصاحب (أو العكس) مما يمكن أن يؤثر في استنباط النتائج السليمة.

الاهتمام بطبيعة تأثيرات المعالجة

يُستخدم تحليل التغاير أحيانا لغرض رئيس هو إلقاء مزيد من الضوء على طبيعة تأثيرات المعالجة، وليس لمجرد زيادة دقة التحليل. وعلى سبيل المثال، قد يستخدم باحث تسويق تحليل التغاير في دراسة لتأثيرات ثلاث دعايات مختلفة على السعر الأعظمي الذي يرحب المستهلكون بدفعه لقاء نوع جديد من ألواح الجدران الخارجية لمبنى خشبي، مع أخذ قيمة بيت المستهلك كمتغير مصاحب. والسبب هو أنه يهتم فعلا بالعلاقة بين قيمة المنزل والسعر الأعظمي من أجل كل من الدعايات الثلاث. ويمكن أن يكون تخفيض تباين الخطأ في هذا المثال أمرا ثانويا .

وكما في جميع تحليلات الانحدار، لابد من الحذر في استنباط أية استقراءات حول الطبيعة السببية للعلاقة بين المتغير المصاحب والمتغير التابع. وفي مثال الدعاية، من المحتمل جدا أن تتأثر قيمة بيت المستهلك إلى حد كبير بدخله. وإذا كان الأمر كذلك ، فإن العلاقة بين قيمة بيت المستهلك والسعر الأعظمي الذي يرحب المستهلك بدفعه يمكن أن تكون، وإلى حد كبير، في الواقع انعكاسا لعلاقة أكثر رسوخا بين الدخل والسعر الأعظمي.

مراجع ورد ذكرها

[23.1] *MINITAB Reference Manual, Release 7. State College, Pa.: Minitab, Inc.*, 1989.

مسائل

(٢٣-١) كان رد فعل طالب لعبارة المدرس بأن تحليل التغاير غير مناسب عندما لايكون لخطوط انحدار المعالجات الميل نفسه، كما يلي: "يبدو لي أن هذا تملّص من مسألة تطبيقية ناجحة إذا لم تكن ميول المعالجات مختلفة، فلنستخدم نموذج تغاير يسمح بميول مختلفة للمعالجات. قوّم رد الفعل هذا.

(٢٣-٢) لاحظ محلل مسح عينة: عندما يُستخدم تحليل تغاير لبيانات مسح، فهناك خطورة أن تكون المعالجات على صلة بالمتغير المصاحب."ما هي طبيعة المسألة؟ هل توجد المشكلة نفسها عندما تُخصص المعالجات إلى الوحدات التجريبية عشوائيا ؟.

(٢٣-٣) ارسم بصورة مشابهة للرسم الموجود في الشكل (٢-٧) ،(في الجزء الأول من هذا الكتاب) والخاص بنموذج انحدار، طبيعة نموذج التغاير (23.3) عند وجود ثلاث معالجات وتكون قيم المعالم:

$$\sigma=5, \bar{X}_{..}=70, \gamma=6, \tau_3=-10, \tau_2=-5, \tau_1=15, \mu_{.}=150$$

بيّن عدة توزيعات لـ Y من أجل كل معالجة.

(٢٣-٤) بالإشارة إلى مثال ترويج البسكويت فقرة (٢٣-٣).عرض طالب في مناقشته لهذه الحالة: "بعبارة دقيقة، لايمكن أن نستنتج أي شيء عما إذا كانت التراويج الثلاثة مختلفة في فعاليتها لأنه لم يكن هناك معالجة حيادية. والفترة السابقة لاتصلح كمعالجة حيادية لأنها قد تكون اختلفت عن فترة الترويج بسبب عوامل موسمية أو ظروف فريدة أخرى" علّق.

(٢٣-٥) بالإشارة إلى مثال ترويج البسكويت فقرة (٢٣-٣) حيث تمت ثلاث مقارنات ثنائية بين تأثيرات المعالجات باستخدام طريقة شيفّه.

أ ـ ماذا يمكن أن تكون قيمة عامل بونفيروني هنا لتقدير المقارنات الثلاث؟.

ب ـ هل حصل المحلل على فترات تقدير أقل دقة بكثير باستخدام طريقة شيفّه، ممـا يسمح له القيام بتقديرات إضافية دون تعديل التقديرات الحالية؟.

(٢٣-٦) اعرض نموذج تحليل تغـاير لدراسـة وحيـدة العـامل بـأربع معالجـات، وذلـك عنـد وجود متغيرين مصاحبين، ولكل منهما حد خطي وحد تربيعي في النموذج.

(٢٣-٧) بالإشـارة إلى مسـألة **تحسـين الانتاجيـة** (١٤-١٠). تتوفـر للاقتصـادي، أيضـا، معلومات عن تحسين الإنتاجية السنوي في السنة السابقة ويرغب في استخدام هـذه المعلومات كمتغير مصاحب. وفيما يلـي البيانـات عـن تحسـين الإنتاجيـة في السـنة السابقة X_{ij}:

j												
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i
			6.3	7.9	6.5	7.0	7.2	5.7	7.0	7.9	8.2	1
10.0	8.9	10.3	10.0	9.8	10.6	9.4	9.7	10.0	10.7	10.0	8.8	2
						12.1	12.3	11.0	12.8	12.2	11.5	3

أ ـ أوجد الرواسب لنموذج التغاير (23.3).

ب ـ لكل معالجة، ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية، قم، أيضا، بإعداد رسـم احتمال طبيعـي للرواسـب واحسـب معـامل الارتبـاط بـين الرواسـب المرتّبـة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟

جـ ـ اعرض نموذج الانحـدار المعمـم الـذي ينبغـي اسـتخدامه لاختبـار مـا إذا كـان لخطوط انحدار المعالجات الميـل نفسـه. قـم بهـذا الاختبـار مستخدما $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

د ـ هل يمكنك هنا القيام باختبار رسمي لما إذا كـانت دوال الانحـدار خطيـة؟ وإذا كان الأمر كذلك، فما هو عدد درجات الحرية الموافق لمتوسـط المربعـات في مقام إحصاءة الاختبار؟.

(٢٣-٨) بالإشارة الى مسألتي **تحسـين الانتاجيـة** (١٤-١٠) و(٢٣-٧). افـترض أن نمـوذج التغاير (23..3) مناسب.

أ ـ ارسـم البيانـات في هيئـة الشـكل (٢٣-٥). هـل يبـدو أن لمسـتويات نفقـات البحث والتطوير آثار على متوسط تحسن الإنتاجية؟ ناقش.

ب ـ اعرض في هذه الحالة نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التغاير (23.3) استخدم المتغيرات المؤشرة 1 , 1- ,0. اعرض، أيضا، النموذج المخفض لاختبار تأثيرات المعالجات.

جـ ـ قم بتوفيق النموذجين التام والمخفض واختبر تأثيرات المعالجات؛ استخدم $\alpha = .05$ اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟.

د ـ هل $MSE(F)$ لنموذج التغاير أصغر بكثير من MSE لنموذج تحليل التباين في (١٤-١٠) جـ؟ وهل يؤثر هذا في النتيجة التي توصلت إليها حول تأثيرات المعالجات؟ هل يؤثر في القيمة -P؟.

هـ ـ قدِّر متوسط تحسن الإنتاجية لشركات نفقات البحث والتطوير فيها معتدلة وكانت قد حققت تحسنا سابقا في الإنتاجية $X = 90$، استخدم 95 بالمائة فترة ثقة.

و ـ قُمْ بجميع المقارنات الثنائية بين تأثيرات المعالجات، وبـ 90 بالمائة معامل ثقة عائلي، استخدم إما طريقة بونفيروني أو طريقة شيفّه أيهما أكثر كفاءة. اعرض نتائجك.

(٢٣-٩) بالاشارة إلى مسألة **لون الاستبيان** (١٤-١١). اقتُرح على الباحث أن حجم موقف السيارات يمكن أن يكون متغيرا مصاحبا مفيدا . وعدد الأماكن (X_{ij}) في كل موقف شملته الدراسة كان كمايلي:

	j				
5	4	3	2	1	i
100	350	226	381	300	1
325	264	473	334	153	2
252	243	296	359	144	3

أ ـ أوجد الرواسب لنموذج التغاير (23.3).

ب ـ لكل معالجة، ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية. وجهِّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟.

جـ ـ اعرض نموذج الانحدار المعمم الذي يُراد استخدامه لاختبار ماإذا كان لخطوط انحدار المعالجات الميل نفسه أم لا. قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = .005$.
اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

د ـ هل يمكنك القيام باختبار رسمي هنا لما إذا كانت دوال الانحدار خطية؟ اشرح.

(٢٣-١٠) بالإشارة الى مسألتي **لـون الاستبيان** (١٤-١١) و(٢٣-٩) لنفرض أن نموذج التغاير (23.3) قابل للتطبيق.

أ ـ ارسم البيانات في هيئة الشكل (٢٣-٥). هل يبدو أن هناك تأثيرات للون الاستبيان على معدل متوسط الاستجابة؟ ناقش.

ب ـ اعرض نموذج الانحدار المكافيء لنموذج التغاير (23.3) في هذه الحالة مستخدما المتغيرات المؤشرة 1 ,1 - ,0. واعرض، أيضا، النموذج المخفض لاختبار تأثيرات المعالجات.

جـ ـ قم بتوفيق النموذجين التام والمخفض واختبر تأثيرات المعالجات؛ استخدم $\alpha = .10$ اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

د ـ هل $MSE(F)$ لنموذج التغاير أصغر بكثير من MSE لنموذج تحليل التباين في المسألة (١٤-١١)جـ؟ كيف يؤثر هذا في النتيجة التي توصلت إليها فيما يتعلق بتأثيرات المعالجات؟.

هـ ـ قدِّر معدل متوسط الاستجابة للاستبيانات الزرقاء في مواقف حجمها $x = 280$، استخدم 90 بالمائة فترة ثقة.

و ـ قم بجميع المقارنات الثنائية بين تأثيرات المعالجات، مع 90 بالمائة معامل ثقة عائلي استخدم إما طريقة بونفيروني أو طريقة شيفّه، أيهما أكثر كفاءة. اعرض نتائجك.

(٢٣-١١) بالإشارة إلى مسألة **معالجة إعادة التأهيل** (١٤-١٢). يرغب باحث إعادة التأهيل في استخدام عمر المريض كمتغير مصاحب. وفيما يلي أعمار المرضى (X_{ij}) في الدراسة:

					j					
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	i
		29.3	19.8	27.8	29.7	28.1	26.5	30.0	18.3	1
22.9	20.2	24.7	19.7	22.1	21.5	20.0	29.2	25.2	20.8	2
				20.0	21.7	18.0	18.9	28.7	22.7	3

أ - أوجد الرواسب لنموذج التغاير (23.3).

ب - لكل معالجة ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟

جـ - اعرض نموذج الانحدار المعمم الذي يُستخدم لاختبار ماإذا كان لخطوط انحدارالمعالجات الميل نفسه أم لا. قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

د - هل يمكنك تنفيذ اختبار رسمي هنا يتعلق بما إذا كانت دول الانحدار خطية؟ اشرح.

(٢٣-١٢) بالإشارة إلى مسألتي **معالجة إعادة التأهيل** (١٤- ١٢) و(٢٣-١١). افترض أن نموذج التغاير (23.3) قابل للتطبيق.

أ - ارسم البيانات في هيئة الشكل (٢٣-٥). هل يبدو أن هناك تأثيرات لحالة الكمال الجسماني على متوسط عدد الأيام المطلوبة للمعالجة؟ ناقش.

ب - اعرض نموذج الانحدار المكافيء لنموذج التغاير (23.3) في هذه الحالة، استخدم 1 ,-1 ,0، كمتغيرات مؤشرة. اعرض، أيضا، النموذج المخفض لاختبار تأثيرات المعالجات.

جـ - قم بتوفيق النموذجين التام والمخفض واختبر تأثيرات المعالجات، استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

د - هل $MSE(F)$ لنموذج التغاير أصغر بكثير من MSE لنموذج تحليل التباين في (١٤-١٢)جـ؟ كيف يؤثر هذا في النتيجة التي توصلت إليها فيما يتعلق

بتأثيرات المعالجات؟ هل يؤثر في القيمة -P؟

هـ - قدِّر متوسط عدد الأيام المطلوبة لمعالجة مرضى كمالهم الجسماني متوسط وأعمارهم 24 سنة، استخدم 99 بالمائة فترة ثقة.

و - قم بجميع المقارنات الثنائية بين تأثيرات المعالجات؛ ومع 95 بالمائة معامل ثقة عائلي، استخدم إما طريقة بونفيروني أو طريقة شيفّه، أيهما أكثر كفاءة. اعرض نتائجك.

(٢٣-١٣) **عرض مُنتج.** درس صانع لأقلام ذات رأس ملبّد (تُستخدم لوضع علامات)، عن طريق تجربة، ماإذا كانت طريقة عرض جديدة مقترحة، تتميز بصورة طبيب، أكثر كفاءة في محلات لبيع الأدوية وحاجات أخرى، من طريقة العرض الحاليةوالمتميزة بصورة رياضي ومصممة لوضعها في جناح الأدوات المكتبية. وقد اختير للدراسة خمسة عشر محلا ذات مواصفات متشابهة. وقد خصصت المحلات بالتساوي للمعالجات الثلاث التالية: (١) العرض الحالي في جناح الأدوات المكتبية. (٢) عرض جديد في جناح الأدوات المكتبية، (٣) عرض جديد في منطقة المحاسبة. وقد سُجلت المبيعات (X_{ij}) مع طريقة العرض الحالية في جميع المحلات الخمسة عشر ولفترة ثلاثة أسابيع. ثم نُفذت طريقة العرض الجديد في المحلات العشرة المخصصة لها وسُجلت المبيعات (Y_{ij}) لفترة الأسابيع الثلاثة التالية في جميع المحلات الخمسة عشر. وفيما يلي بيانات المبيعات (بالدولار):

i	j = 1	2	3	4	5
المعالجة 1					
الأسابيع الثلاثة الأولى	92	68	74	52	65
الأسابيع الثلاثة التالية	69	44	58	38	54
المعالجة 2					
الأسابيع الثلاثة الأولى	77	80	70	73	79
الأسابيع الثلاثة التالية	74	75	73	78	82
المعالجة 3					
الأسابيع الثلاثة الأولى	64	43	81	68	71
الأسابيع الثلاثة التالية	66	49	84	75	77

ويرغب المحلل في تحليل تأثيرات معالجات العرض المختلفة الثلاث مستخدما تحليل التغاير (23.3).

أ - أوجد الرواسب لنموذج، التغاير (23.3).

ب - لكل معالجة، ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتّبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟

جـ - اعرض نموذج الانحدار المعمم الذي يُستخدم لاختبار ماإذا كان لخطوط انحدار المعالجات الميل نفسه. قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار و النتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

د - هل يمكنك القيام باختبار رسمي هنا حول ماإذا كانت دوال الانحدار خطية؟ اشرح.

(١٤-٢٣) بالإشارة إلى مسألة **عرض مُنتج** (٢٣ ــ ١٤). افترض أن نموذج التغاير (23.3) قابل للتطبيق.

أ - ارسم البيانات في هيئة الشكل (٢٣ ــ ٥)، هل يبدو أن هناك تأثيرا لطريقة العرض على متوسط المبيعات؟ ناقش.

ب - اعرض نموذج التغاير المكافئ لنموذج التغاير (23.3) في هذه الحالة؛ استخدم المتغيرات المؤشرة 1 ,1- ,0. اعرض ، أيضا ، النموذج المخفّض لاختبار تأثيرات المعالجات.

جـ - قم بتوفيق النموذجين المخفّض والتام واختبر تأثيرات المعالجات؛ استخدم $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

د - هل $MSE(F)$ لنموذج التغاير أصغر بكثير من متوسط مربعات الخطأ الذي كان سينتج لو أن نموذج التحليل التباين (14.2) قد استُخدم؟

هـ - قدّر متوسط المبيعات بطريقة عرض المعالجة 2 لمحلات كانت مبيعاتها في فترة الأسابيع الثلاثة السابقة 75 دولارا ، استخدم 95 بالمائة فترة ثقة.

و - قم بجميع المقارنات الثنائية بين تاثيرات المعالجات؛ استخدم إما طريقة بونفيروني أو طرقة شيفّه، أيهما أكثر كفاءة، مع 90 بالمائة معامل ثقة عائلي. اعرض نتائجك.

(٢٣ - ١٥) بالإشارة إلى مسألة **العروض النقدية** (١٨-١٠) يرغب محلل في استخدام حجم المبيعات لكل تاجر سيارات كمتغير مصاحب، وفيما يلي بيانات المبيعات (X_{ijk} بمئات آلاف الدولارات).

$i=3$		$i=2$		$i=1$	
$j=2$	$j=1$	$j=2$	$j=1$	$j=2$	$j=1$
4.0	5.0	2.2	6.5	3.5	3.0
.8	3.1	5.4	4.1	4.2	5.1
1.9	3.2	3.1	2.2	2.2	1.0
2.8	3.2	4.5	3.7	3.1	4.4
2.2	3.0	3.6	3.4	1.3	2.7
1.9	2.9	5.0	3.0	6.6	4.9

أ - احسب الرواسب لنموذج التغاير (23.49).

ب - لكل معالجة، ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعة. ماذا تستنتج من تحليلك؟

جـ - اعرض نموذج الانحدار المعمم الذي يُستخدم لاختبار ما إذا كان لخطوط انحدار المعالجات الميل نفسه. قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = .01$، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة، ما هي القيمة -P للاختبار.

(٢٣-١٦) بالإشارة إلى مسألتي **العروض النقدية** (١٨ -١٠) و(٢٣-١٥). افترض أن نموذج التغاير (23.49) قابل للتطبيق.

أ - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التغاير (23.49) في هذه الحالة استخدم المتغيرات المؤشرة 1 ,1- ,0. قم بتوفيق هذا النموذج التام.

ب - اعرض النماذج المخفضة لاختبار التفاعل، ولاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B، على الترتيب. قم بتوفيق هذه النماذج المخفضة.

جـ - اختبر تأثيرات التفاعل؛ استخدم $\alpha = .05$ اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

د - اختبر التأثيرات الرئيسة للعامل A؛ استخدم $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

و - من أجل كل عامل، قم بجميع المقارنات الثنائية بين التأثيرات الرئيسة لمستوى العامل. استخدم طريقة بونفيروني مع 90 بالمائة معامل ثقة عائلي. اعرض نتائجك.

(٢٣-١٧) بالإشارة إلى مسألة **تأثير النظر إلى عدسة التصوير** (١٨-١٢). يُراد استخدام عمر مندوب شؤون الموظفين كمتغير مصاحب. وفيما يلي أعمار مندوبي شؤون الموظفين (X_{ijk}):

$i=2$		$i=1$	
$j=2$	$j=1$	$j=2$	$j=1$
42	43	51	42
47	53	35	30
46	40	48	47
49	50	38	31
46	49	49	35

أ - أوجد الرواسب لنموذج التغاير (23.49).

ب - لكل معالجة، ارسم الرواسب مقابل القيم التوفيقية. جهِّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟

جـ - اعرض نموذج الانحدار المعمّم الذي يُستخدم لاختبار ما إذا كان لخطوط انحدار المعالجات الميل نفسه أم لا. قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

(٢٣-١٨) بالإشارة إلى مسألتي **تأثير النظر إلى عدسة التصوير** (١٨-١٢) و(٢٣-١٧). افترض أن نموذج التغاير (23.49) قابل للتطبيق.

أ - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التغاير (23.49) في هذه الحالة؛ استخدم المتغيرات المؤشرة 1 ,1- ,0 قم بتوفيق هذا النموذج التام.

ب - اعرض النماذج المخفضة لاختبار التفاعل، ولاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A والعامل B، على الترتيب. قم بتوفيق هذه النماذج المخفّضة.

جـ - اختبر تأثيرات التفاعل؛ استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

د - اختبر التأثيرات الرئيسة للعامل A استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

هـ - اختبر التأثيرات الرئيسة للعامل B؛ استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

و - قارن التأثيرات الرئيسة للجنس عن طريق 99 بالمائة فترة ثقة. فسّر تقديرك بفترة.

ز - قدر متوسط ترتيب النجاح لمندوبي شؤون الموظفين الإناث اللواتي أعمارهن 40 سنة، وذلك عند تقديم الصور لهن؛ استخدم 99 بالمائة فترة ثقة.

(٢٣-١٩) بالإشارة إلى مسألتي **تحسن الإنتاجية** (٢٣-٧) و(٢٣-٨). يريد المحلل استخدام الفرق بين تحسين الإنتاجية في العاملين $(Y_{ij} - X_{ij})$ كمتغير تابع وتطبيق نموذج تحليل التباين (23.55a) النظامي.

أ - أوجد جدول تحليل التباين.

ب - ما هي فعالية استخدام الفرق ونموذج التحاين النظامي هنا بالمقارنة مع استخدام نموذج التغاير (23.3)؟ ناقش.

(٢٣-٢٠) بالإشارة إلى مسألتي **عرض المنتج** (٢٣-١٣) و(٢٣-١٤)، يريد المحلل استخدام الفرق في المبيعات بين الفترتين $(Y_{ij} - X_{ij})$ كمتغير تابع وتطبيق نموذج تحليل التباين النظامي (23.55a).

أ - أوجد جدول تحليل التباين.

ب ـ ما هي فعالية استخدام الفرق ونمـوذج التحـاين النظـامي هنـا بالمقارنـة مـع استخدام نموذج التغاير (23.3)؟ ناقش.

تمارين

(٢٣-٢١) (في حاجة إلى حساب التفـاضل والتكـامل) لنرمز لـ $\mu. + \tau_i$ في نمـوذج التغـاير (23.3) بـ Δ_i. استنبط مقـدّري المربعـات الدنيـا لـ Δ_i و γ في نمـوذج التغـاير (23.3).

(٢٣-٢٢) بين أن $\sigma^2\left\{\overline{Y}_{i.}(\text{adj.})\right\}$ معطى بـ (23.41).

(٢٣-٢٣) بيّـن أن تبـاين مقارنـة بـين المتوسـطات المقـدَّرة المعدَّلـة للمعالجـات، $\hat{L}=\sum c_i\left[\overline{Y}_i(\text{adj.})\right]$ معطى بـ:

$$\sigma^2\{\hat{L}\}=\sigma^2\left[\sum\frac{c_i^2}{n_i}+\frac{(\sum c_i\overline{X}_{i.})^2}{SSE_X}\right]$$

مشاريع

(٢٣-٢٤) بالإشـارة إلى مجموعـة بيانـات ***SENIC*** سـنعتبر المستشـفيات التاليـة في دراسـة لتاثيرات المنطقة (المتغير 9) على متوسط طول فترة إقامـة المرضـى (المتغـير 2) مـع أخذ التسهيلات والخدمات المتوفرة (المتغير 12) كمتغير مصاحب:

1 - 52 54 55 57 58 63 76 83 84 94 101 103 111

أ ـ أوجد الرواسب لنموذج التغاير (23.3).

ب ـ لكل منطقة، ارسم الرواسب في مقابل القيم التوفيقية، جهّز، أيضـا، رسـم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟

جـ ـ اعرض نموذج الانحدار المعمّم الـذي يُستخدم لاختبـار مـا إذا كـان لخطـوط الانحدار الميل نفسه. قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = .05$. اعـرض البدائـل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P لهذا الاختبار؟.

(٢٣-٢٥) بالإشارة إلى مجموعة البيانات ***SENIC*** والمشروع (٢٣-٢٤).

افترض أن نموذج التغاير (23.3) قابل للتطبيق.

أ ـ ارسم البيانات في هيئة الشكل (٢٣ـ٥)، هل يبدو أن هناك تأثيرات للمنطقة على متوسط طول فترة الإقامة في مستشفى؟ ناقش.

ب ـ اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التغاير (23.3) في هذه الحالة؛ استخدم المتغيرات المؤشرة 1 ,1- ,0. واعرض، أيضا، النموذج المخفض لاختبار تأثيرات المعالجات.

جـ ـ قم بجميع المقارنات الثنائية بين تأثيرات المناطق؛ استخدم إما طريقة بونفيروني أو طريقة شيفّه، أيهما أكثر كفاءة، مع 90 بالمائة معامل ثقة عائلي اعرض نتائجك.

(٢٣ـ٢٦) بالإشارة إلى مجموعة البيانات ***SMSA***. سنعتبر المناطق الحضرية التالية في دراسة لتأثيرات المنطقة (عامل A : متغير 12) والنسبة المئوية من السكان في المدن المركزية (عامل B : متغير 4) على معدل الجريمة (متغير 11 مقسوما على متغير 3)، مع أخذ نسبة السكان الذين بلغوا 65 عاما فأكثر (متغير 5) من العمر كمتغير مصاحب :

1-45	49	51-54	58	60-62	64	66	71
73	80	92	101	123	130	131	

ولغايات تتعلق بدراسة تحليل التغاير هذه، سنصنف النسب المئوية من السكان في المدن المركزية إلى صنفين 37.0 بالمائة أو أقل و 37.1 بالمائة أو أكثر.

أ ـ أوجد الرواسب لنموذج التغاير (23.49).

ب ـ لكل معالجة، ارسم الرواسب في مقابل القيم التوفيقية، جهِّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب، واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبّة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. ماذا تستنتج من تحليلك؟

جـ ـ اعرض نموذج الانحدار المعمم الذي يُستخدم لاختبار ما إذا كان لخطوط انحدار المعالجات الميل نفسه، قم بهذا الاختبار مستخدما $\alpha = .001$. اعرض البدائل قاعدة القرار والنتيجة، ما هي القيمة -P لهذا الاختبار؟

(٢٣-٢٧) بالإشارة إلى مجموعة البيانات ***SMSA*** والمشروع (٢٣-٢٦). افترض أن نموذج التغاير (23.49) قابل للتطبيق.

أ - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التغاير (23.49) في هذه الحالة استخدم المتغيرات المؤشرة 1 ,1- ,0. قم بتوفيق هذا النموذج التام.

ب - اعرض النماذج المخفضة لاختبار التفاعل ولاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B، على الترتيب. قم بتوفيق هذه النماذج.

جـ - اختبر وجود تأثيرات التفاعل؛ استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل قاعدة القرار، والنتيجة، ما هي القيمة -P للاختبار؟

د - اختبر وجود التأثيرات الرئيسة للعامل A؛ استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

هـ - اختبر وجود التأثيرات الرئيسة للعامل B؛ استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

و - قم بجميع المقارنات الثنائية بين التأثيرات الرئيسة للمناطق؛ استخدم إما طريقة بونفيروني أو طريقة شيفّه أيهما أكثر كفاءة، مع 95 بالمائة معامل ثقة عائلي. اعرض نتائجك.

تصاميم القطاعات العشوائية - I

يُستخدم التجريب الرسمي على نطاق واسع في العلوم الاجتماعية والأحيائية (البيولوجية). وإذ نجده يُطبق حديثا الى حد ما، في ميادين مثل الأعمال والاقتصاد، إلا أننا نواجه اليوم تشكيلة واسعة من الاستخدامات في هذه الميادين، أيضا . وأحد الأمثلة هو تجربة لتقصّي أفضل مستوى لتجميع بيانات شركة يقدّمها نظام معلومات إداري إلى مديرين من المستوى المتوسط. والآخر هو تجربة حول تأثير دخل مضمون على السلوك الاستهلاكي للأسر. وقد صُممت التجربة الأخيرة بتقسيم فئة من الأسر ذات الدخل المحدود (المنخفض) تقسيما عشوائيا إلى نصفين: أحدهما تلقى دعما يرفع الدخل إلى مستوى سنوي مضمون، بينما لم يتلق النصف الآخر أي دعم ثم روقب السلوك الاستهلاكي لكل فئة من الأسر.

وقد اعتبرنا حتى الآن تحليل بيانات تجريبية من دراسات مبنية على تصميم تام العشوائية. إلا أن هناك العديد من الأنواع الأخرى للتصاميم التجريبية المستخدمة على نطاق واسع، وسندرس في هذا الجزء التصاميم الأكثر أهمية من بينها.

ونبدأ هذا الفصل بدراسة العناصر الرئيسة لأي تصميم تجريبي والإسهامات الإحصائية نحو تصاميم تجريبية فعالة. ثم نتابع فيما تبقى من هذا الفصل وفي الفصل القادم تصاميم القطاع العشوائي. وفي الفصول اللاحقة، سنناقش تصاميم تجريبية أخرى مستخدمة على نطاق واسع.

(٢٤-١) تصميم تجارب

يشير تصميم تجربة إلى بنية التجربة مع الإشارة، بوجه خاص، إلى:

١- مجموعة المعالجات التي تشملها الدراسة.

٢- مجموعة الوحدات التجريبية التي تشملها الدراسة.

٣- القواعد والإجراءات التي تُخصص بموجبها المعالجات إلى الوحدات التجريبية (أو بالعكس).

٤- القياسات التي تتم على الوحدات التجريبية بعد تطبيق المعالجات.

وتهتم التصاميم الإحصائية للتجارب بالقواعد والإجراءات التي يتم بموجبها تخصيص المعالجات إلى الوحدات التجريبية. وتُقدم الطرائقية الإحصائية، أيضا، إسهامات إلى العناصر الأخرى للتصميم التجريبي، إلا أننا سنحط الرحال بصورة رئيسة على كيفية تخصيص المعالجات إلى الوحدات التجريبية بحيث يكون استخدام هذه الوحدات التجريبية استخداما كفؤا .

ويمكن أن يؤدي الاستخدام غير السليم لقواعد وإجراءات تخصيص المعالجات إلى الوحدات التجريبية إلى صعوبات جدية. وعلى سبيل المثال، في دراسة طبية صُممت لمقارنة معالجة قياسية بمعالجة جديدة وشديدة الخطورة، وقد تألفت الفئة التي خضعت للمعالجة الجديدة من متطوعين. وكان هؤلاء المتطوعون عند بدء الدراسة، أضعف صحيا من المرضى الذين تلقوا المعالجة القياسية. وبالرغم من حقيقة أن لكل من المعالجتين القياسية والجديدة الفعالية نفسها، إلا أن تحليل الحالة الصحية للمرضى في نهاية الدراسة أظهر فرقا مهما بين الفئتين، بمعنى أن الحالة الصحية لفئة المعالجة الجديدة كانت أضعف. وبالتالي يكون استنتاج أن المعالجة الجديدة أقل كفاءة استنتاجا منحازا . ويُسمى مصدر الانحياز هنا "انحياز اختيار" لأن الوحدات التجريبية لفئتي المعالجتين لم تكونا متماثلتين. ويمكن جعل انحياز الاختيار أقل مايمكن عن طريق العشوائية. وينحو استخدام العشوائية إلى الموازنة بين الوحدات التجريبية في كل فئة معالجة وذلك فيما يتعلق بالعوامل، فيما عدا المعالجة، التي تؤثر في النتيجة.

وعملية القياس هي عنصر مهم آخر في التصاميم التجريبية. وعلى المستوى النموذجي ينبغي لعملية القياس أن تُنتج قياسات غير منحازة ومُحْكمة. ويمكن أن

يسبب انحياز القياس صعوبات جمّة في تحليل الدراسة. ويعود المصدر المهم لانحياز القياس إلى فروق لا يمكن التعرف عليها في عملية التقويم. وعلى سبيل المثال، يمكن أن يقوّم الباحث، وعن غير قصد، مجموعة من النباتات خُصّصت عشوائيا إلى معالجة مبيد حشري جديد، بأنها تستجيب للمعالجة أفضل مما هي في الواقع بسبب الرغبة في إظهار المعالجة الجديدة على أنها فعّالة. وعندما تكون الوحدة التجريبية شخصا فقد يكون لمعرفة الشخص بالمعالجة أثره، أيضا، في القياس الملحوظ. وعلى سبيل المثال، عند تقويم مذاق نوع من الخضار، قد يستجيب شخص يعلم أن ماأضيف كان ملحا بصورة مختلفة عما لو لم يكن يعلم نوع الإضافة. ويمكن جعل هذا المصدر من انحياز القياس في حدوده الدنيا بإخفاء المعالجة المخصّصة عن كل من العنصر التجريبي ومَنْ يقوم بعملية التقويم. وتُدعى الدراسة التي تستخدم هذا النوع من التعمية دراسة "مضاعفة التعمية". وعند إخفاء المعالجة المخصصة عن العنصر التجريبي، فقط، أو عن المقوِّم، فقط، تدعى الدراسة دراسة "وحيدة التعمية".

(٢٤-٢) إسهامات الإحصاء في عملية التجريب

قدم الإحصاء عددا من الإسهامات المهمة في عملية التجريب. ونستعرض باختصار أربعا من أهمها:

التجارب العاملية

اعتُبر هذا الإسهام في الفصل ١٨ وقد نوّهنا هناك أن الدراسات متعددة العوامل تسمح بتحليل عدد من العوامل بالدقة نفسها كما لو أن التجربة بكاملها قد كرّست لدراسة عامل واحد، فقط. وبالإضافة إلى ذلك، فإن تجربة عاملية بمفردها تقدم معلومات عن تأثيرات التفاعل، بينما يتطلب الأسلوب التقليدي (الكلاسيكي) أو دراسة العوامل واحدا فآخر، سلسلة من التجارب للقيام بذلك.

التكرار

يشير التكرار الى إعادة تجربة. لنأخذ تجربة تتألف من ثلاث معالجات. فيشكل تخصيص ثلاث وحدات تجريبية عشوائيا ، وحدة لكل معالجة، تكرارا واحدا

للتجربة. ويشكل تخصيص ثلاث وحدات تجريبية إضافية، بصورة عشوائية، إلى المعالجات الثلاث تكرارا ثانيا ، وهكذا دواليك.

وليست جميع الإعادات تكرارات. فلنفرض أننا درسنا خطتين تشجيعيتين لدفع الأجور واستخدمنا شركتين في الدراسة، حيث تُخصص شركة واحدة لكل خطة تشجيعية. لنفرض الآن أننا اخترنا عشرة مستخدمين من كل شركة وقسنا إنتاجيتهم. وفيما يتعلق بهدف مقارنة خطتي الدفع التشجيعيتين، فإن الشركات هي الوحدات التجريبية، أي أن هناك تكرار واحد، فقط (شركة لكل خطة). وليس 10 (عدد المستخدمين الذين خضعوا للدراسة في كل شركة). ومع تكرار واحد، فقط، هنا لايمكن، في الحقيقة، فصل تأثيرات خطة الدفع التشجيعية عن تأثيرات الشركة، ويُقال أن التأثيرين اختلطا. وسوف لايسمح اختيار مستخدمين إضافيين بفصل تأثيرات خطة الدفع التشجيعية عن تأثيرات الشركة وسوف لايسمح بذلك إلا إعادة التجربة في شركات إضافية. (أي تكرار التجربة).

والتكرارات تجعل من الممكن الحصول على متوسط مربعات الخطأ وهو المقدار الذي نحتاجه لاختبار وجود تأثيرات المعالجات أو لوضع تقديرات بفترة ثقة لهذه التأثيرات، وذلك كما رأينا في فصول سابقة. ويلعب التكرار، أيضا، دورا ثانيا إذ يسمح بالتحكم بدقة التقديرات إو بقوة الاختبارات من خلال التصرف بحجم التكرار (حجم العينة). ومرة أخرى فقد شاهدنا هذا في فصول سابقة.

العشوائية

العشوائية في التجارب هي فكرة حديثة نسبيا ، فأول من قدمها كان الإحصائي البريطاني المشهور السير رونالد فيشر (*R.A.Fisher*). كانت المعالجات تُخصص في الماضي إلى الوحدات التجريبية على أساس نمطي أو على أساس شخصي. وقد لاحظنا سابقا كيف يمكن أن تبرز انحيازات جدية عند استخدام الاختيار الذاتي في تخصيص الوحدات التجريبية إلى المعالجات. وتوجد المخاطر نفسها مع الاختيار النمطي أو الشخصي، ولتوضيح انحيازات اختيار كبيرة عندما تكون التخصيصات نمطية، لنتأمل

تجربة تشمل عشرة مستخدمين ومعالجتين، وقد خُصصت المعالجة١ لأول خمسة مستخدمين على قائمة دفع الأجور وخُصصت المعالجة ٢ للخمسة الذين يلونهم في القائمة. ولنفترض أن قائمة دفع الأجور مُعدّة على أساس القِدَم وأن هذا المتغير على صلة بالظاهرة المدروسة، ولنقل، الإنتاجية. فالمقارنة بين المعالجتين ١ و ٢ لاتعكس، فقط، الفروق بين المعالجتين.بل تعكس، أيضا، الفروق في مقدار الخبرة بين الفئتين من المستخدمين. ويمكن أن يكون هذا الانحياز المهم جليًا إلى الحد الذي يمنع أي مجرّب جيد من استخدام نوع التخصيص النمطي الموصوف آنفا . ومع ذلك، فقد يكون هناك العديد من المصادر الأخرى للانحياز التي هي ليست على هذه الدرجة من الوضوح.

ويمكن للتخصيصات الشخصية للمعالجات أن تؤدي، أيضا، إلى انحياز اختيار، كما في الحالة التي ينحو فيها المجرب، بصورة لاشعورية، إلى تخصيص معالجة إلى عناصر تجريبية تتصف بدرجة عالية من الغيْرية أو الإنفتاح، بينما يخصص المعالجة الأخرى إلى عناصر أقل غيْرية أو انفتاحا .

ومع العشوائية تُخصص المعالجات إلى الوحدات التجريبية عشوائيا . وتنحو العشوائية إلى الموازنة، في المتوسط، بين المعالجات، وذلك بصرف النظر عما يمكن أن يوجد من تأثيرات نمطية، ظاهرة أو مخبأة، وبحيث تقيس المقارنات بين المعالجات التأثيرات الصّرفة للمعالجات، فقط. وهكذا تُفضي العشوائية إلى إلغاء نفوذ العوامل الخارجية التي لاتقع تحت السيطرة المباشرة للمجرب، وتحول بالتالي دون تواجد انحياز الاختيار، وقد شبّه كوكران وكوكس (*Cochran & Cox*)، (المرجع 24.1، صفحة ٨) العشوائية بعقد تأمين، من حيث أنها نوع من التدبير الوقائي ضد الانحيازات ماكان منها ممكن الوقوع وما لم يكن.

والعشوائية ليست مناسبة، فقط، لتخصيص المعالجات إلى الوحدات التجريبية ولكنها مناسبة، أيضا، لأية أطوار أخرى للتجربة حيث يمكن أن تتواجد تأثيرات نمطية لاتقع تحت السيطرة المباشرة للمجرب، فعلى سبيل المثال، لنعتبر تجربة استُخدم

فيها عشرون عنصرا وخمس معالجات (بدائل من طرق قياس احتمـال ذاتـي). ويمكـن تناول عنصر واحد في اليوم؛ وهكذا نحتاج الى أربعة أسابيع لإتمام التجربة. ففـي حالـة من هذا النوع يكون من المستحسن جـدا تحديـد ترتيـب المعالجـات بصورة عشـوائية باعتبار أنه يمكن أن تتواجد تأثيرات نمطية للزمن. إذ قـد يُحسِّن المجـرب، مـع الزمـن، شرحه لطرق قياس احتمال ذاتي، أو قد توجـد فـترة مـن الطقـس الحـار جـدا خـلال أسبوع معين، وماشابه. ومع هذه التأثيرات الممكنة للزمن، يمكن أن يؤدي التخصيـص النمطي لمعالجـة واحـدة كـل أسبوع إلى نتـائج منحـازة انحيـازا خطـيرا . وسـتنحو العشوائية، على الوجه الآخر، إلى الموازنة في المتوسط بين أية تأثيرات نمطيـة متواجـدة، سواء أكانت تأثيرات متوقعة أم لا.

والنصيحة فيما يتعلق بمتى نحتاج إلى العشوائية، إضافة إلى تخصيص المعالجـات إلى الوحـدات التجريبيـة، لايمكـن أن تكـون إلا نصيحـة عامـة. ومـن المؤكـد أنـه ينبغـي استخدام العشوائية حيثما يمكن لتبعات التأثيرات النمطية أن تكون تبعـات جدّيـة. وفي توضيحنا المتعلق بطرق قياس احتمال ذاتي، لنفترض أن مجرّبين يقومان بتنفيذ التجربـة، فمن المستحسن جدا تخصيـص المجربَـين عشـوائيا إلى الـتراكيب المختلفـة لمعالجـة مـع وحدة تجريبية، إذ من المتعارف عليه وجود فروق كبيرة بين المجرّبَين في حالات من هذا النوع، وإذا لم تكن خطورة التَّبعات معروفـة، فـالتصرف السـليم هـو التعشـية وذلـك حيثما كانت التعشية ممكنة وتكاليفها غير مرتفعة. وإذا لم يكن تنفيذ العشـوائية سـهلا ولانتوقع وجود تبعات جدّية للتأثيرات النمطيـة، فقـد يرحـب المجرب بالإمسـاك عـن العشوائية. وعلى أي حال لابد للمجرّب أو للمجرّبة أن يدركـا عندئـذ أن مشـروعية المقارنات بين المعالجات تعتمد على غياب أية تأثيرات نمطية جدية.

تعليقات

١ – يمكن النظر إلى مضامين العشوائية بطريقة مختلفة، إلى حد مـا، عمـا قدّمنـاه حتى الآن. فالأخطاء العشوائية للوحدات التجريبية المتجاورة في الزمان أو المكـان هـي أخطاء مرتبطة في الغالب، وليست مستقلة، وذلك كنتيجة لتأثيرات نمطية فوق الزمـان

أو المكان. ولاتمحو العشوائية هذا النمط من الارتباط ولكنها، إذ تجعل فرص تجاور أي معالجتين فرصا متساوية، تنحو، مع زيادة التكرارات، إلى إلغاء الارتباطات بين المعالجات. وهكذا تجعل العشوائية تحليل البيانات، وكأن حدود الخطأ العشوائي في النموذج مستقلة، تحليلا مقبولا ، الفرض الذي مافتئنا نعتمده في جميع النماذج التي ناقشناها حتى الآن تقريبا .

٢– في أحيان نادرة يمكن أن تقدم العشوائية نمطا يقلق المجرب، كأن تُخصص الوحدات التجريبية الأربع للمعالجة 1 أولا ثم تُخصص الوحدات التجريبية الأربع التالية للمعالجة 2. واحتمال مثل هذه الواقعة ضعيف، إلا أنه يمكن حصولها. وقد اقتُرحت بعض الحلول لهذه المشكلة إلا أن أيا منها لم يقدم جوابا نهائيا . وفي الواقع العملي، من التقليدي أن ينبذ المجرّب متتابعة عشوائية تبدو منها أخطار تأثيرات نمطية في تجربة بالذات ويختار لها تعشية أخرى.

٣– يمكن أن تقدم العشوائية أساسا للقيام باستقراءات دون الحاجة إلى أن تكون حدود الخطأ مستقلة و $N(0, \sigma^2)$. ونوضح هذا في حالة تجربة وحيدة العامل، تتألف من معالجتين وثلاثة تكرارات. وفي هذه التجربة خُصصت المعالجات إلى الوحدات التجريبية عشوائيا . لنفترض أن البيانات كانت كما يلي:

معالجة 1	معالجة 2
3	6
9	2
4	10

ولنفترض الآن النموذج البسيط التالي (يمكن تعميمه):

(24.1) Y_{ij} = (كمية تعتمد على الوحدة التجريبية) + (كمية تعتمد على المعالجة)

ويُنظر إلى كل من الكميات المتعلقة بالوحدات التجريبية والكميات المتعلقة بالمعالجات على أنها مثبتة. والمصدر الوحيد للعشوائية في النموذج هو التخصيص العشوائي للمعالجات إلى الوحدات التجريبية. لنفترض الآن أن تأثيري المعالجتين متساويان. ففي هذه الحالة كان يمكن أن تتوفر الفرصة نفسها لمشاهدة الأعداد 3 ,9 ,4

من المعالجة 2، والأعداد 10, 2, 6 من المعالجة 1، باعتبار أن المعالجات قد خُصصت إلى الوحدات التجريبية عشوائيا . وفي الحقيقة، إذا كان تأثيرا المعالجتين متساويين، فسيكون لأي تقسيم للمشاهدات الست إلى مجموعتين من ثلاث مشاهدات فرص متساوية. وهكذا إذا لم تكن هناك أية تأثيرات للمعالجات، فسيكون لكل ترتيبه في قائمة جميع الترتيبات الممكنة الفرصة نفسها:

معالجة 1	معالجة 2
3, 9, 4	6, 2, 10
3, 9, 6	4, 2, 10
3, 9, 2	6, 4, 10
etc.	etc.

ومن ثم ننظر إلى مسألة مقارنة المعالجات كمسألة تحليل تباين وحيدة العامل ونحسب $F^* = MSTR / MSE$ لكل ترتيبة. وبذلك نحصل على توزيع المعاينة المضبوط لـ F^* عندما يكون تأثيرا المعالجتين متساويين. وقد بينت كل من الدراسات النظرية والتجريبية أن توزيع المعاينة الذي نحصل عليه بهذه الطريقة قريب من التوزيع F شريطة أن لاتكون حجوم العينات صغيرة جدا . وهكذا يمكن للعشوائية بمفردها أن تبرر استخدام الاختبار F كاختبار تقريبي جيد دون الحاجة إلى أية افتراضات عن استقلال وطبيعية حدود الخطأ.

التحكم الموضعي

والإسهام الرابع للإحصاء في التصميم هو مفهوم التحكم الموضعي الذي يُعتبر، في الغالب، مفهوما خاصا بالتصميم الإحصائي. ويهدف التحكم الموضعي إلى تخفيض الأخطاء التجريبية وجعل التجربة أكثر فعالية من خلال قيود مناسبة على تعشية المعالجات إلى الوحدات التجريبية. لنعتبر ثانية الدراسة الخاصة بطرق خمسة لقياس الاحتمال الذاتي، والتي ستُنفذ فوق فترة أربعة أسابيع. وقد انتابنا في مناقشتنا السابقة الظنّ بأن العشوائية التامة قد لاتؤدي إلى توازن تام بين المعالجات ضمن فترة الأسابيع الأربعة. أليس من الأفضل لو أننا تقيّدنا باحتواء كل أسبوع لكل من

المعالجات الخمس مرة واحدة ؟ إذا كان من المتوقع أن يكون للزمن تأثير كبير، فسيكون من المستحسن، في الحقيقة، استخدام هذا الشكل من التعشية المقيّدة، وتُسمى "التجميع في قطاعات". وبذلك تتم تعشية ترتيب المعالجات تحت القيد بأن كل معالجة تقع مرة واحدة في كل أسبوع. وسنرى لاحقا أنه إذا كان تأثير الزمن موجودا ، فإن التجميع في قطاعات سيقود إلى نتائج أدقّ من نتائج العشوائية التامة بكثير.

دعنا ننظر الآن إلى المثال نفسه من وجهة نظر مختلفة قليلا ، فمع العشوائية المقيدة ستختلف المشاهدات الخمس، في تكرار بمفرده للتجربة، فيما بينها، بسبب تأثيرات المعالجات، وبسبب تأثيرات الزمن (باعتبار أن المعالجات يمكن أن تحطّ رحالها في أي من الأسابيع الأربعة)، وهلمجرا. وإذا تقيّدنا بتنفيذ كل من المعالجات الخمس في كل أسبوع فستشكل مشاهدات أسبوع، عندئذ، تكرارا . ومن جديد ستختلف المشاهدات ضمن تكرار كهذا بسبب تأثيرات المعالجات وتشكيلة من الأسباب الأخرى، ولكن ليس بسبب أية تأثيرات للزمن من أسبوع إلى آخر. والتأخير الوحيد المتبقّي للزمن هو التأثير ضمن أسبوع واحد، وهو تأثير نتوقع أن يكون أصغر بكثير من التأثيرات بين الأسابيع. وهكذا سيُخفّض التجميع وفقا للأسبوع من تشتت الخطأ التجريبي في حال وجود تأثير للزمن، وبهذه الطريقة نجعل التجربة أكثر فعالية.

والفائدة الأخرى للتجميع في قطاعات هو أنه يمكن أن يزيد في مدى صلاحية النتائج المستخلصة من التجربة. وبصورة عامة، يمكن جعل الأخطاء التجريبية أصغر (أي يمكن جعل تباين المركبة العشوائية أصغر) باستخدام وحدات تجريبية متشابهة، مما يقود إلى نتائج تجريبية أكثر دقة. وهكذا ففي تجربة تعلّم، سينحو استخدام أشخاص من العمر نفسه والذكاء نفسه، والخلفية الاجتماعية الاقتصادية نفسها إلى فرز أخطاء تجريبية أصغر مما لو استخدمنا مجموعات غير متجانسة من الأشخاص. وعلى أي حال، كلما كانت الوحدات التجريبية أكثر تجانسا كلما صغر المدى الذي تستمر فيه صلاحية النتائج التجريبية. وعلى سبيل المثال، قد لاتكون الاستنتاجات الخاصة بأشخاص من مجموعة عمرية معينة صالحة لأشخاص من مجموعات عمرية أخرى. وهكذا كي نجعل النتائج صالحة على نطاق أوسع، ينبغي التغيير في مميزات الوحدات

التجريبية والثمن الذي ندفعه مقابل هذا هو دقة أقل في النتائج التجريبية. ويمكن استخدام تجميع الوحدات التجريبية في قطاعات وفقا لمميزاتها للحصول على الكعكة والتهامها، أيضا ، ونعني الحصول على تشتت كاف بين الوحدات التجريبية وصولا إلى مدى واسع للصلاحية، وفي الوقت نفسه إنجاز دقة عالية بسبب الأخطاء التجريبية الصغيرة.

ويمكن أن يكون التجميع في قطاعات وفقا لمميزات الوحدات التجريبية مفيدا ، على وجه الخصوص، في الأعمال والاقتصاد والعلوم الأحيائية. إذ كثيرا ماتكون الوحدات التجريبية المستخدمة في هذه الميادين غير متجانسة إلى حد كبير- على سبيل المثال، أشخاص، عائلات، بلدان، مساحات حَضَرية. وقد يكون تجميع الأشخاص في قطاعات، وفقا للعمر أو الدخل أو تجميع البلدان في قطاعات وفقا لعدد السكان فعالا جدا في تخفيض تشتت الخطأ التجريبي.

(٢٤-٣) عناصر تصاميم القطاع العشوائي

وصف التصاميم

تصميم قطاع عشوائي هو تصميم تعشية مقيّدة تُصنف فيه الوحدات التجريبية أولا إلى فئات متجانسة تدعى قطاعات ثم تُخصص المعالجات عندئذ عشوائيا ضمن القطاعات. ونوضح تصاميم القطاع العشوائي باستعراض ثلاثة أمثلة.

١- في تجربة تناول تأثيرات أربعة مستويات من الإعلان في الصحف على حجم المبيعات، تشكل المدينة وحدة تجريبية، وتتوفر للدراسة ست عشرة مدينة. وهناك ارتباط عال عادة بين حجم المدينة والمتغير التابع، حجم المبيعات. ومن المستحسن تجميع المدن الست عشرة في أربع فئات تضم كل منها أربع مدن، وذلك وفقا لعدد السكان. وهكذا ستشكل المدن الأربع الأكبر القطاع I، وهكذا، ثم تُخصص المعالجات الأربع عشوائيا إلى المدن الأربع ضمن كل قطاع، ويكون التخصيص العشوائي ضمن قطاع مستقلا عن التخصيص العشوائي ضمن قطاع آخر.

٢- في تجربة حول تأثيرات ثلاث خطط مختلفة للمكافآت التشجيعية على إنتاجية مُستخدم في شركات تجميع أجهزة إلكترونية، يشكل المستخدم وحدة تجريبية ويتوفر ثلاثون مستخدما للدراسة. وبما أن الإنتاجية ترتبط، في هذه الحالة، ارتباطا عاليا بالمهارة اليدوية، فمن المستحسن تجميع المستخدمين الثلاثين في عشر فئات من ثلاثة مستخدمين وذلك وفقا للمهارة اليدوية. وهكذا تمّ تجميع المستخدمين الثلاثة ذوي المهارة اليدوية الأعلى في قطاع، وهلمجرا بالنسبة للمستخدمين الآخرين. وتُخصص خطط المكافآت التشجيعية الثلاث عندئذ عشوائيا إلى المستخدمين الثلاثة ضمن كل قطاع.

٣- يدرس كيميائي معدّل التفاعل لخمسة كواشف كيميائية. ويمكن تحليل خمسة كواشف بصورة فعالة في اليوم الواحد. وبما أن الفروق من يوم إلى يوم يمكن أن تؤثر في معدل التفاعل، فقد استُخدم كل يوم كقطّاع واختُبرت الكواشف الخمسة جميعها كل يوم وفق ترتيبات عشوائية ومستقلة.

وكما توضح هذه الأمثلة، فإن الهدف الرئيس لتجميع الوحدات التجريبية في قطاعات هو جعلها ضمن القطاع الواحد متجانسة قدر الإمكان بالنسبة للمتغير التابع تحت الدراسة، وجعل القطاعات المختلفة غير متجانسة قدر الإمكان بالنسبة للمتغير التابع. والتصميم الذي يتضمن فيه كل قطاع جميع المعالجات يسمى تصميم القطاع العشوائي التام. وفي الغالب سنحذف كلمة التام لأنه يتضح من السياق أن المعالجات جميعها موجودة ضمن كل قطاع.

تعليقات

١- في تصميم قطاع تام يشكل كل قطاع تكرارا للتجربة. ولهذا السبب من المستحسن جدا معالجة الوحدات التجريبية ضمن قطاع مع بعضها حيثما كان ذلك سيساعد في تخفيض تشتت الخطأ التجريبي. وكمثال يمكن أن ينحو المجرب، مع الزمن، إلى القيام بتغييرات في تقاناته التجريبية (مثلا ، في تطبيق التجربة على العناصر) دون أن يكون واعيا لها. والمعالجة المتعاقبة للوحدات التجريبية قطاعا بعد آخر ستتجه إلى

حفظ مصادر تغير كهذه في منأى عن التغيّر ضمن القطاعات، وبالتالي جعل النتائج التجريبية أكثر دقة.

٢- في التجارب العاملية تكون بعض العوامل ذات الأهمية، في الغالب، خواصا مميزة للوحدات التجريبية مثل الجنس، العمر، مقدار الخبرة في عمل. ومع أنه لم يجر إدخال هذه العوامل لتخفيض تشتت الخطأ التجريبي بل أُدخلت لأنها مهمّة في ذاتها، إلا أننا سنعتبر مثل هذه التجارب تصاميم قطاع عشوائي، باعتبار أن تعشية المعالجات إلى الوحدات التجريبية قد قُيِّدت بعوامل التصنيف التي أخذناها في الاعتبار.

معايير للتجميع في قطاعات

كما ذكرنا سابقا ، فإن هدف التجميع في قطاعات هو تصنيف الوحدات التجريبية إلى فئات تكون العناصر ضمن كل فئة منها متجانسة بالنسبة إلى المتغير التابع، وبحيث تكون الفروق بين الفئات كبيرة بالقدر الممكن. وللمساعدة في التعرّف على بعض مميزات الوحدات التجريبية التي تشكل معيارا مجديا للتجميع نحتاج إلى تعريف دقيق للوحدة التجريبية. وينبغي أن نخصص لتعريف الوحدة التجريبية كافة عناصر الحالة التجريبية التي لايشملها تعريف المعالجة. فلنفرض أن المعالجة في تجربة تتألف من نوع من الخضار يحتوي على مادة مضافة معينة وتقدم في المختبر، فيمكن تعريف الوحدة التجريبية عندئذ كربّة بيت من عمر معين تخضع لمراقب معين في يوم محدد خلال جزء معين من اليوم، وتقدم الطعام من دفعة معينة من الخضار المطبوخة. ويمكن ،أيضا، إضافة عناصر أخرى من واقع التجربة إلى تعريف الوحدة التجريبية، الأمر الذي يفرض نفسه إذا كان يمكن لهذه العناصر أن تسبب تغيرا ملحوظا في المشاهدات.ويقترح تعريف كامل للوحدة التجريبية كالتعريف الذي أعطيناه لتوّنا نوعين من معايير التجميع في قطاعات:

١ـ مميزات خاصة بالوحدة – من أجل أشخاص يمكن أن تكون : الجنس، العمر، الدخل، الذكاء، التحصيل الدراسي، خبرة العمل، المواقف، إلخ. ومن أجل

المساحات الجغرافية يمكن أن تكون : عدد السكان، متوسط الدخل، إلخ.

٢- مميزات خاصة بواقع التجربة - المجرب، وقت القيام بالتجربة، الآلة، دفعة أو عجنة من المادة التجريبية، جهاز قياس، إلخ.

وكثيرا ما يتحكم استخدام الزمن كمتغير في قطاعات عدد من مصادر التغير، مثل خبرة المجرب، تغيرات في الأجهزة، تحوّلات في الشروط البيئية (مثلا الطقس)، والتجميع في قطاعات وفقا للمجرب يُلغي في الغالب قدرا كبيرا من التشتت العائد للمجرب، وبصورة مشابهة كثيرا مايكون التجميع في قطاعات وفقا للدُفعات (أو العجنات) من المواد التجريبية تجميعا فعالا جدا .

ولاحاجة للاقتصار على معيار واحد للتجميع في قطاعات، إذ يمكن استخدام عدة معايير إذا كان يمكن للخطأ التجريبي أن ينخفض عندئذ انخفاضا شديدا . وسندرس في الفصل ٢٥ استخدام أكثر من معيار واحد للتجميع في قطاعات، كما هي الحال عندما يتألف قطاع من عناصر تجريبية من فئة عمرية معينة ويتعامل معها مراقب معين. ويتطلب تصميم فعّال لتجارب قطاع عشوائي المقدرة على اختيار متغيرات التجميع في قطاعات التي ستخفض تشتت الخطأ التجريبي. وفي الغالب تساعد الخبرة السابقة في ميدان "مادة الموضوع" المجرب على اختيار متغيرات تجميع جيدة. وإذا كانت بعض التجارب قد نُفذت في الماضي واستُخدمت فيها متغيرات تجميع في قطاعات فيمكن تحليل تلك النتائج لتحديد فعالية متغيرات التجميع. وسنناقش طريقة تحليل مناسبة في الفقرة ٢٤-٩ للقيام بذلك. وفي غياب أية معلومات حول متغيرات تجميع فعّالة يمكن تنفيذ محاولات منتظمة تُخصص بموجبها المعالجة نفسها إلى جميع الوحدات التجريبية. ومن هذه المحاولات يمكن الحصول على معلومات عن فعّالية متغيرات مختلفة للتجميع في قطاعات.

ملاحظة

هناك متغير تجميع آخر يُستخدم غالبا في أبحاث علم الاجتماع ولم نذكره بعد، ونعني عنصر التجربة. ومع اتخاذ عنصر التجربة كقطاع تام تُعطى جميع المعالجات لكل عنصر تجربة. وتدعى مثل هذه التصاميم، في الغالب، تصاميم القياسات المتكررة. وبما أنها

تنطوي على بعض المسائل الخاصة بها فسنناقشها منفصلة في الفصل الثامن والعشرين.

المزايا والمساوىء

مزايا تصميم القطاع العشوائي التام هي:

١- مع تجميع فعّال في قطاعات يمكن أن يقدم نتائج أكثر دقة بكثير من تصميم العشوائية التامة من الحجم نفسه.

٢- يتّسع التصميم لأي عدد من المعالجات والتكرارات.

٣- لاتحتاج المعالجات المختلفة إلى حجوم عينات متساوية. وعلى سبيل المثال، إذا كان حجم العينة للمعالجة الحيادية ضعف حجم عينة كل من المعالجات الثلاث، يمكن استخدام قطاعات حجمها خمسة وعندئذ يمكن تخصيص ثلاث وحدات في قطاع عشوائيا إلى المعالجات الثلاث وتخصيص اثنتين إلى المعالجة الحيادية.

٤- التحليل الإحصائي بسيط نسبيا

٥- إذا اضطررنا إلى إلغاء معالجة أو قطاع بكامله من التحليل لسبب ما، كأن تكون نتائج غير سليمة، فالتحليل لايصبح معقدا .

٦- يمكن زيادة تشتت ما بين الوحدات التجريبية بصورة متعمّدة لتوسيع مدى صلاحية النتائج التجريبية دون التضحية بدقة النتائج.

والمساوىء تتضمن:

١- المشاهدات المفقودة ضمن قطاع تستدعي حسابات أكثر تعقيدا .

٢- درجات حرية الخطأ التجريبي ليست في حجم درجات حرية الخطأ التجريبي في التصميم تام العشوائية إذ نخسر درجة حرية لكل قطاع باستثناء القطاع الأول.

٣- يتطلب التصميم عددا من الافتراضات (مثلا ، لاتفاعلات بين المعالجات والقطاعات، تباين ثابت من قطاع إلى قطاع) أكبر مما هو في نموذج العشوائية التامة.

كيفية تطبيق العشوائية

إجراءات العشوائية لتصميم القطاع العشوائي ميسّرة تماما ، إذ نستخدم ضمن كل قطاع ترتيبا عشوائيا لتخصيص المعالجات إلى الوحدات التجريبية، تماما كما في التصميم تام العشوائية. ونختار ترتيبات عشوائية مستقلة للقطاعات المختلفة.

توضيح

في تجربة لاتخاذ قرار، تعرّض المديرون التنفيذيون إلى إحدى طرق ثلاث لتكميم أعظم رسم تأمين مستعدون لدفعه لاتقاء شيء غير مأمون. والطرق الثلاث هي طريقة المنفعة، طريقة القلق، وطريقة المقارنة. وبعد استخدام الطريقة المخصصة، طُلب من كل مدير عرض درجة الثقة في طريقة تكميم رسم التأمين وفق تدريج يبدأ من الصفر (لا ثقة) وحتى العشرين (أعلى ثقة).

وقد استخدم خمسة عشر عنصرا في الدراسة. وقد جُمّعوا في خمسة قطاعات في كل منها ثلاثة مديرين تنفيذيين، وذلك وفقا لأعمارهم. وقد تضمن القطاع 1 المديرون الأكبر سنا وهكذا.

وقد استُخدم مخطط التصميم المبين في الجدول (٢٤-١) بعد استخدام خمسة ترتيبات عشوائية مستقلة في كل منها ثلاثة. ويتضمن الجدول (٢٤-٢) نتائج التجربة، ويقدم الشكل (٢٤ -١) رسما بيانيا لدرجات تصنيف الثقة لكل طريقة وذلك لكل قطاع. ويبدو من الشكل (٢٤-١) أنه يوجد تشتت كبير بين القطاعات، ولكن طريقة المقارنة تتمتع بأعلى ثقة في جميع القطاعات، وأن طريقة المنفعة هي الأقل في درجة تصنيف الثقة. ونناقش فيما يلي نموذجا واسع الانتشار في التطبيق العملي لتصاميم القطاع العشوائي، كما نقدم تحليل التباين لهذا النموذج قبل القيام بالتحليل الرسمي للنتائج في مثالنا هذا.

جدول (٢٤-١) مخطط تصميم قطاع عشوائي - مثال رسم التأمين

	وحدة تجريبية 1	2	3
القطاع 1 المديرون الأكبر سنا	C	W	U
القطاع 2	C	U	W
القطاع 3	U	W	C
القطاع 4	W	U	C
5 (المديرون الأقل سنا)	W	C	U

C: طريقة مقارنة

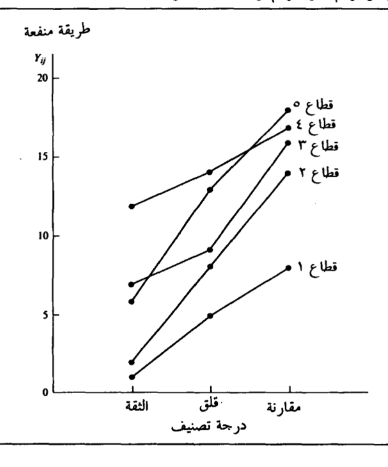
W: طريقة القلق

U: طريقة المنفعة

جدول (٢٤-٢) نتائج تجربة رسم التأمين (درجة تصنيف الثقة على تدريج من 0 إلى 20)

قطاع	طريقة (j)			
i	قلق	مقارنة	منفعة	المتوسط
قطاع 1	1	5	8	4.7
قطاع 2	2	8	14	8.0
قطاع 3	7	9	16	10.7
قطاع 4	6	13	18	12.3
قطاع 5	12	14	17	14.3
المتوسط	5.6	9.8	14.6	10.0

شكل (٢٤-١) تجربة رسم التأمين - رسم درجة تصنيف الثقة وفقا للقطاعات



(٢٤ -٤) نموذج تصاميم القطاع العشوائي التام

يشبه الجـدول (٢٤-٢) في مظهـره الجـدول (٢١-٢)آ، الـذي يعـرض بيانـات دراسة ثنائية العامل بمشاهدة واحدة في كل خلية. في الحقيقة، يمكن التفكير في تصميـم قطاع عشوائي تام كمقابل لدراسة ثنائية العـامل (حيـث القطاعـات والمعالجـات همـا العاملان)، بمشاهدة واحدة في كل خلية. وكما لاحظنا في فقرة (٢١-١)، إذا أمكـن افتراض عدم وجود تفاعل بين العاملين، فيمكن إجراء تحليل لتأثـيرات العوامـل عندمـا يكون هناك مشاهدة واحدة، فقط، في كل خلية وللعوامل تأثيرات مثبتة.

وهكذا يكـون النمـوذج لتصميـم قطـاع عشـوائي تـام، عندمـا تكـون كـل مـن تأثيرات القطاع والمعالجة مثبتة، ويكون هناك n قطاعـا (تكـرارا) و r معالجـة، كمـا يلي:

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \rho_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \qquad (24.2)$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت.

ρ_i ثوابت خاصة بتأثيرات القطاع (الصف) خاضعة للقيد $\sum \rho_i = 0$

τ_j ثوابت خاصة بتأثيرات المعالجة، وخاضعة للقيد $\sum \tau_j = 0$

ε_{ij} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$j = 1,\dots, r;\ i = 1, \dots, n$

والمشـاهدات Y_{ij} في نمـوذج القطـاع العشـوائي (24.2) مسـتقلة وتتـوزع توزيعـا طبيعيا ، بمتوسط:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu_{..} + \rho_i + \tau_j \qquad (24.2a)$$

وتباين ثابت:

$$\sigma^2\{Y_{ij}\} = \sigma^2 \qquad (24.2b)$$

ونموذج القطاع العشوائي (24.2) مطابق لنموذج اللاتفاعل ذي العاملين (24.1)، فيما عدا أننا نسـتخدم الآن ρ_i لتأثـير القطـاع، τ_j لتأثـير المعالجـة و n تشـير إلى العـدد الكلي للقطاعات. لاحظ هنا أن Y_{ij} تمثل المشاهدة الخاصة بالمعالجة j في القطاع I.

تعليقات

١– عندما يتم تجميع الوحدات التجريبية طبقا لتصنيفات محددة مثل مجموعات عمر معينة، فئات دخل، وترتيب فئات التشغيل، فتُعتبر تأثيرات القطاع ρ_i، عادة، مثبتة. ويمكن النظر إلى تأثيرات القطاع، أحيانا على أنها عشوائية. على سبيل المثال، عندما يتم استخدام الملاحظين أو الأشخاص كقطاعات، فيمكن اعتبار الملاحظين أو الأشخاص بالذات الذين استُخدموا في الدراسة. عينة من مجتمع من الملاحظين أو الأشخاص. وسنتطرق لحالة تأثيرات القطاع العشوائية في الفصل ٢٥.

٢– إذا كانت تأثيرات المعالجة عشوائية، فالتغيير الوحيدفي النموذج (24.2) هو أن τ_j تمثل الآن متغيرات طبيعية مستقلة بتوقع صفر وتباين σ_τ^2، وأن الـ τ_j مستقلة عن الـ ε_{ij}.

٣– يتضمن النموذج التجميعي (24.2) أن القيم المتوقعة للمشاهدات في قطاعات مختلفة للمعالجة نفسها قد تختلف (مثلا ، يتجه المديرون التنفيذيون الأكبر سنا للأخذ بدرجة تصنيف ثقة أقل لأي من طرق تحديد قيمة قسط التأمين عن المديرين التنفيذيين الأصغر سنا)، ولكن تأثيرات المعالجات (مثلا ، كم تكون درجة تصنيف الثقة لإحدى الطرق أعلى منها لطريقة أخرى) نفسها لجميع القطاعات. وسنعتبر إمكانية تفاعل بين القطاعات والمعالجات لاحقا في هذا الفصل.

(٢٤–٥) تحليل التباين والاختبارات

توفيق نموذج قطاع عشوائي

يتم الحصول على مقدّرات المربعات الدنيا لمعالم نموذج القطاع العشوائي (24.2) بالطريقة المعتادة. وباستخدام رموزنا المعتادة، نجد:

$\mu_{..} = \bar{Y}_{..}$	$\mu_{.}$	(24.3a)
$\hat{\rho}_i = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}$	ρ_i	(24.3b)
$\hat{\tau}_j = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}$	τ_j	(24.3c)

وبذلك تكون القيم التوفيقية:

$$\hat{Y}_{ij} = \overline{Y}_{..} + (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}) + (\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..}) = \overline{Y}_{i.} + \overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..} \qquad (24.4)$$

وتكون الرواسب:

$$e_{ij} = Y_{ij} - \hat{Y}_{ij} = Y_{.j} - \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{.j} + \overline{Y}_{..} \qquad (24.5)$$

تحليل التباين

تحليل التباين لنموذج قطاع عشوائي تام مطابق لذلك الخاص بنموذج اللاتفاعل لعاملين مع مشاهدة واحدة في كل خلية، كما وصفناه في فقرة ٢١-١:

$$SSBL = r\sum_i (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2 = \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{r} - \frac{Y_{..}^2}{rn} \qquad (24.6a)$$

$$SSTR = n\sum_i (\overline{Y}_{.j} - \overline{Y}_{..})^2 = \sum_j \frac{Y_{.j}^2}{n} - \frac{Y_{..}^2}{rn} \qquad (24.6b)$$

$$SSBL.TR = \sum_i\sum_j (Y_{ij} - \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{.j} + \overline{Y}_{..})^2 = \sum_i\sum_j Y_{ij}^2 - \sum_i \frac{Y_{i.}^2}{r} - \sum_j \frac{Y_{.j}^2}{n} + \frac{Y_{..}^2}{rn} = \sum_i\sum_j e_{ij}^2 \qquad (24.6c)$$

ويرمز *SSBL*، هنا، لمجموع مربعات القطاعات ويرمز *SSTR*، كالمعتاد، لمجموع مربعات المعالجات. ويرمز *TR.SSBL* لمجموع مربعات التفاعل بين القطاعات والمعالجات، لاحظ من (24.5) أن مجموع المربعات هذا هو نفسه مجموع مربعات الرواسب، وأخيرا rn هو العدد الكلي للوحدات التجريبية في الدراسة.

ويقدم الجدول (٢٤-٣) ملخصا لتحليل التباين يتضمن توقع متوسط المربعات لكل من تأثيرات المعالجات المثبّتة والعشوائية. لاحظ أنه مع عدم وجود تفاعل في النموذج، يتضمن توقع متوسط المربعات الحد σ^2 ، فقط، إلى جانب حد التأثيرات الرئيسة للمعالجات أو القطاعات، كما يقتضي الحال. لاحظ، أيضا، من أعمدة $E\{MS\}$ في الجدول (٢٤-٣) أن المقام الملائم في إحصاءة F^* لاختبار تأثيرات المعالجات هو متوسط مربعات التفاعل، معبرا عنه هنا بالرمز، *TR.MSBL* ، سواء كانت تأثيرات المعالجات مثبتة أو عشوائية. وهذا هو نفس ما في الفقرة ٢١-١ لنموذج اللاتفاعل بعاملين و $n = 1$. وبالتالي كي نختبر تأثيرات المعالجات:

تأثيرات عشوائية للمعالجات	تأثيرات مثبتة للمعالجات	
$H_0: \sigma_\tau^2 = 0$	جميع τ_j مساوية الصفر H_0:	(24.7a)
$H_a: \sigma_\tau^2 > 0$	ليس جميع τ_j مساوية الصفر H_a:	

نستخدم إحصاءة الاختبار نفسها سواء كانت التأثيرات مثبتة أو عشوائية.

$$F^* = \frac{MSTR}{MSBL.TR} \quad (24.7b)$$

وتكون قاعدة القرار لضبط الخطأ من النوع الأول عند α:

إذا كان $F^* \leq F[1-\alpha; r-1, (n-1)(r-1)]$ استنتج H_0

إذا كان $F^* > F[1-\alpha; r-1, (n-1)(r-1)]$ استنتج H_a

جدول (٢٤-٣) جدول تباين لتصميم قطاع عشوائي تام، تأثيرات القطاعات مثبتة

مصدر التغير	SS	df	MS	$E\{MSE\}$ المعالجات مثبتة	$E\{MSE\}$ المعالجات عشوائية
قطاعات	$SSBL$	$n-1$	$MSBL$	$\sigma^2 + \frac{r\sum \rho_i^2}{n-1}$	$\sigma^2 + \frac{r\sum \rho_i^2}{n-1}$
معالجات	$SSTR$	$r-1$	$MSTR$	$\sigma^2 + \frac{r\sum \tau_j^2}{r-1}$	$\sigma^2 + n\sigma_\tau^2$
الخطأ	$SSBL.TR$	$(n-1)(r-1)$	$MSBL.TR$	σ^2	σ^2
المجموع	$SSTO$	$nr-1$			

مثال

يحتوي جدول (٢٤-٤) تحليل التباين لمثال رسم التأمين في جدول (٢٤-٢). الحسابات مباشرة وقد تمت باستخدام أحد حزم الحاسوب. ولاختبار تأثيرات المعالجات:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$$

ليس كل τ_j مساو للصفر H_a:

نستخدم النتائج في جدول (٢٤-٤):

$$F^* = \frac{MSTR}{MSBL.TR} = \frac{101.4}{2.99} = 33.9$$

ولمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ ، نحتاج إلى $F(.99;2,8) = 8.65$. وبما أن $F^* = 33.9 > 8.65$، نستنتج H_a . أي أن متوسطات درجات تصنيف الثقة للطرق الثلاث مختلفة. والقيمة-P للاختبار هي 0.0001.

تعليقات

١ ـ قد نرغب أحيانا ، في إجراء اختبار لتأثيرات القطاع، أيضا :

H_0: ليس كل ρ_i مساويا للصفر
(24.8a)
H_a: جميع التأثيرات ρ_i مساوية للصفر

وعلى أي حال، فالاهتمام بالمعالجات يأتي عادة في المقام الأول، وتكون القطاعات بصورة رئيسة وسائل لتخفيف تشتت الخطأ التجريبي ويشير الجدول (٢٤-٣) إلى أن الاختبار الخاص بالتأثيرات المثبتة للقطاعات يستخدم الإحصاءة:

$$F^* = \frac{MSBL}{MSBL.TR} \qquad (24.8b)$$

وفي مثال قسط التأمين تكون إحصاءة الاختبار هذه:

$$F^* = \frac{42.8}{2.99} = 14.3$$

جدول (٢٤-٤) جدول تباين لتصميم قطاع عشوائي تام – مثال رسم التأمين في الجدول ٢٤-٢.

مصدر التغير	SS	df	MS
قطاعات	171.3	4	42.8
طرق تحديد رسم التأمين	202.8	2	101.4
الخطأ	23.9	8	2.99
المجموع	398.0	14	

ولمستوى معنوية $\alpha = .01$ نجد $F(.99;4,8) = 7.01$. وبما أن $F^* = 14.3 > 7.01$، نستنتج أن متوسط درجات تصنيف الثقة (المتوسط مأخوذ فوق المعالجات) يختلف باختلاف القطاع.

وبما أن القطاعات تقابل عامل تصنيف، فلابد من الحذر في تفسير مضامين تأثيرات القطاعات. وفي مثالنا، على سبيل المثال، قد لاتكون تأثيرات القطاعات راجعة للعمر، مع أن العمر كان متغير التصنيف. وقد تكون درجة التحصيل الدراسي المتغير المستقل المعوّل عليه، مع أن التأثير يبدو وكأنه يعود للعمر، إذا كان التحصيل الدراسي للمدراء الأكبر سنا أقل من التحصيل الدراسي للمدراء الشباب.

٢ ـ تتضمن قوة اختبار F لتأثيرات المعالجات لتصميم القطاع العشوائي التام المعلمة اللامركزية نفسها كما في التصميم تام التعشية. وتعطي الصيغة (17.2) القياس المناسب. وعلى الرغم من الصيغة نفسها للمعلمة اللامركزية، يؤدي كل من التصميمين، بصورة عامة، إلى مستويات قوة مختلفة، حتى ولو كان حجم العينة نفسه، وذلك لسببين: إذ سيختلف أولا تباين الخطأ التجريبي σ^2 للتصميمين، وستختلف ثانيا ، درجات الحرية المصاحبة لمقام الإحصاءة F^* للتصميمين.

٣ ـ إذا تمت دراسة معالجتين، فقط، في تصميم قطاع عشوائي تام فيمكن أن نرى بسهولة أن اختبار F لتأثيرات المعالجة المبني على إحصاءة الاختبار (24.7b) مكافئ لاختبار t ذي الجانبين للمشاهدات المزدوجة المبني على إحصاءة الاختبار (1.66).

(٢٤ـ٦) تقويم مصداقية نموذج قطاع عشوائي

بما أن أهمية تفحص مصداقية نموذج إحصائي لمجموعة معطاة من البيانات قد ذُكرت عدة مرات في السابق وأن تقانات التفحص هذه متشابهة، فسنكتفي هنا بتقديم نقاط قليلة، فقط، لها صلة خاصة بتصاميم قطاع عشوائي.

رسوم تشخيصية

بعض الحالات الرئيسة التي قد لا تلائم البيانات فيها نموذج القطاع العشوائي (24.2) هي:

١ ـ عدم تساوي تشتت الخطأ من قطاع إلى آخر.

٢ ـ عدم تساوي تشتت الخطأ من معالجة إلى أخرى.

٣ ـ تأثيرات الزمن.

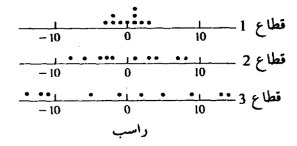
٤ ـ تفاعلات القطاع ـ المعالجة.

تمَّ في الفقرة ١٦ ـ ١، التطرق لاستخدام رسوم الرواسب فيما يتعلق بالحالتين ٢ و ٣، وذلك عند دراستنا للتصميم تام التعشية، وتنطبق المناقشة هناك، أيضا، على رواسب تصميم قطاع عشوائي المعطاة في (24.5).

$$e_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{.j} + \overline{Y}_{..}$$

ونضيف هنا ببساطة أنه إذا كان تشتت الخطأ للمعالجات في تصميم قطاع عشوائي تام غير متساو، فيمكن دائما تقدير الفروق بين أي معالجتين من خلال الفروق بين أزواج المشاهدات $Y_{ij'}$ - Y_{ij} التي لا تتأثر بالتباينات غير المتساوية للمعالجات.

شكل (٢٤-٢) رسوم نقطية للرواسب تقترح عدم تساوي تباينات الخطأ من قطاع إلى آخر.



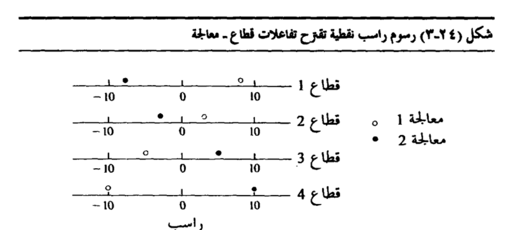
ويمكن دراسة عدم تساوي تشتتات الخطأ من قطاع إلى آخر برسوم رواسب نقطية مصطفة لكل قطاع، كما هو موضح في الشكل (٢٤-٢). تقترح الرسوم البيانية المنقطة في الشكل (٢٤-٢) زيادة اختلافات الخطأ مع زيادة رقم القطاع. وإذا عوجلت القطاعات، على سبيل المثال، وفقا لرقم ترتيب القطاع، فقد تحدث بعض التعديلات في إجراءات العمل، مما يقود إلى تشتت خطأ تجريبي يزداد مع الزمن ويمكن استخدام اختبارات تتعلق بتساوي التباينات كتلك المذكورة في الفقرة ١٦-٢، وذلك بغية تحديد

أكثر منهجية للنموذج، شريطة أن تكون حجوم العينات كبيرة إلى حد معقول يسمح بالتعامل مع الرواسب وكأنها مستقلة.

وإلى حد ما سيكون الكشف عن تفاعلات بين المعالجات والقطاعات أكثر صعوبة باستخدام رسوم الرواسب. ويحتوي الشكل (٢٤ــ٣) الرواسب لتجربة بمعالجتين في أربع قطاعات، ويقترح الانقلاب في نمط الرواسب وجود تأثيرات تفاعل، وعلى أي حال، هناك الكثير من الأنواع الأخرى الممكنة لأنماط تفاعل تبدو مختلفة اختلافا كبيرا جدا عن تلك المبينة في الشكل (٢٤-٣).

والرسم التشخيصي الآخر الذي يمكن أن يساعد في الكشف عن تأثيرات تفاعل هو رسم الرواسب في مقابل القيم التوفيقية وغالبا ما يقترح النمط المنحني للرواسب في رسوم كهذه وجود تأثيرات تفاعل بين القطاعات والمعالجات، ويزودنا هذا الرسم، أيضا، بمعلومات حول ثبات تباين حد الخطأ.

شكل (٢٤-٣) رسوم راسب نقطية تقترح تفاعلات قطاع ـ معالجة



ويبقى هناك رسم تشخيصي آخر للتفاعلات هو، في الغالب، أكثر فعالية من رسم الرواسب. وهو رسم الاستجابات Y_{ij} في مقابل المعالجات لكل قطاع. ويوضح الشكل (٢٤-١) هذا النوع من الرسوم. ويكون النقص الشديد في التوازي في رسم كهذا مؤشرا قويا إلى أن القطاعات والمعالجات تتفاعل في تأثيراتها على الاستجابة.

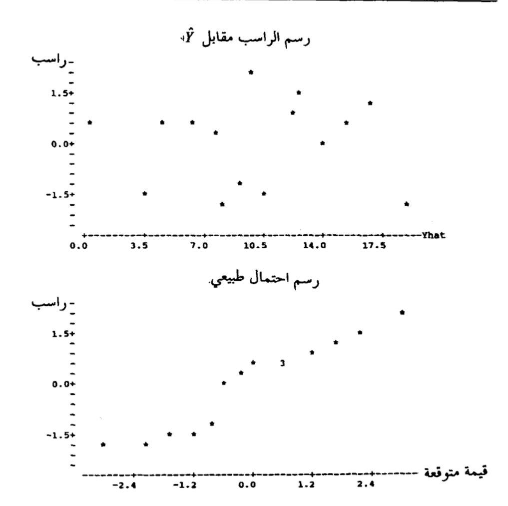
مثال. لا يعرض الشكل (٢٤-١) لمثال قسط التـأمين نقصـا شـديدا في التـوازي، مما يقترح عدم وجود تفاعل واضح بين القطاعات والمعالجات. والشكل (٢٤-٤)أ الـذي يقدم رسما حاسوبيا للرواسب في مقابل القيم التوفيقية يؤدي إلى النتيجة نفسـها. ولا توجد أيـة دلالـة قويـة علـى وجـود نمـط منحـن هنـا. وبالإضافـة إلى ذلـك، لا يشـير الشكل (٢٤-٤)أ إلى وجود عدم تساوٍ جوهري بين تباينات الخطـأ. ويحتـوي الشـكل (٢٤-٤)ب رسم احتمال طبيعي للرواسب. ولا يقترح هذا الرسـم أيـة حيـود شـديدة عن التوزيع الطبيعي للخطأ. ومعامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية يساوي 0.959، وهو يدعم هذه النتيجة. وقد أعدَّت رسوم راسب نقطية لكل معالجة ولكل قطاع، أيضا، (غير مبينة هنا). واقترحت تلك الرسوم أن تباينات الخطـأ لا تختلف جوهريا بين المعالجات وبين القطاعات. هـذه النتـائج، بالإضافـة إلى اختبـار رسمي كانت نتيجته عدم وجود تفاعل بين تأثيرات القطاع والمعالجة (سنناقشه لاحقا)، قاد المحلل ليستنتج أن نموذج القطاع العشوائي (24.2) هو نموذج مناسب للبيانات.

اختبار التجميعية لتوكي

يمكن استخدام اختبار توكي للتجميعية الذي ناقشـناه في الفقـرة ٢١-٢، للقيـام باختبار رسمي لتأثيرات التفـاعل الممكنـة بـين القطاعـات والمعالجـات، وسـنوضح هـذا الاختبار لمثال بيانات قسط التـأمين في الجـدول (٢٤-٢). ومجمـوع المربعـات الخـاص للتفاعل، ونرمز له هنا بـ $SSBL.TR^*$ ، معطى في (21.11):

$$SSBL.TR^* = \frac{\left[\sum_i \sum_j (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})(Y_{.j} - \overline{Y}_{..})Y_{ij}\right]^2}{\sum_i (\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..})^2 \sum_j (Y_{.j} - \overline{Y}_{..})^2}$$

شكل (٢٤-٤) رسوم راسب تشخيصية ـ مثال رسم التأمين (مينتاب، مرجع، 24.2).



ونجد باستخدام البيانات في الجدول (٢٤-٢) أن البسط:

$$[(4.7-10)(5.6-10)(1)+...+(14.3-10)(14.6-10)(17)]^2=615.04$$

ومن النتائج في جدول (٢٤-٤)، والصيغ (24.6a) و (24.6b) نحصل على الحدين في المقام:

$$\sum(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..})^2=\frac{SSBL}{r}=\frac{171.3}{3}=57.1$$
$$\sum(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}_{..})^2=\frac{SSTR}{n}=\frac{202.3}{5}=40.56$$

وبالتالي:

$$SSBL.TR^*=\frac{615.04}{57.1(40.56)}=.27$$

وباستخدام النتائج في الجدول (٢٤-٤)، يمكن أن نحصل الآن على مجموع مربعات الراسب (21.12a) لنموذج التفاعل الخاص (21.9):

$$\begin{aligned}SSRem^* &= SSTO - SSBL - SSTR - SSBL.TR^*\\ &= 398.0 - 171.3 - 202.8 - .27\\ &= 23.63\end{aligned}$$

وبالتالي تكون إحصاءة الاختبار (21.13):

$$\begin{aligned}F^* &= \frac{SSBL.TR^*}{1}\div\frac{SSRem^*}{rn-r-n}\\ &= \frac{.27}{1}\div\frac{23.63}{7}=.08\end{aligned}$$

ولمستوى معنوية $\alpha=.05$، نحتاج إلى $F(.95;1,7)$، وبما أن $F^*=.08<5.95$ فنستنتج عدم وجود تأثيرات تفاعل بين المعالجة والقطاع. والقيمة -P لهذا الاختبار 0.79.

ملاحظة

إذا كانت تأثيرات التفاعل موجودة، فينبغي محاولة تحويل البيانات لإزالة تأثيرات التفاعل المهمة على الأقل. والمناقشة في الفقرة ٢١-٢ مناسبة لهذه النقطة.

(٢٤ - ٧) تحليل تأثيرات المعالجات

ما أن يتم إثبات وجود تأثيرات معالجات مثبتة من خلال تحليل التباين، حتى نمضي في تحليل تلك التأثيرات كما هو موصوف في الفصل ١٥ للدراسات وحيدة

العامل، وغالبا ، يمكن الحصول على نظرة أولية مفيدة لتأثيرات المعالجات من رسم احتمال طبيعي لمتوسطات المعالجات المقدرة $\bar{Y}_j$. ويتضمن التحليل الرسمي لتأثيرات المعالجات، عادة، تقدير لواحدة أو أكثر من متضادات متوسطات المعالجات μ_j، حيث μ_j متوسط الاستجابة للمعالجة j آخذين المتوسط فوق جميع القطاعات، وتنطبق هنا، صيغ الفصل ١٥ لتقدير متضادات متوسطات المعالجات، ونرمز لمتوسطات المعالجات الآن بالرمز μ_j كما نرمز لمتوسطات المعالجات المقدَّرة بالرمز $\bar{Y}_j$. وحد متوسط المربعات المناسب الذي سنستخدمه في التباين المقدر للمتضادة هو *MSBL. TR* الذي نحصل عليه من (24.6c)، باعتباره يمثل مقام الإحصاءة F^* المستخدمة لاختبار تأثيرات المعالجات المثبتة، ومضاعفات الانحراف المعياري المقدَّر للمتضادة هي الآن كما يلي:

(24.9a) مقارنة بمفردها $t[1 - \alpha / 2; (n - 1)(r - 1)]$

(24.9b) طريقة توكي (لمقارنات ثنائية) $T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1 - \alpha; r, (n - 1)(r - 1)]$

(24.9c) طريقة شيفّه $S^2 = (r - 1)F[1 - \alpha ; r - 1, (n - 1)(r - 1)]$

(24.9d) طريقة بونفيروني $B = t[1 - \alpha / 2g; (n - 1)(r - 1)]$

مثال

كان المحلل الذي قام بدراسة رسم التأمين مقتنعا ، بناء على تحليلات الرواسب والاختبارات، أن نموذج القطاع العشوائي (24.2) مناسب للتجربة. ولذلك فقد بدأ تحليل تأثيرات المعالجات بإعداد رسم احتمال طبيعي لمتوسطات المعالجات المقدَّرة $\bar{Y}_j$ وهذا الرسم موضح في الشكل (٢٤ـ٥)، والخط المرجعي المبين في الشكل (٢٤ـ٥) أعطي في (15.2) وهو هنا:

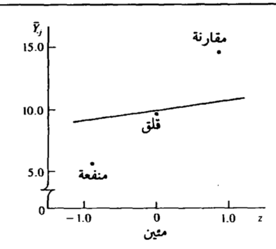
$$\text{القيمة المتوقعة} = \bar{Y} + z\left(\frac{i - .375}{r + .25}\right)\sqrt{\frac{MSBL.TR}{n}} = 10.0 + z\left(\frac{i - .375}{3.25}\right)\sqrt{\frac{2.99}{5}}$$

حيث $\bar{Y} = 10.0$ جدول (٢٤ـ٢)، $MSBL.TR = 2.99$ جدول (٢٤ـ٤) و $n = 5$ بسبب وقوع كل معالجة مرة واحدة في كل من خمسة قطاعات.

ويبين الرسم في الشكل (٢٤ـ٥) بوضوح أن تأثيرات المعالجات موجودة، ويقترح ،أيضا، وجود فروق معنوية بين كل طريقتين من طرق تكميم الحد الأقصى

لقسط التأمين، وذلك من خلال واقعة اختلاف الميول التي تصل بين كل زوج من المعالجات اختلافا مهما عن تلك الخاصة بالخط المرجعي.

شكل (٢٤ ـ ٥) رسم احتمال طبيعي لمتوسطات المعالجات المقدّرة ـ مثال رسم التأمين



ولتحليل تأثيرات المعالجات رسميا ، يرغب الباحث في الحصول على جميع المقارنات الثنائية بمعامل ثقة عائلي 95%، مستخدما طريقة توكي. وباستخدام (15.25) بعد استبدال $MSBL.TR$ بـ MSE، والنتائج في الجدول (٢٤-٤)، نحصل على:

$$S^2\{\hat{D}\} = MSBL.TR\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{2\,MSBL.TR}{n} = \frac{2(2.99)}{5} = 1.20$$

تذكّر أن كل متوسط معالجة مقدَّر $\bar{Y}_j$ يتألف من n مشاهدة (واحدة من كل من n قطاعا). وباستخدام (24.9b)، نجد، بمعامل ثقة عائلي 95%.

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}q(.95;3,8) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4.04) = 2.86$$

وبالتالي:

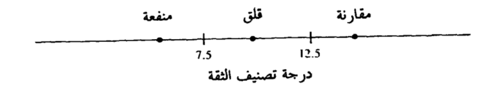
$$Ts\{\hat{D}\} = 2.86\sqrt{1.20} = 3.1$$

وهكذا نحصل من أجل المقارنات الثنائية (انظر جدول ٢٤-٢ من أجل الـ $\bar{Y}_j$).

$$1.7 = (14.6 - 9.8) - 3.1 \le \mu_3 - \mu_2 \le (14.6 - 9.8) + 3.1 = 7.9$$
$$5.9 = (14.6 - 5.6) - 3.1 \le \mu_3 - \mu_1 \le (14.6 - 5.6) + 3.1 = 12.1$$
$$1.1 = (9.8 - 5.6) - 3.1 \le \mu_2 - \mu_1 \le (9.8 - 5.6) + 3.1 = 7.3$$

و μ_1 هنا هو متوسط درجات تصنيف الثقة لطريقة المنفعة، آخذين المتوسط فوق جميع القطاعات، و μ_3, μ_2 هما متوسطا درجات تصنيف الثقة لطريقتي القلق والمقارنة، على الترتيب.

ونستنتج، تماما كما اقترح الشكل (٢٤-٥)، أن لطريقة المقارنة متوسط درجات تصنيف ثقة أعلى من طريقة القلق، وهذه بدورها لها متوسط درجات تصنيف ثقة أعلى من طريقة المنفعة. ومعامل الثقة العائلي لهذه المجموعة بكاملها من المقارنات هو 95%. ويلخص رسم الخط لمتوسطات المعالجات المقدَّرة النتائج:



(٢٤-٨) معالجات عاملية

عندما تكون المعالجات في تصميم قطاع عشوائي تراكيب في مستويات عوامل مختلفة، يمكن ببساطة كتابة نموذج التحاين الذي يبين تأثيرات العوامل بدلا من تأثيرات المعالجات. ولدينا، في حالة دراسة ثنائية العامل:

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} \qquad (24.10)$$

حيث للحدود في النموذج المعنى المعتاد، و (j, k) تحدد المعالجة.

وفي تحليل التباين، نبدأ، كما هو الحال دائما ، بتفكيك مجموع مربعات المعالجات إلى مجاميع مربعات للتأثيرات الرئيسة للعوامل والتفاعلات. وهذا موضح في الجدول (٢٤-٥) في حالة دراسة ثنائية العامل، وللعاملين a و b من المستويات على الترتيب. وهكذا يكون العدد الكلي للمعالجات هنا هو $r = ab$، ويتم التفكيك بالطريقة المعتادة، كما شرحنا في الفقرة (١٨-٤)، مستخدمين العلاقة (18.39):

$$SSTR = SSA + SSB + SSAB$$

وتكون الصيغ (18.39a, b, c) والصور البديلة لها (18.40 c, d, f) مناسبة لحساب مركبات مجاميع المربعات، متذكرين أن الدليلين الملحقين (i, j) مستخدمان لتحديد

المعالجات بدلالة تراكيب مستويات العوامل. ونقوم باختبار تأثيرات العوامل كالمعتـاد، ولا نواجه أية مشاكل جديدة في تقدير التأثيرات المثبتة للعوامل.

جدول (٢٤-٥) جدول تباين لدراسة ثنائية العامل في تصميم قطاع عشوائي تام - نموذج قطاع عشـوائي (24.10).

مصدر التغير	SS	df	MS
قطاعات	SSBL	$n - 1$	MSBL
معالجات	SSTR	$r - 1$	MSTR
العامل A	SSA	$a - 1$	MSA
العامل B	SSB	$b - 1$	MSB
التفاعل AB	SSAB	$(a - 1)(b - 1)$	MSAB
الخطأ	SSBL.TR	$(n - 1)(r - 1)$	MSBL.TR
المجموع	SSTO	$nr - 1$	

ملاحظة : $r = ab$

ملاحظة

يفترض نموذج القطاع العشوائي (24.10) عـدم وجـود تفـاعلات بـين المعالجـات والقطاعات ويتضمن هذا، على وجه التحديد، أن كـل تفـاعلات القطـاع والعـامل A مسـاوية للصفـر (نرمـز لهـا بـ $BL.\ A$)، وأن كـل التفـاعلات $BL.B$ و $BL.AB$ بـالمثل مساوية للصفر. ويمكن القيام بتحليل أقـل تقييـدا بافـتراض أن التفـاعلات $BL.AB$ لقـط مساوية للصفر. ولرؤية هذا، اعتبر الشكل التخطيطي لدراسة ثنائية العامل ($a = 2, b = 2$) في $n = 3$ قطاعات، كما هو مبين في الجدول (٢٤-٦). ويرمـز Y_{ijk} هنـا للمشـاهدة في القطاع i لتركيبـة العـامل (j , k)، ولاحـظ أن هـذا الرسـم التخطيطـي يقـابل الرسـم التخطيطي لثلاثة عوامل في الجـدول (٢٢-٢)، ولكـن بمشـاهدة واحـدة، فقـط، لكـل خلية. ويحتوي الجدول (٢٢-٣) تحليل التباين العام لدراسة ثلاثيـة العـامل. ومـن ذلـك يمكن رؤية أنه إذا كانت كل التفـاعلات $BL.\ AB$ ($BL.\ AB$ تقـابل ABC في الجـدول

٢٢ـ٣) مساوية للصفر، يكون متوسط مربعات التفاعل $BL.AB$ مقدَّرا غير منحاز لتباين الخطأ التجريبي σ^2، ويُشكل بالتالي متوسط المربعات المناسب للمقام في الإحصاءة F^* لاختبار تأثيرات العوامل كافة، وهكذا، يمكن إجراء جميع الاختبارات والقيام بكل التقديرات المرغوبة في تجربة عاملية في تصميم قطاع تام بمجرد افتراض أن التفاعلات $BL.AB$ مساوية للصفر. والثمن الذي دفعناه لقاء افتراضات أقل تقييدا هو درجات حرية أقل للخطأ التجريبي).

جدول (٢٤ـ٦) مخطط لدراسة ثنائية العامل في تصميم قطاع عشوائي تام

A_2		A_1			
B_2	B_1	B_2	B_1		
Y_{122}	Y_{121}	Y_{112}	Y_{111}	1	قطاع
Y_{222}	Y_{221}	Y_{212}	Y_{211}	2	
Y_{322}	Y_{321}	Y_{312}	Y_{311}	3	

جدول (٢٤ـ٧) جدول تباين لدراسة ثنائية العامل في تصميم قطاع عشوائي تام

ـ نموذج القطاع العشوائي (24.11)

MS	df	SS	مصدر التغير
$MSBL$	$n - 1$	$SSBL$	قطاعات (BL)
MSA	$a - 1$	SSA	العامل A
MSB	$b - 1$	SSB	العامل B
$MSAB$	$(a - 1)(b - 1)$	$SSAB$	التفاعلات AB
$MSBL.A$	$(n - 1)(a - 1)$	$SSBL.A$	التفاعلات $BL.A$
$MSBL.B$	$(n - 1)(b - 1)$	$SSBL.B$	التفاعلات $BL.B$
$MSBL.AB$	$(n - 1)(a - 1)(b - 1)$	$SSBL.AB$	الخطأ
	$nab - 1$	$SSTO$	المجموع

ويكون نموذج التحاين لهذه الحالة الأقل تقييدا .

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + (\rho\alpha)_{ij} + (\rho\beta)_{ik} + \varepsilon_{ijk} \qquad (24.11)$$

والحدود النموذج المعنى المعتاد. وتحليل التباين لهذا النموذج معطى في الجدول (٢٤-٧)، ويمكن حساب مجاميع المربعات باستخدام الصيغ ($22.21a$ - g) أو الصيغ الحسابية البديلة لها. وعند استخدام هذه الصيغ، تذكّر أن n في هذه الصيغ (عدد المشاهدات لكل خلية) هو الآن 1. وأن عدد المستويات للقطاع (يقابل العامل C) هو n.

(٢٤-٩) تخطيط تجارب قطاع عشوائي

عدد القطاعات الضروري

إن تخطيط حجم العينة لتصميم قطاع عشوائي تام كثير الشبه بذلك الخاص بالتصميم تام التعشية. ويمكن تحديد العدد الذي نحتاجه من القطاعات n، إما للحصول على وقاية محددة ضد ارتكاب الخطأين من النوع I والنوع II، أو للحصول على دقة محددة لمتضادات رئيسة في متوسطات المعالجات. ومن الضروري في أي من الطريقتين، أن نخمّن سلفا مقدار تباين الخطأ التجريبي σ^2.

أسلوب القوة. يمكن استخدام الجدول نفسه كما في التصميم تام التعشية (جدول ١٠- أ) شريطة أن لا يكون عدد المعالجات أو القطاعات صغيرا جدا ، وعلى وجه التحديد، شريطة أن يكون $r(n - 1) \geq 20$. ويمكن اتباع التفصيلات المذكورة في الفقرة (١٧-١)مباشرة.

مثال. في تجربة درجات تصنيف الثقة لثلاث طرق لتحديد رسم التأمين.

افترض أن عدد القطاعات لم يتم تحديده بعد، وأن المجرب رغب في اتقاء الخطأ وفقا لما يلي:

١- ضبط الخطأ من النوع الأول عند $\alpha = .05$.

٢- إذا اختلف أي متوسطي معالجتين بمقدار 3 درجات تصنيف أو أكثر، بمعنى أنه إذا كان أقل مدى لمتوسطات المعالجات $\Delta = 3$، فإن مخاطرة استنتاج عدم وجود تأثيرات معالجات يجب ألا يتجاوز $\beta = .20$.

ويتوقع المجرب أن الإنحراف المعياري للخطأ التجريبي، في حالة تصنيـف المديريـن وفقا للعمر، سيكون تقريبا $\sigma = 2$.

وهكذا، يمكن تلخيص المواصفات كالآتي:

$\Delta = 3 \qquad \alpha = .05 \qquad \gamma = 3$

$\beta = .02$ أو القوة $= .80 \qquad \sigma = 2$

ونجد باستخدام (17.5):

$$\frac{\Delta}{\sigma} = \frac{3}{2} = 1.5$$

وبدخول الجدول (أ-١٠) عند $1-\beta = .80$, $r = 3$, $\Delta/\sigma = 1.5$ و $\alpha = .05$ ، نجد $n = 10$. ولهذا، يحتاج المجرب إلى 10 قطاعات تقريبا في كل منها ثلاثة مديرين للحصول على الوقاية المرغوبة ضد قرارات غير صحيحة.

أسلوب التقدير. إذا رغب المجرب في تحديد عدد القطاعات n بواسطة أسلوب التقدير فإنه يحتاج ببساطة إلى حساب الانحراف المعيـاري المتوقـع لمتضـادات رئيسـة وتعديـل حجم التكرار مرة بعد أخرى حتى الوصول إلى الدقة المرغوبة. وسيستخدم المجرب، في الغالب، أسلوب مقارنة متعددة للإحاطة بالتقديرات المختلفة وفق معامل ثقة عائلي.

مثال. في توضيح رسم التأمين، يُراد استخدام أسـلوب توكـي لجميـع المقارنـات الثنائية بمعامل ثقة عائلي 95 وباستخدام $n = 10$ كنقطة بداية مع افتراض $\sigma = 2$ تقريبـا سيكون التباين المتوقع لأي فرق ثنائي:

$$\sigma^2\{\hat{D}\} = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = (2)^2\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) = .8$$

أو $\sigma\{\hat{D}\} = .89$. وفضلا عن ذلك:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[.95; r(n-1)(r-1)] = \frac{1}{\sqrt{2}} q(95; 3, 18) = \frac{1}{\sqrt{2}}(3.61) = 2.55$$

وهكذا يكون نصف اتساع فترة الثقة المتوقـع $T\sigma\{\hat{D}\} = 2.55(.89) = 2.3$ وإذا لم تكن هذه الدقة كافية، فينبغي استخدام عدد أكـبر مـن القطاعـات في الخطـوة التاليـة، وينبغي استخدام عدد أقل إذا كانت الدقة أكبر مما هو ضروري.

كفاءة متغير التجميع في قطاعات

ما أن يتم إجراء تجربة قطاع عشوائي تام، حتى نرغب، في الغالب، بتقدير كفاءة متغير التجميع المُستخدم، وذلك للاسترشاد به في التجارب المستقبلية.

لنرمز بـ σ_b^2 لتباين الخطأ التجريبي لتصميم القطاع العشوائي. وحتى هذه النقطة، استخدمنا σ^2 لتباين الخطأ هذا، وبما أننا سنقارن الآن تصميمين، فنحن في حاجة لأن نكون أكثر تحديدا . لنرمز بـ σ_r^2 لتباين الخطأ التجريبي لتصميم تام التعشية. فالكفاءة النسبية للتجميع في قطاعات مقارنة بتصميم تام التعشية تُعرَّف عندئذٍ كالتالي:

$$E = \frac{\sigma_r^2}{\sigma_b^2} \qquad (24.12)$$

ويشير المقياس E إلى الزيادة في عدد التكرارات التي نحتاجها في تصميم تام التعشية بالمقارنة مع تصميم قطاع عشوائي كي يكون تباين أي متضادة مقدّرة بين المعالجات هو نفسه في التصميمين.

ونعلم أن $MSBL.TR$ لتصميم قطاع عشوائي هو مقدِّر غير منحاز لـ σ_b^2 . والسؤال هو كيف نقدِّر σ_r^2 من بيانات تصميم قطاع عشوائي. وبما أن الوحدات التجريبية المستخدمة في كلي الحالتين هي الوحدات نفسها، وأننا نفترض عدم وجود تفاعل بين المعالجات والقطاعات، فيمكن تبيان أن مقدرا غير منحاز لـ σ_r^2 هو :

$$s_r^2 = \frac{(n-1)\,MSBL + n(r-1)\,MSBL.TR}{nr-1} \qquad (24.13)$$

وبالتالي نقدر E كما يلي:

$$\hat{E} = \frac{s_r^2}{MSBL.TR} = \frac{(n-1)\,MSBL + n(r-1)\,MSBL.TR}{(nr-1)\,MSBL.TR} \qquad (24.14)$$

وحيث أن عدد درجات حرية الخطأ التجريبي لتصميم قطاع عشوائي لا يكون كبيرا كما في حالة تصميم تام التعشية، فإن E يبالغ قليلا في تعبيره عن الكفاءة لأنه يأخذ في الاعتبار، تباينات الخطأ، فقط. ولأخذ هذه المبالغة في الاعتبار، فقد اقترحت عدة مقاييس معدّلة للكفاءة. وما لم يكن عدد درجات حرية الخطأ التجريبي لكل من

التصميمين صغيرا جدا فسيكون لتلك التعديلات تأثير طفيف. وأحد التعديلات شائعة الاستخدام، والقابلة للتطبيق عند تقويم أي تصميم بالنسبة لآخر هو :

$$\hat{E}' = \frac{(df_2+1)(df_1+3)}{(df_2+3)(df_1+1)}\hat{E} \qquad (24.15)$$

حيث df_1 يمثل درجات حرية الخطأ التجريبي في التصميم الأساس (تصميم تام التعشية، في حالتنا)، ويرمز df_2 لدرجات حرية الخطأ التجريبي في التصميم المراد تقويم كفاءته (تصميم قطاع عشوائي، في حالتنا).

مثال. سنقوِّم كفاءة التجميع في قطاعات وفقا لأعمار المديرين في مثال رسم التأمين. ويوضح النتائج المناسبة من الجدول (٢٤-٤) في مقياس الكفاءة (24.14) نحصل على:

$$\hat{E}' = \frac{4(42.8)+5(2)(2.99)}{14(2.99)} = 4.8$$

وهكذا، ففي تصميم تام التعشية، كنا سنحتاج تقريبا إلى تكرار كل معالجة خمسة أضعاف كي تنجز لأي متضادة مقدَّرة التباين نفسه الذي نحصل عليه عند التجميع في قطاعات وفقا للعمر.

ومن الواضح هنا أن التجميع في قطاعات وفقا للعمر كان ذا كفاءة عالية.

ولو استخدمنا مقياس الكفاءة المعدّل (24.15) لكنا سنجد:

$$\hat{E}' = \frac{(8+1)(12+3)}{(8+3)(2+1)}(4.8) = 4.5$$

وبالطبع لا تختلف هذه النتيجة كثيرا عن تلك التي حصلنا عليها باستخدام (24.14).

ملاحظة

يصبح مقياس الكفاءة $\hat{E}$ في (24.14) مساويا للواحد إذا كان $MSBL = MSBL.TR$، ويكون أكبر من 1 إذا كان $MSBL > MSBL.TR$. كما يكون أقل من 1 إذا كان $MSBL < MSBL.TR$، وبما أن إحصاءة الاختبار لتأثيرات القطاع في (24.8b) هي $F^* = MSBL / MSBL.TR$، فينتج عن ذلك أن يتحقق التجميع الجيد أو الناجح في قطاعات عندما تتجاوز F^* الواحد بكثير.

تحليل التغاير كبديل للتجميع في قطاعات

هناك أحيانا اختيار بين (١) تصميم تام التعشية مع تحليل تغاير مستخدم لتخفيض الأخطاء التجريبية و (٢) تصميم قطاع عشوائي، تتشكل القطاعات فيه وفقا للمتغير المصاحب، وبصفة عامة، فإن البديل الأخير هو المفضل.

وهناك عدة أسباب لهذا:

١- إذا كان الانحدار خطيا فلتصاميم القطاع العشوائي وتحليل التغاير الكفاءة نفسها تقريبا . وإذا كان الانحدار غير خطي ولكن تم استخدام تحليل تغاير بعلاقة خطية، فسينحو تحليل التغاير مع تصميم تام التعشية إلى أن يكون أقل فعالية (أو كفاءة) من تصميم قطاع عشوائي.

٢- الحسابات في تصاميم قطاع عشوائي أبسط من تلك الخاصة بتحليل التغاير.

٣- تخلو تصاميم القطاع العشوائي، أساسا ، من أية افتراضات حول طبيعة العلاقة بين متغير التجميع في قطاعات والمتغير التابع، بينما يفترض تحليل التغاير صيغة محددة لهذه العلاقة.

وأحد عيوب تصاميم القطاع العشوائي هو، إلى حد ما، توفر عدد من درجات الحرية للخطأ التجريبي أقل مما في حالة تحليل التغاير مع تصميم تام التعشية. وعلى أي حال ففي جميع التجارب، باستثناء التجارب ذات الحجم الصغير، يكون تأثير هذا الفرق في درجات الحرية على دقة التقديرات تأثيرا طفيفا .

(٢٤-١٠) أسلوب الانحدار لتصاميم قطاع عشوائي

لنأخذ نموذج التحاين (24.2) لتصميم قطاع عشوائي بتأثيرات مثبتة لكل من القطاع والمعالجة، وهو النموذج:

$$Y_{ij} = \mu_{.} + \rho_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,\dots, n;\ j = 1,\dots,r \tag{24.16}$$

فيمكن التعبير عن هذا النموذج مباشرة في صيغة نموذج انحدار مع متغيرات مؤشرة تتخذ القيم 1 ,-1 ,0. ويمكن كتابة نموذج الانحدار لمثال رسم التأمين في الجدول (٢٤-٢) مع $r = 3$ معالجات و $n = 5$ قطاعات، كما يلي:

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \underbrace{\rho_1 X_{ij1} + \rho_2 X_{ij2} + \rho_3 X_{ij3} + \rho_4 X_{ij4}}_{\text{تأثير قطاع}} + \underbrace{\tau_1 X_{ij5} + \tau_2 X_{ij6}}_{\text{تأثير معالجة}} + \varepsilon_{ij}$$

حيث:

$$X_{ij1} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 5} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ونعرف بصورة مماثلة المتغيرات $X_{ij4}, X_{ij3}, X_{ij2}$

$$X_{ij5} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$X_{ij6} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 2} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ومتجه المشاهدات **Y** والمصفوفة **X** لمثال رسم التأمين مبينان في الجدول (٢٤ـ٨).

لاحظ، على سبيل المثال، أن المتغيرات المؤشرة تتخذ القيم التالية من أجل المشاهدة Y_{13}.

$$X_1 = 1 \quad X_2 = 0 \quad X_3 = 0 \quad X_4 = 0 \quad X_5 = -1 \quad X_6 = -1$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} Y_{13} &= \mu_{..} + \rho_1 - \tau_1 - \tau_2 + \varepsilon_{13} \\ &= \mu_{..} + \rho_1 + \tau_3 + \varepsilon_{13} \end{aligned}$$

لأن: $\tau_3 = \tau_1 - \tau_2$.

الاختبارات وتقديرات تأثيرات المعالجات باستخدام أسلوب الانحدار تتبع بسهولة وسوف نناقشها هنا.

جدول (٢٤-٨) مصفوفات البيانات لنموذج الانحدار (24.17) الموافق لبيانات رسم التأمين في الجدول (٢٤-٢).

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} Y_{11}=1\\ Y_{12}=5\\ Y_{13}=8\\ Y_{21}=2\\ Y_{22}=8\\ Y_{23}=14\\ Y_{31}=7\\ Y_{32}=9\\ Y_{33}=16\\ Y_{41}=6\\ Y_{42}=13\\ Y_{43}=18\\ Y_{51}=12\\ Y_{52}=14\\ Y_{53}=17 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{matrix} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(٢٤-١١) تحليل التغاير لتصاميم قطاع عشوائي

يمكن استخدام تحليل التغاير لمزيد من التخفيض في تشتت الخطأ التجريبي في تصميم قطاع عشوائي. والتعميم هو تعميم مباشر لتحليل التغاير في حالة تصميم تام التعشية.

نموذج التغاير

أعطي النموذج المعتاد لتصميم القطاع العشوائي في (24.2):

$$Y_{ij} = \mu_{.} + \rho_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \qquad (24.18)$$

$$i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, r.$$

ونحصل، ببساطة، على نموذج التغاير لتصميم قطاع عشوائي بمتغير مصاحب واحد بإضافة حد (أو عدة حدود) من أجل العلاقة بين المتغير التابع Y والمتغير المصاحب X. وبافتراض أنه يمكن وصف هذه العلاقة بواسطة دالة خطية، نجد:

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \rho_i + \tau_j + \gamma(X_{ij} - \overline{X}_{..}) + \varepsilon_{ij} \qquad (24.19)$$
$$i = 1,\dots,n\,;\ j = 1,\dots,r$$

أسلوب الانحدار

لا ينطوي أسلوب الانحدار لنموذج التغاير (24.19) على أية مبادئ جديدة. وكما في الفصل ٢٣، سنرمز لِـ $X_{ij} - \overline{X}_{..}$ في نموذج التغاير (24.19) بالرمز x_{ij}:

$$x_{ij} = X_{ij} - \overline{X}_{..} \qquad (24.20)$$

وفضلا عن ذلك، سنستخدم مرة أخرى 1 ,1- ,0 كمتغيرات مؤشرة خاصة بتأثيرات القطاع والمعالجة.

افترض في دراسة تصميم قطاع عشوائي تام أنه تم استخدام $n = 4$ قطاعات، $r = 3$ معالجات. فيكون نموذج الانحدار المقابل لنموذج التغاير (24.9) عندئذٍ :

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \rho_1 I_{ij1} + \rho_2 I_{ij2} + \rho_3 I_{ij3} + \tau_1 I_{ij4} + \tau_2 I_{ij5} + \gamma x_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad (24.21)$$ نموذج تام

حيث:

$$I_{ij1} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 4} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$I_{ij2} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 2} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 4} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$I_{ij3} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 4} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$I_{ij4} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$I_{ij5} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 2} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

ولاختبار تأثيرات المعالجات:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$$
$$H_a: \text{ليست جميع الـ } \tau_j \text{ مساوية للصفر} \quad (24.22)$$

وسوف نحتاج إما إلى توفيق النموذج المخفض تحت H_0 :

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \rho_1 I_{ij1} + \rho_2 I_{ij2} + \rho_3 I_{ij3} + \gamma_{xij} + \varepsilon_{ij} \quad \text{النموذج المخفض} \quad (24.23)$$

أو إلى استخدام مجاميع المربعات الإضافية المناسبة. ويمكن عندئذٍ اختبار تأثيرات المعالجات بالطريقة المعتادة.

ومن السهل القيام بمقارنات بين تأثيرات معالجتين باستخدام أسلوب الانحدار. فلتقدير $\tau_1 - \tau_2$ على سبيل المثال، نستخدم التقدير غير المنحاز $\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2$ القائم على معاملات الانحدار المقدَّرة التي حصلنا عليها عند توفيق النموذج التام (24.21). ويكون التباين المقدَّر لهذا المقدِّر:

$$s^2\{\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2\} = s^2\{\hat{\tau}_1\} + s^2\{\hat{\tau}_2\} - 2s\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\} \quad (24.24)$$

ويمكن عندئذٍ استخدام مصفوفة التباين والتغاير المقدَّرة لمعاملات الانحدار المتوفرة على مطبوعة الحاسب لتزويدنا بالتباينات المقدَّرة والتغايرات المقدَّرة التي نحتاجها.

مراجع ورد ذكرها

[24.1] Cochran, W. G., and G. M. Cox. *Experimental Designs. 2nd ed. New York : John Wiley & Sons*, 1957.

[24.2] *MINITAB Reference Manual, Release 7. State College, Pa. : Minitab, Inc.*, 1989.

مسائل

(٢٤-١) اعط مثالا لدراسة تجريبية لا تشكل الإعادة فيها تكرارا .

(٢٤-٢) في تجربة لدراسة تأثيرت موضع العرض لُمنتج ما في سلسلة من المحلات أعاد مدير أحد المحلات ترتيب عرض منتجات أخرى بحيث يزيد من تدفق المارة عند العرض التجريبي. هل يؤدي هذا الفعل إلى انحياز في الاختبار أم إلى انحياز في القياس؟ ناقش.

(٢٤-٣) في دراسة عن تأثير حجم فريق على مقدار الاتصالات ضمن الفريق، هل يمكن استخدام أسلوب ثنائي التعمية؟ أسلوب وحيد التعمية؟ ناقش.

(٢٤-٤) علق أحد الدارسين في مجموعة نقاش "تستخدم التباديل العشوائية لتخصيص المعالجات إلى الوحدات التجريبية في تصميم قطاع عشوائي تماما كما في التصميم تام التعشية. وبالتالي ليس هناك فرق أساسي بين هذين التصميمين" علق.

(٢٤-٥) أ - ماذا يمكن أن تكون بعض المتغيرات المفيدة للتجميع في قطاعات وذلك في تجربة حول تأثيرات مستويات أسعار مختلفة على مبيعات مُنتج ما، مستخدما المحلات كوحدات تجريبية؟

ب - ماذا يمكن أن تكون بعض المتغيرات المفيدة للتجميع في قطاعات وذلك في تجربة حول تأثيرات البرامج الملاحية الجوية المختلفة على معنويات الأطقم الملاحية، مستخدما الأطقم الملاحية كوحدات تجريبية؟

جـ - ماذا يمكن أن تكون بعض المتغيرات المفيدة للتجميع في قطاعات في تجربة حول تأثيرات عقاقير مختلفة على سرعة الاستجابة لمنشط، مستخدما الحيوانات المعملية كوحدات تجريبية؟

(٢٤-٦) تمت دراسة خمس معالجات في تجربة تصميم قطاع عشوائي تام مستخدما أربعة قطاعات. حدد تخصيصات المعالجات عشوائيا للوحدات التجريبية.

(٢٤-٧) تمت دراسة معالجتين ومعالجة حيادية في تجربة تصميم قطاع عشوائي تام وقد استُخدمت خمسة قطاعات يحتوي كل منها على أربع وحدات تجريبية. وفي كل قطاع، يتم تخصيص كل معالجة لوحدة تجريبية واحدة، ويتم تخصيص المعالجة الحيادية لوحدتين تجريبيتين ــ حدد تخصيصات المعالجات عشوائيا للوحدات التجريبية.

(٢٤-٨) **تدريب مراجع حسابات.** قامت إحدى شركات المحاسبة، وقبل إدخالها لبرنامج تدريب واسع في الشركة يتعلق بالمعاينة الإحصائية في مجال مراجعة الحسابات باختبار ثلاث طرق تدريب : (١) الدراسة في المنزل مع مواد تدريبية مبرمجة، (٢) دورات تدريبية في مكاتب محلية وبمدربين محليين. و(٣) دور ةتدريبية في شيكاغو يشرف عليها مدربون على المستوى القومي. وقد صُنف ثلاثون مراجعا في 10 قطاعات من ثلاثة مراجعين، وذلك وفقا للزمن المنصرم منذ التخرج من الكلية، وتم تخصيص المراجعين في كل قطاع لطرق التدريب الثلاث عشوائيا . وفي نهاية التدريب طُلب من كل مراجع تحليل حالة معقدة تنطوي على تطبيقات إحصائية، وقد تم الحصول على مقياس مهارة، بناء على هذا التحليل، لكل مراجع. كانت النتائج (يحتوي القطاع 1 المراجعين الأحدث تخرجا ويحتوي القطاع 10 المراجعين الأقدم تخرجا).

قطاع	طريقة تدريب		
i	1	2	3
1	73	81	92
2	76	78	89
3	75	76	87
4	74	77	90
5	76	71	88
6	73	75	86
7	68	72	88
8	64	74	82
9	65	73	81
10	62	69	78

أ ـ لماذا، في اعتقادك، استُخدم متغير "الزمن المنصرم منذ التخرج من الكلية" كمتغير تجميع في قطاعات؟

ب ـ أوجد الرواسب لنموذج القطاع العشوائي (24.2) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية، جهِّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب. ما هي استنتاجاتك؟

جـ ـ ارسم الاستجابة Y_{ij} وفقا للقطاعات وذلك في هيئة الشكل (٢٤ـ١). ماذا يقترح هذا الرسم حول صلاحية افتراض اللاتفاعل هنا؟

د ـ قم باختبار توكي الخاص بتجميعية تأثيرات القطاعات وتأثيرات المعالجات، استخدم α=.01، اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

(٢٤ـ٩) بالإشارة إلى مسألة (٢٤ـ٨) **تدريب مراجع حسابات**. افترض أن نموذج القطاع العشوائي (24.2) مناسب.

أ ـ اكتب جدول تحليل التباين.

ب ـ جهِّز رسم احتمال طبيعي لمتوسطات المعالجات المقدَّرة. هل تبدو متوسطات المعالجات مختلفة جوهريا هنا؟

جـ ـ اختبر ما إذا كان متوسط المهارة نفسه لطرق التدريب الثلاث أم لا. استخدم مستوى معنوية = α.05. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

د ـ قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات طرق التدريب، استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 90% اعرض استنتاجاتك.

هـ ـ اختبر ما إذا كانت تأثيرات القطاع موجودة أم لا، استخدم α =.05 واكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟.

(٢٤ـ١٠) **الدهن في حميات غذائية**، درس أحد الباحثين تأثيرات ثلاث حميات غذائية تجريبية مختلفة في محتوياتها الدهنية على مستوى الشحوم الكلي في البلازما. ومستوى الشحوم الكلي مستخدم على نطاق واسع للتنبؤ بأمراض القلب التاجية. وقد صُنف خمسة عشر شخصا من الذكور، الذين يقع وزنهم في

حدود 20% من وزن الجسم المثالي، في خمسة قطاعات وفقا للعمر، وضمن كل قطاع، خُصصت الحميات التجريبية الثلاث عشوائيا للأشخاص الثلاثة، وفيمايلي بيانات التخفيض في مستوى الشحوم (بالغرام لكل لتر) بعد أن وضع الأشخاص تحت الحمية لفترة مثبتة من الزمن.

قطاع i		مستوى الشحوم للحمية $j = 1$ منخفض جدا	$j = 2$ منخفض بصورة مقبولة	$j = 3$ منخفض بصورة معتدلة
1	العمر 24 - 15	.73	.67	.15
2	العمر 34 -25	.86	.75	.21
3	العمر 44 -35	.94	.81	.26
4	العمر 54 -45	1.40	1.32	.75
5	العمر 65 -55	1.62	1.41	.78

أ ـ لماذا، في اعتقادك، استُخدم عمر الشخص كمتغير تجميع في قطاعات؟

ب ـ أوجد الرواسب لنموذج القطاع العشوائي (24.2) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية ـ قم، أيضا، برسم احتمال طبيعي للرواسب. ما هي استنتاجاتك؟

جـ ـ ارسم الاستجابة Y_{ij} وفقا للقطاعات وذلك في هيئة الشكل (٢٤ـ١). ماذا يقترح هذا الرسم حول صلاحية افتراض اللاتفاعل هنا؟

د ـ قم باختبار توكي الخاص بتجميعية تأثيرات القطاع وتأثيرات المعالجة، استخدم $\alpha = .01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

(٢٤ـ١١) بالإشارة إلى المسألة (٢٤ـ١٠) **الدهن في الحميات**. افترض أن نموذج القطاع العشوائي (24.2) مناسب.

أ ـ اكتب جدول تحليل التباين.

ب ـ جهِّز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدَّرة للمعالجات. هل تبدو متوسطات المعالجات مختلفة جوهريا هنا؟

جـ ـ اختبر ما إذا كان متوسط التخفيضات في مستوى الشحوم مختلف للحميات الثلاث أم لا، استخدم $\alpha = .05$. اكتب البدائل قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟.

د ـ قدِّر $D_1 = \mu_1 - \mu_2$ و $D_2 = \mu_2 - \mu_3$ مستخدما طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 95% اعرض استنتاجاتك.

هـ ـ اختبر ماإذا كانت تأثيرات القطاع موجودة أم لا، استخدم $\alpha = .05$، اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

و ـ لم تُستخدم حمية قياسية في تلك التجربة كمعالجة حيادية. ما هي في اعتقادك المبررات التي قد يعطيها الباحث حول عدم استخدامه معالجة حيادية هنا لأغراض المقارنة؟.

(١٢-٢٤) **ألم الأسنان.** قام اختصاصي تخدير بدراسة مقارنة لتأثيرات الوخز بالإبر والكودايين على الألم الذي يعقب عمليات الأسنان عند الأشخاص الذكور، وكانت المعالجات الأربع : (١)معالجة بلاسيبو : كبسولة سكر ووخزتين غير نشطتين بالإبر A_1B_1 (٢) معالجة الكودايين، فقط- كبسولة كودايين ووخزتين غير نشطتين بالإبر A_2B_1 (٣) معالجة الوخز بالإبر، فقط ـ كبسولة سكر ووخزتين نشطتين بالإبر A_1B_2 (٤)معالجة كودايين ووخز بالإبر ـ كبسولة كودايين ووخزتين نشطتين بالإبر A_2B_2. وقد صُنف اثنان وثلاثون شخصا في ثمانية قطاعات من أربعة وفقا لتقويم مبدئي عن مستوى قدرتهم على تحمل الألم. وخُصص عندئذ الأشخاص في كل قطاع عشوائيا للمعالجات الأربع. وقد تم الحصول على درجات تخفيف الألم لجميع الأشخاص بعد ساعتين من معالجة سنّية. وجُمعت البيانات

على أساس ثنائي التعمية، وفيما يلي بيانات درجات تخفيف الألم (الدرجة العالية لتخفيف الألم تقابل المعالجة الأكثر فعالية).

قطاع		المعالجة (j, k)			
	i	A_1B_1	A_2B_1	A_1B_2	A_2B_2
الأدنى	1	0.0	.5	.6	1.2
	2	.3	.6	.7	1.3
	3	.4	.8	.8	1.6
	4	.4	.7	.9	1.5
	5	.6	1.0	1.5	1.9
	6	.9	1.4	1.6	2.3
	7	1.0	1.8	1.7	2.1
الأعلى	8	1.2	1.7	1.6	2.4

أ - لماذا، في اعتقادك، استُخدمت القدرة على تحمل الألم كمتغير تجميع في قطاعات؟

ب - أي الافتراضات التي يتضمنها نموذج القطاع العشوائي (24.10) أكثر أهمية بالنسبة لك هنا؟

جـ - أوجد الرواسب لنموذج القطاع العشوائي (24.10) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب، ماهي استنتاجاتك ؟

د - ارسم الاستجابات Y_{ijk} وفقا للقطاعات وذلك في هيئة الشكل (٢٤-١)، متجاهلا البنية العاملية للمعالجات، ماذا يقترح هذا الرسم حول صلاحية افتراض اللاتفاعل هنا؟

هـ - قم باختبار توكي الخاص بتجميعية تأثيرات القطاع والمعالجة، متجاهلا البنية العاملية للمعالجات، استخدم = α .01. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

(٢٤-١٣) بالإشـارة إلى مسـألة **ألم الأسـنان** (٢٤-١٢) افـترض أن نمـوذج القطـاع العشوائي (24.10) مناسب.

أ ـ اكتب جدول تحليل التباين،

ب ـ اختبر ماإذا كان العاملان يتفاعلان أم لا، استخدم $\alpha = .01$.

أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P- للاختبار؟

جـ ـ جهِّز رسم احتمـال طبيعي منفصـل لكـل مجموعـة مـن متوسـطات مستويات العوامل المقدَّرة. هل يبدو هنا أن تأثيرات رئيسـة جوهريـة موجودة؟

د ـ اختبر، بصورة منفصلة لكل عامل من العوامل، ماإذا كانت التأثيرات الرئيسة موجودة، استخدم $\alpha = .01$. لكـل اختبـار واكتـب البدائـل، قاعدة القرار والنتيجة لكل اختبار. ماهي القيمة P- لكل اختبار ؟

هـ ـ قدّر

$$D_1 = \mu_{.1.} - \mu_{.2.} = \alpha_1 - \alpha_2$$
$$D_2 = \mu_{..1} - \mu_{.1.} = \beta_1 - \beta_2$$

استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 95% اعرض استنتاجاتك.

و ـ اختبر ماإذا كانت تأثيرات القطاع موجودة أم لا، استخدم $\alpha = .01$.

اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة P- للاختبار؟

(٢٤-١٤) بالإشـارة إلى مسـألة **ألم الأسـنان** (٢٤-١٢). افـترض أن نمـوذج القطـاع العشوائي (24.11) بتأثيرات مثبتة هو النموذج الذي سيُستخدم.

أ ـ اكتب جدول تحليل التباين

ب ـ اختبر ماإذا كان العاملان يتفاعلان أم لا، استخدم $\alpha = .01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P- للاختبار؟

جـ ـ اختبر بصورة منفصلة ماإذا كانت القطاعات تتفاعل مـع كـل عـامل من العوامل. ولكـل اختبـار، استخدم $\alpha = .01$ ،واكتـب البدائـل، قاعدة القرار والنتيجة، ماهي القيمة P- لكل اختبار ؟ مـاذا تتضمـن

نتائجك حول الاختبـار بـين نموذجـي القطـاع العشـوائي (24.10) و (24.11)؟ ناقش.

د - اختبر بصورة منفصلة لكل عامل من العوامل، ماإذا كانت التأثيرات الرئيسة موجودة، استخدم$\alpha = .01$.اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة لكل اختبار. ماهي القيمة -P لكل اختبار ؟. هل أثّر اختبار النموذج على نتائجك هنا؟

(٢٤-١٥) بالإشارة إلى مسألتي **تدريب مراجع حسابات** (٢٤-٨) و(٢٤-٩). افترض أن $\sigma = 2.5$. ما هي قوة الاختبار لتأثيرات طرق التدريب في المسألة (٢٤-٩)جـ إذا كان $\mu_1 = 20, \mu_2 = 73, \mu_3 = 76$ ؟

(٢٤-١٦) بالإشارة إلى **مسألتي الدهن في الحميات الغذائية** (٢٤-١٠) و(٢٤-١١). افترض أن$\sigma = .04$.ما هي قوة الاختبار لتأثيرات الحميات في المسألة (٢٤-١١)جـ إذا $\mu_3 = 1.1, \mu_1 = 1.0, \mu_2 = .9$؟

(٢٤-١٧) بالإشارة إلى **مسألة تدريب مراجع حسابات** (٢٤-٨). ترغب شركة محاسبة أخرى القيام بالتجربة نفسها مع بعض مراجعيها، مستخدمين التصميم والنموذج نفسيهما. ماهو عدد القطاعات التي يمكن أن توصي الشركة باستخدامها، إذا رغبت القيام بجميع المقارنات الثنائية من المعالجات بدقة ±1.5 وبمعامل ثقة عائلي 99%؟ افترض أن $\sigma = 2.5$ هي قيمة للانحراف المعياري للخطأ في النموذج (24.2) معقولة لأغراض التخطيط.

(٢٤-١٨) بالإشارة إلى مسألة **الدهن في الحميات الغذائية** (٢٤-١٠). افترض أن عدد القطاعات المراد استخدامه في الدراسة، يتألف من أشخاص ذكور لهم العمر نفسه، لم يتم تحديده بعد. افترض أن $\sigma = .04$ هي قيمة للانحراف المعياري للخطأ في النموذج (24.2) معقولة لأغراض التخطيط.

أ - ما هو عدد القطاعات المطلوب إذا أُريد القيام بجميع المقارنات الثنائية بين الحميات، بدقة ±.03 وبمعامل ثقة عائلي 95%؟

ب ـ ما هو عدد القطاعات المطلوب إذا كان : (١) يُراد الكشف عن فروق في متوسطات التخفيض في مستويات الشحوم للحميات الثلاث باحتمال 0.95 أو أكثر، وذلك عندما يكون مدى متوسطات المعالجات 0.12 و(٢) يراد ضبط المخاطرة عند 0.01؟

(٢٤-١٩) بالإشارة إلى مسألتي **تدريب مراجع حسابات** (٢٤-٨) و(٢٤-٩)، بناء على مقياس الكفاءة المقدَّر (24.14)، كيف كانت كفاءة استخدام متغير التجميع في قطاعات بالمقارنة مع تصميم تام التعشية؟

(٢٤-٢٠) بالإشارة إلى مسألتي **الدهن في الحميات** (٢٤-١٠) و(٢٤-١١). بناء على مقياس الكفاءة المقدَّر (24.15)، كيف كانت كفاءة استخدام متغير التجميع في قطاعات بالمقارنة مع تصميم تام التعشية؟

(٢٤-٢١) بالإشارة إلى مسألتي **ألم الأسنان** (٢٤-١٢) و(٢٤-١٣). بناء على مقياس الكفاءة المقدَّر (24.14)، كيف كانت كفاءة استخدام متغير التجميع في قطاعات بالمقارنة مع تصميم تام التعشية؟

(٢٤-٢٢) بالإشارة إلى مسألة **تدريب مراجع حسابات** (٢٤-٨).

أ ـ اعرض نموذج الانحدار المكافىء لنموذج القطاع العشوائي (24.2)، استخدم 1 ,1- ,0 كمتغيرات مؤشرة.

ب ـ قم بتوفيق نموذج الانحدار للبيانات.

جـ ـ اكتب جدول تحليل التباين للانحدار بناء على مجاميع المربعات الإضافية المناسبة.

د ـ اختبر التأثيرات الرئيسة للمعالجات؛ استخدم $\alpha = .05$. اكتب البدائل قاعدة القرار، والنتيجة.

(٢٤-٢٣) بالإشارة إلى مسألة **الدهن في الحميات** (٢٤-١٠).

أ ـ اعرض نموذج الانحدار المكافىء لنموذج القطاع العشوائي (24.2)، استخدم 1 ,1- ,0 كمتغيرات مؤشرة.

ب - قم بتوفيق نموذج الانحدار للبيانات.

جـ - اكتب جدول تحليل التباين للانحدار بناء على مجاميع المربعات الإضافية المناسبة.

د - اختبر التأثيرات الرئيسة للمعالجات ؟ استخدم $\alpha = .05$ ،اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

(٢٤-٢٤) الإشارة إلى مسألة تدريب **مراجع حسابات** (٢٤-٨)، يرغب المحلل في دراسة ماإذا كان استخدام درجات المهارة الإحصائية قبل التدريب كمتغير مصاحب يمكن أن يساعد في تخفيض تشتت الخطأ التجريبي تخفيضا مهما. وفيما يلي درجات المهارة الاحصائية للمراجعين قبل التدريب:

قطاع	طريقة تدريب			قطاع	طريقة تدريب		
i	1	2	3	i	1	2	3
1	93	98	91	6	75	74	78
2	94	93	94	7	79	76	72
3	89	91	92	8	71	69	64
4	86	84	90	9	74	71	70
5	78	76	84	10	63	68	64

أ - هل تتوقع هنا أن عمر المراجع كان سيشكل متغيرا مصاحبا أفضل من درجات المهارة الإحصائية قبل التدريب؟ ناقش.

ب - اعرض نموذج الانحدار المكافىء لنموذج التغاير (24.19)، استخدم 0, -1, 1 كمتغيرات مؤشرة.

جـ - اعرض نموذج الانحدار التام.

د - اعرض نموذج الانحدار المخفض لاختبار تأثيرات المعالجات. وقم بتوفيق النموذج المخفض.

هـ - اختبر ماإذا كانت طرق التدريب تختلف في متوسطات فعالياتها أم لا. استخدم مستوى معنوية $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة، ماهي القيمة P- للاختبار؟

و - أوجد 95% فترة ثقة لـ $D = \tau_1 - \tau_2$. فسّر هذا التقدير بفترة.

ز - هل انخفض تباين الخطأ انخفاضا كبيرا بإضافة المتغير المصاحب؟ اشرح.

(٢٤-٢٥) بالإشارة إلى **مسألة الدهن في الحميات الغذائية** (٢٤-١٠). يرغب الباحث بفحص ماإذا كان وزن كل شخص، معبرا عنه كنسبة مئوية من وزنه المثالي، متغيرا مصاحبا مفيدا وفيما يلي بيانات أوزان الأجسام كنسب من أوزانهم المثالية لخمسة عشر شخصا من الذكور:

قطاع	محتوى الحمية من الدهن		
i	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
1	94	96	101
2	97	102	99
3	105	100	106
4	108	107	112
5	118	115	107

أ - اعرض نموذج الانحدار المكافئ لنموذج التغاير (24.19)؛ استخدم 0, -1, 1 كمتغيرات مؤشرة.

ب - قم بتوفيق نموذج الانحدار التام.

جـ - اعرض نموذج الانحدار المخفض لاختبار تأثيرات المعالجات، وقم بتوفيق النموذج المخفض.

د - اختبر ماإذا كانت متوسطات التخفيض في مستويات الشحوم مختلفة للحميات الثلاث أم لا، استخدم $\alpha = .05$، اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P- للاختبار؟.

هـ - أوجد فترة ثقة لـ $D_1 = \tau_1 - \tau_2$ و $D_2 = \tau_2 - \tau_3$، مستخدما طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 95%. فسر التقديرات بفترة التي حصلت عليها.

و - هل انخفض تباين الخطأ انخفاضا كبيرا بإضافة المتغير المصاحب ؟. اشرح.

تمارين

(٢٤-٢٦) اعتبر نموذج القطاع العشوائي (24.2)، ولكن بتأثيرات معالجة عشوائية. استنبط $\sigma^2\{Y_{ij}\}$ و $\sigma^2\{\bar{Y}_{.j}\}$.

(٢٤-٢٧) (نحتاج لحساب التفاضل) اعرض دالة الإمكانية لنموذج القطاع العشوائي بتأثيرات مثبتة (24.2) وذلك عندما يكون $n = 3$ و $r = 2$. أوجد مقدّرات الإمكانية العظمى للمعالم. هل هي مطابقة لتقديرات المربعات الدنيا في (24.3)؟

(٢٤-٢٨) استنبط $E(MSTR)$ لنموذج قطاع عشوائي بتأثيرات مثبتة (24.3).

(٢٤-٢٩) بين أنه عند دراسة معالجتين في تصميم قطاع عشوائي تام، فإن إحصاءة الاختبار F^* في (24.7b) لتأثيرات المعالجات مكافئة لمربع إحصاءة الاختبار t- ذي الجانبين الخاص بالمشاهدات أزواجا والمبني على (1.66).

(٢٤-٣٠) بالإشارة إلى نموذج الانحدار (24.17)، المكافىء لنموذج التحاين (24.16) في حالة $n = 5$ و $r = 3$. افترض أن المتغيرات المؤشرة في النموذج (24.17) قد رُمّزت كما يلي:

$$X_{ij1} = \begin{cases} 1 & \text{الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

ويتم بالمثل تعريف $X_{ij2}, X_{ij3}, X_{ij4}$

$$X_{ij5} = \begin{cases} 1 & \text{الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$X_{ij6} = \begin{cases} 1 & \text{الوحدة التجريبية من القطاع 2} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

وأننا رمزنا لمعاملات الانحدار بالرموز β_0 ، β_1، β_2، β_3، β_4، β_5 و β_6 .

أ ـ اعرض المصفوفة **X** لنموذج الانحدار هذا.

ب ـ أوجد التقابلات بين معاملات الانحدار β_0، β_1، ... وβ_6 ، والمعالم في نموذج التحاين (24.16).

جـ ـ ناقش مزايا وعيوب استخدام المتغيرات المؤشرة 1 ,0. والمتغيرات المؤشرة 1 ,-1 ,0، هنا.

مشاريع

(٢٤-٣١) بالإشارة إلى التعليق ٣ في صفحة والنموذج (24.1). افترض أن الكميات المعتمدة على الوحدة التجريبية هي كما يلي لثمانية عناصر في تجربة تقوية نفسية.

j:	1	2	3	4	5	6	7	8
كمية الوحدة التجريبية	16	14	18	16	12	15	13	12

نريد مقارنة معالجة تجريبية بمعالجة قياسية، مع تخصيص أربعة أشخاص عشوائيا لكل معالجة.

أ ـ افترض عدم وجود تأثيرات معالجة تفاضلية وأن الكمية المعتمدة على المعالجة هي 4 لكل معالجة. ولّد جميع التعشيات الممكنة للوحدات التجريبية الثماني إلى المعالجتين واحصل على القيم الملحوظة لكل عينة معالجة.

ب ـ لكل واحدة من الـ 70 تعشية التي تم الحصول عليها في (أ)، احسب F^* لاختبار البدائل $H_0: \mu_1 = \mu_2$ مقابل $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$، حدد النسبة من قيم F^* التي تتجاوز $F(.90;1,6)$، والنسبة التي تتجاوز $F(.95;1,6)$، النسبة التي تتجاوز $F(.99;1,6)$.

جـ ـ كيف تقارن النسب التي حصلنا عليها في الجزء (ب) بالاحتمالات الخاصة بنموذج الخطأ الطبيعي؟ ناقش.

د ـ كرّر الأجزاء (أ) و(ب) للحالة عندما تكون كميتا العلاج للمعالجتين التجريبية 15 والقياسية 4 ،على الترتيب، هل يبدو أن للاختبار قوة معقولة في هذه الحالة؟

تصاميم القطاع العشوائي - II

نستمر، في هـذا الفصـل، مناقشـتنا لتصـاميم القطـاع العشـوائي بدراسـة الاسـتجابات الثنائية للمتغير التابع واختبار لا معلمي لتأثيرات المعالجات أولا. ثـم نتـابع المشـاهدات المفقودة وتأثيرات القطاع العشوائي، وننهي الفصل بمناقشة تصاميم القطـاع العشـوائي المعممة واستخدام أكثر من متغير للتجميع في قطاعات.

(٢٥-١) الاستجابات الثنائية للمتغير التابع

تكون الاستجابات ثنائية في بعض تجارب القطاع العشوائي. علـى سـبيل المثـال، قد تكون الاستجابات في تجربة تتعلق بتصرف المرء عند التسوق، يشتري أو لايشـتري وفي تجربة على الحافز لمهمة، قد تكون الاستجابات هي النجاح في المهمة أو الفشل في المهمة وفي كل من تلك الحالات يمكن ترميز الاستجابات بـ 1 أو 0.

اختبار كوكران

عندما تكون الاستجابات في تجربة قطاع عشوائي ثنائية ومرمّزة بـ 1 أو 0، يمكن استخدام اختبار كاي مربع لتقويم وجود تأثـيرات معالجـات. ولاختبـار مـاإذا كـانت تأثيرات المعالجات موجودة.

$$H_0: \text{كل } \tau_j \text{ مساو للصفر}$$
$$H_a: \text{ليس كل } \tau_j \text{ مساو للصفر} \qquad (25.1)$$

ويمكن استخدام احصاءة الاختبار التالية وتعود إلى كوكران:

$$X_c^2 = SSTR \div \frac{SSTR + SSBL.TR}{n(r-1)} \qquad (25.2)$$

والتي تختصر إلى:

$$X_c^2 = \frac{(r-1)(r\sum_j Y_{.j}^2 - Y_{..}^2)}{rY_{..} - \sum_i Y_{i.}^2} \qquad (25.2a)$$

حيث استُخدمت الرموز المعتادة.

وقد يختلف عدد مرات وجود الرقم 1 في كل قطاع بسبب الفروق بين قطاع وآخر. وإذا علمنا عدد مرات وجود الرقم 1 في كل قطاع، وكان لجميع المعالجات التأثير نفسه، فستكون لجميع تباديل الأرقام 1, 0 داخل قطاع فرص متساوية. ويمكن عندئذ، وتحت الافتراض بأن H_0 صحيحة تبيان أن X_C^2 يتوزع تقريبا وفقا لتوزيع χ^2 بـ r-1 درجة حرية، شريطة أن لايكون عدد القطاعات صغيرا جدا ، وتؤدي القيم الكبيرة لـ X_c^2 إلى استنتاج H_a.

مثال. يحتوي الجدول (٢٥-١) بيانات لتجربة تمّ فيها تجميع 15 فريقا إلى n=5 قطاعات في كل منها ثلاثة فرق وذلك وفقا لمعيار حول المقدرة الابتكارية لكل فريق. وقد تمّ تخصيص الفرق عشوائيا داخل كل قطاع لواحد من $r = 3$ طرق تدريب، وعند استكمال التدريب، تمّ تكليف كل فريق بانجاز المهمة المعقدة نفسها. وقد رُمّز النجاح في المهمة بـ 1 والفشل بـ 0.

ولاختبار ما إذا كانت لطرق التدريب تأثيرات متفاوتة على الأداء الناجح، نستخدم إحصاءة الاختبار (25.2a) ونحصل على:

$$X_C^2 = \frac{2[3(29) - (9)^2]}{3(9) - 19} = 1.5$$

وبضبط مستوى المعنوية عند$.05 = \alpha$. نحتاج إلى $\chi^2(.95;2) = 5.99$.

وبما أن $X_c^2 = 1.5 \le 5.99$ ، فنستنتج أن طرق التدريب لا تختلف في فعالياتها والقيمة- P لهذا الاختبارهي 0.47.

جدول (٢٥-١) تجربة ثنائية الاستجابة في تصميم قطاع عشوائي

القطاع i	طريقة التدريب 1	2	3	المجموع
1 مقدرة ابتكارية عالية	1	1	1	3
2	1	0	1	2
3	1	0	0	1
4	0	1	0	1
5 مقدرة ابتكارية منخفضه	1	0	1	2
المجموع	4	2	3	9

$$\sum Y_{.j}^2 = 4^2 + 2^2 + 3^3 = 29$$

$$\sum Y_{i.}^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 19$$

طريقة الاختبارات الثنائية المتعددة

حينما يؤدي اختبار كوكران إلى استنتاج وجود تأثيرات معالجات، يمكن إجراء اختبارات ثنائية مبنية على متوسطات المعالجات $\overline{Y}_{.j}$. وذلك بطريقة مماثلة لاختبار كروسكال- والاس الموصوف في فقرة (١٧-٤)، شريطة ألا يكون عدد القطاعات صغيرا جدا . وتكون حدود الاختبار لكل $g = r(r-1)/2$ من الاختبارات الثنائية بمستوى معنوية عائلي α، كما يلي:

$$\overline{Y}_{.j} = \overline{Y}_{.j'} \pm \left[\left(\frac{rY_{..} - \Sigma Y_{i.}^2}{nr(r-1)} \right) \left(\frac{2}{n} \right) \right]^{1/2} \qquad (25.3)$$

حيث:

$$B = z(1 - \alpha/2g) \qquad (25.3a)$$

$$g = \frac{r(r-1)}{2} \qquad (25.3b)$$

وإذا تضمنت حدود الاختبار القيمة صفر، نستنتج عدم اختلاف متوسطي المعالجتين المقابلين $\mu_{.j}$ و $\mu_{.j'}$ ونستنتج اختلاف متوسطي المعالجتين المقابلتين إذا لم تتضمن حدود الاختبار القيمة صفر.

(٢٥-٢) اختبار الرتبة لفريدمان

عندما تكون المشاهدات Y_{ij} في تصميم قطاع عشوائي تام بعيدة عن الطبيعية وتكون تحويلات البيانات غير مؤثرة، يمكن استخدام اختبار لامعلمي لتأثيرات المعالجات. ويسمى هذا الاختبار، اختبار فريدمان، ويعتمد على رتب البيانات في كل قطاع.

إحصاءة اختبار فريدمان

يتم أولا ترتيب المشاهدات لكل قطاع ولنرمز بـ R_{ij} لرتبة Y_{ij} عند ترتيب المشاهدات في القطاع i من 1 إلى r. فعندئذ تكون إحصاءة اختبار فريدمان:

$$X_F^2 = SSTR \div \frac{SSTR + SSBL.TR}{n(r-1)} \qquad (25.4)$$

و يمكن اختزالها (عندما لا توجد رتب متعادلة) إلى:

$$X_F^2 = \left[\frac{12}{nr(r+1)}\sum_j R_{.j}^2\right] - 3n(r+1) \qquad (25.4a)$$

حيث $R_{.j}$ مجموع الرتب للمعالجة j.

وإذا لم تكن هناك فروق بين المعالجات، فنفترض أن لجميع تباديل الرتب ضمن قطاع الفرصة نفسها وأن الإحصاءة X_F^2 ستتوزع تقريبا وفق التوزيع χ^2 بـ $(r-1)$ درجة حرية إذا لم يكن عدد القطاعات صغيرا . وتؤدي القيم الكبيرة لإحصاءة الاختبار إلى استنتاج أن المعالجات لها تأثيرات غير متساوية. وإذا كان عدد القطاعات صغيرا ، فيمكن استخدام جداول كتلك الموجودة في المرجع (25.1) للقيام باختبار مضبوط.

مثال. يحتوي الجدول (٢٥-٢) أ بيانات لتجربة تصميم قطاع عشوائي تام تمّ فيها تجميع 15 محلا في 5 قطاعات وفقا لحجم المحل، وتمّ عشوائيا تخصيص ثلاث طرق ترتيب مختلفة للقسم الخاص بمنتج معين الى المحلات الثلاثة في كل قطاع. ويبين الجدول (٢٥-٢)أ بيانات مبيعات هذا المنتج (بآلاف الدولارات) لكل من الـ 15 محلا . وبسبب مايبدو من انحراف واضح لهذه المبيعات عن الطبيعية، تقرّر استخدام اختبار

فريدمان لفحص ما إذا كانت متوسطات المبيعات لطرق التنسيق الثلاث مختلفة. ورتب بيانات المبيعات للجدول (٢٥-٢)أ مبينة في جدول (٢٥-٢)ب.

وباستخدام تلك النتائج، نحصل من (25.4a) على:

$$X_F^2 = \left[\frac{12}{5(3)(4)}(324)\right] - 3(5)(4) = 4.80$$

ولاختبار البدائل

$$H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3}$$

H_a: ليست جميع الـ $\mu_{.j}$ متساوية

حيث $\mu_{.j}$ متوسط المعالجة محسوب فوق جميع القطاعات، نستخدم قاعدة القرار:

إذا كان $X_F^2 \le \chi^2(1-\alpha; r-1)$ استنتج H_0

إذا كان $X_F^2 > \chi^2(1-\alpha; r-1)$ استنتج H_a

ولمستوى معنوية $\alpha = .10$ نحتاج إلى $\chi^2(.90;2) = 4.61$. وبما أن $X_F^2 = 4.80 > 4.61$ ،فنستنتج H_a، أي أن متوسطات المبيعات لطرق التنسيق الثلاث غير متساوية. والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0.09.

جدول (٢٥-٢) بيانات المبيعات والرتب لمثال تنسيق عرض مُنتج

قطاع i	(أ) المبيعات (بآلاف الدولارات) النسق (j) 1	2	3	قطاع i	(ب) رتب النسق (j) 1	2	3
1	75.3	69.5	87.7	1	2	1	3
2	64.3	70.0	71.1	2	1	2	3
3	59.0	45.4	71.8	3	2	1	3
4	44.2	35.1	61.0	4	2	1	3
5	21.7	59.9	25.3	5	1	3	2
				$R_{.j}$	8	8	14
				$\bar{R}_{.j}$	1.6	1.6	2.8

$\sum R_{.j}^2 = (8)^2 + (8)^2 + (14)^2$

تعليقات

١- في حال وجود تعادلات في بيانات معالجة ما، يمكن تخصيص متوسط الرتب للمشاهدات المتعادلة والاستمرار في استخدام إحصاءة الاختبار (25.4) شريطة عدم وجود العديد من التعادلات في مجموعة البيانات.

٢- يكون لإحصاءة الاختبار (25.4) نفس شكل إحصاءة اختبار كوكران (25.5)، ولكن مطبقة على رتب بدلا من بيانات 1, 0.

طريقة الاختبارات الثنائية المتعددة

بالضبط كما في حالة اختبار كروسكال - والاس للدراسات وحيدة العامل، فقرة (١٧- ٤)، وقياسا على طريقة بونفيروني للمقارنات الثنائية، يمكن استخدام اختبار عينة كبيرة الحجم للحصول على معلومات حول المقادير المقارنة لمتوسطات المعالجات في تصاميم قطاع عشوائي تام وذلك عندما يشير اختبار فريدمان إلى اختلاف هذه المتوسطات. وتوضع حدود الاختبار لكل $g = r(r\text{-}1)/2$ من المقارنات الثنائية مستخدمين متوسط الرتب $\overline{R}_j$ بمستوى معنوية عائلي α، كما يلي:

$$\overline{R}_{.j} - \overline{R}_{.j'} \pm B\left[\frac{r(r+1)}{6n}\right]^{1/2} \qquad (25.5)$$

حيث:

$$B = z(1 - \alpha/2g) \qquad (25.5a)$$

$$g = \frac{r(r+1)}{2}$$

إذا احتوت حدود الاختبار على الصفر، نستنتج عدم اختلاف متوسطي المعالجتين μ_j و$\mu_{j'}$. وإذا لم تحتوي حدود الاختبار الصفر، نستنتج أن متوسطي المعالجتين مختلفان. وبذلك يمكن أن نضع مجموعات من المعالجات التي لاتختلف متوسطاتها طبقا لهذه الطريقة المتزامنة في الاختبار.

مثال. لمثال تنسيق عرض مُنتج، نرغب في القيام بجميع الاختبارات الثنائية بمستوى معنوية عائلي$\alpha = 0.20$. ومتوسطات الرتب $\overline{R}_j$ معروضة في الجدول

(٢٥-٢)ب. ومن أجل $r = 3$، لدينا $g = 3(2)/(2)$. ولذا، نحصل في حالة $n=5$ على
$B = z\,[1-.20 / 2(3)] = z\,(.9667) = 1.834$
وهكذا يكون الحد الأيمن في (25.5):

$$B\left[\frac{r(r+1)}{6n}\right]^{1/2} = 1.834\left[\frac{3(4)}{6(5)}\right]^{1/2} = 1.16$$

ونلاحظ من الجدول (٢٥-٢)ب أن الفروق بين متوسط الرتب لطريقة التنسيق 3 وكل من طرق التنسيق الأخرى يزيد عن 1.16 وهي بالتالي فروق معنوية. ولذا يمكن تكوين مجموعتين، لاتختلف فيهما متوسطات المعالجات:

المجموعة 1		المجموعة 2	
النسق 1	$\overline{R}_1 = 1.6$	النسق 3	$\overline{R}_3 = 2.8$
النسق 2	$\overline{R}_2 = 1.6$		

ولذا، نستنتج بمستوى معنوية عائلي 0.20 أن طريقة التنسيق 3 تؤدي إلى متوسط مبيعات أكبر من الطريقتين 1 و 2.

(٢٥-٣) المشاهدات المفقودة

هناك حالات تكون فيها واحدة أو أكثر من المشاهدات "مفقودة " في تصميم قطاع عشوائي تام. قد يكون أحد العناصر مريضا ، وقد يكون أحد السجلات مضللا ، وقد يجري خطأ في تطبيق المعالجة في إحدى الحالات. وتدمر مثل تلك المشاهدات المفقودة تناظر (تعامد) تصميم قطاع تام وتجعل حسابات التحاين المعتادة غير ملائمة. ومع ذلك، يظل أسلوب الانحدار لتحليل تصاميم قطاع عشوائي والذي نوقش في فقرة ٢٤-١٠ ملائما عند وجود مشاهدات مفقودة. والسبب هو أن نموذج تصميم قطاع عشوائي بدون تفاعل (24.2) يسمح لنا في الواقع بتقدير متوسط الاستجابة للخلية المفقودة. وقد شرحنا سابقا كيف يتم ذلك لنموذج ثنائي العامل بدون تفاعل (فقرة ٢١-١)، والمنطق نفسه ينطبق هنا.

وبما أنه ليست هناك مبادىء جديدة، فسنقدم الآن مثالا لتوضيح استخدام أسلوب الانحدار حينما تكون المشاهدات مفقودة في تجربة تصميم قطاع عشوائي.

مثال

يحتوي الجدول (٢٥-٣) بيانات تجربة تصميم قطاع عشوائي بسيطة بـ $r = 3$ معالجات و $n = 3$ قطاعات، وحيث المشاهدة Y_{11} مفقودة. ونضع نموذج الانحدار المكافىء لنموذج تصميم قطاع عشوائي (24.2) كما يلي:

$$Y_{ij} = \mu.. + \underbrace{\rho_1 X_{ij1} + \rho_2 X_{ij2}}_{\text{تأثير قطاع}} + \underbrace{\tau_1 X_{ij3} + \tau_2 X_{ij4}}_{\text{تأثير معالجة}} + \varepsilon_{ij} \qquad (25.6)$$

نموذج تام

حيث:

$$X_{ij1} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$X_{ij2} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 2} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$X_{ij3} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 1} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$X_{ij4} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 2} \\ -1 & \text{إذا كانت الوحدة التجريبية من القطاع 3} \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

جدول (٢٥-٣) مثال مشاهدة مفقودة في تصميم قطاع عشوائي ($r = 3$، $n = 3$)

قطاع i	معالجة (j) 1	2	3
1	مفقود	10	9
2	11	10	7
3	6	4	3

يعرض جـدول (٢٥-٤) مصفوفـات $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ وβ للنمـوذج التـام (25.6) لهـذه التجربـة حيث المشاهدة Y_{11} مفقودة.

ويتـم تحليـل التبـاين لاختبـار تأثيرات المعالجـات وتأثـيرات القطاعـات بالطريقـة العادية وذلك بتوفيق النموذج التام (25.6) أولا ثم توفيق كـل مـن النمـاذج المخفضـة الآتية اختبار لتأثيرات القطاعات

$$Y_{ij} = \mu_{\cdot\cdot} + \tau_1 X_{ij3} + \tau_2 X_{ij4} + \varepsilon_{ij} \qquad (25.7)$$

نموذج مخفض

اختبار لتأثيرات المعالجات

$$Y_{ij} = \mu_{\cdot\cdot} + \rho_1 X_{ij1} + \rho_2 X_{ij2} + \varepsilon_{ij} \qquad (25.7)$$

نموذج مخفض

ويتم بعد ذلك حساب مجاميع المربعـات الإضافيـة $SSR(X_1, X_2 | X_3, X_4)$ للقطاعـات و$SSR(X_3, X_4 | X_1, X_2)$ للمعالجـات كالمعتـاد. ويقـدم الجـدول (٢٥-٥)أ تلـك المجـاميع الإضافية للمربعات في مثالنا كما نتجت عن تشغيلي حاسب، ومعها، أيضا، مجمـوع مربعات الخطأ للنموذج الكامل. ولم يُعط مجموع المربعات الكلي وذلك بسبب غيـاب خاصية التعامد كنتيجة للمشاهدة المفقودة.

ويتم اختبار تأثيرات المعالجات كالمعتاد. ونجد من الجدول (٢٥-٥)أ:

$$F^* = \frac{MRS(X_3, X_4 | X_1, X_2)}{MSE} = \frac{6.25}{.44} = 14.2$$

جدول (٢٥-٤) مصفوفات $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ و β لمثال المشاهدة المفقودة جدول (٢٥-٣)

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{13} \\ Y_{21} \\ Y_{22} \\ Y_{23} \\ Y_{31} \\ Y_{32} \\ Y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 11 \\ 10 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \beta = \begin{bmatrix} \mu_{\cdot\cdot} \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

جدول (٢٥-٥) جدول تحاين ومُخرجات الانحدار الأخرى لمثال المشاهدة المفقودة.

(أ) جدول تحاين

مصدر التغير	*SS*	*df*	*MS*
القطاعات	53.83	2	26.92
تحاين	12.50	2	6.25
خطأ	1.33	3	.44

(ب) معامل الانحدار المقدَّرة للنموذج التام (25.6)

معامل الانحدار	معامل الانحدار المقدّر
$\mu_{..}$	$\hat{\mu}_{..} = 8.000$
ρ_1	$\hat{\rho}_1 = 2.333$
ρ_2	$\hat{\rho}_2 = 1.333$
τ_1	$\hat{\tau}_1 = 1.667$
τ_2	$\hat{\tau}_2 = 0.0$

مصفوفة التباين - التغاير المقدرة لمعاملات الانحدار

$$
\begin{array}{c} \\ \mu_{..} \\ \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \hat{\mu}_{..} & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \hat{\tau}_1 & \hat{\tau}_2 \end{array} \\
\begin{bmatrix} .06173 & & & & \\ .02469 & .14815 & & & \\ -.01235 & -.07407 & .11111 & & \\ .02469 & .04938 & -.02469 & .14815 & \\ -.01235 & -.02469 & .01235 & -.07407 & .11111 \end{bmatrix} \end{array}
$$

ومن أجل $\alpha = 0.05$، نحتاج إلى $F(.95;2,3) = 9.55$. وبما أن $F^* = 14.2 > 9.55$، فنستنتج وجود تأثيرات معالجات متفاوتة. والقيمة P- لهذا الاختبار هي 0.03. ويمكن إجراء اختبار تأثيرات القطاع، حينما يكون مطلوبا ، بالطريقة نفسها تماما .

ولاتواجهنا أية مشاكل جديدة باستخدام أسلوب الانحدار لتحليل تأثيرات مثبتة للمعالجات عندما تكون هناك مشاهدات مفقودة. وفي مثالنا، لتقدير المقارنة الثنائية

$D = \mu_1 - \mu_3 = \tau_1 + \tau_2$، على سبيل المثال، نستفيد من حقيقة أن $\tau_3 = -\tau_1 - \tau_2$ لنجد:

$$D = \mu_1 - \mu_3 = \tau_1 - \tau_3 = \tau_1 - (-\tau_1 - \tau_2) = 2\tau_1 + \tau_2 \quad (25.9)$$

والتقدير غير المنحاز لـ (25.9) هو:

$$D = 2\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2$$

وتباينه المقدَّر، باستخدام (1.27b) هو:

$$s^2\{\hat{D}\} = 4s^2\{\hat{\tau}_1\} + s^2\{\hat{\tau}_2\} + 4s\{\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2\} \quad (25.11)$$

ويحتوي الجدول (٢٥-٥)ب معاملات الانحدار المقدَّرة للنموذج التام، ويحتوي الجدول (٢٥-٥)جـ مصفوفة التباين ـ التغاير المقدَّرة لمعاملات الانحدار وبذلك نحصل على التقديرات التالية:

$$\{\hat{D}\} = 2(1.667) + 0.0 = 3.334$$

$$s^2\{\hat{D}\} = 4(.14815) + .11111 + 4(-.07407) = .4074$$

وبالتالي يكون الانحراف المعياري المقدَّر $s\{\hat{D}\} = .638$. ولفترة ثقة 95% لـ D نحتاج إلى $t(.975;3) = 3.182$، مما يؤدي إلى حدي الثقة $3.334 \pm (3.182)(.638)$، وفترة الثقة هي:

$$1.3 \leq \mu_1 - \mu_3 \leq 5.4$$

ملاحظة

يُستخدم أحيانا أسلوب حسابي يدوي بديل يعود إلى ياتس (*Yates*) عندما تكون هناك واحدة أو اثنتان من المشاهدات المفقودة. ويتم الحصول على مشاهدات كاذبة للقيم المفقودة، ثم تجري حسابات التحاين العادية كما لو كانت لدينا كل المشاهدات. وتجري في النهاية تعديلات لحسابات التحاين. انظر مرجع (25.2) لتفصيلات كاملة لتلك الطريقة. ومع الانتشار الأوسع لحزم حاسوب جاهزة للانحدار، تضاءلت الحاجة بصفة عامة لاستخدام أسلوب الحساب البدوي لياتس.

(٢٥-٤) تأثيرات قطاع عشوائي

يمكن اعتبار القطاعات في بعض الأحيان عينة عشوائية من مجتمع، ولذا ينبغي اعتبار تأثيرات القطاع في نموذج القطاع العشوائي متغيرات عشوائية.

١-درس أحد الباحثين التحسن في تعلم شعب الصف الثالث الناتج عن إضافة واحد أو اثنين من مساعدي التدريس إلى المدرس. وقد تمّ اختيار عشر مدارس عشوائيا ، وتمّ استخدام ثلاثة فصول من الصف الثالث في كل مدرسة من المدارس. وفي كل مدرسة، تمّ اختيار فصل واحد عشوائيا لكي يكون بدون مساعدي تدريس، وتمّ اختيار شعبة واحدة عشوائيا لكي تكون بمساعد تدريس واحد، وتم تخصيص اثنين من مساعدي التدريس للشعبة الثالثة. وكانت كمية التعلم للفصل، والمقاسة بعناية في نهاية العام الدراسي، هي المتغير التابع.

وتشكل المدارس هنا القطاعات، والتي يمكن النظر إليها كعينة عشوائية من جميع المدارس المؤهلة للدراسة.

٢- في دراسة فعاليّة أربع جرعات مختلفة لدواء ما، تمّ استخدام 20 حظيرة من الفئران، كل منها تتكون من أربع فئران. ويمكن النظر إلى الحظائر العشرين (قطاعات) على أنها عينة عشوائية من مجتمع جميع الحظائر التي كان يمكن استخدامها في الدراسة. وعندما يمكن اعتبار القطاعات عينة عشوائية من مجتمع من القطاعات، يمكن استخدام إما النموذج التجميعي (لاتفاعل) أو اللاتجميعي (تفاعل). ويمكن المساعدة في الاختبار باستخدام التشخيصات التي نوقشت في الفصل ٢٤. وبصفة خاصة، يمكن للرسوم البيانية للاستجابات Y_{ij} لكل قطاع، كالتي في الشكل (٢٤-١) المساعدة في فحص ما إذا كانت القطاعات والمعالجات تتفاعل.

ويشكل القصور الشديد في التوازي في ذلك الرسم البياني مؤشرا واضحا إلى أن نموذج التفاعل يمكن أن يكون النموذج المفضّل. ويمكن استخدام احصاءة اختبار توكي للتفاعلات في (21.13) مع التوضيح هنا أن الاختبار يُطّبق على القطاعات المعطاة التي اختيرت.

عندما يكون الاهتمام الرئيس للتحليل هو اختبار وتقدير تأثيرات المعالجات، وهي الحالة المعتادة، لايكون الاختيار بين النموذجين مسألة حرجة، ذلك لأن طرق الاستقراء حول التأثيرات المثبتة للمعالجات، كما سنرى، سيبقى نفسه بالضبط

للنموذجين.

وسنشرح أولا النموذج التجميعي، نموذج اللاتفاعل، لتصاميم قطاع عشوائي مع تأثيرات قطاع عشوائية، ثم نتابع بعدئذ مناقشة النموذج اللاتجميعي. وسنستطلع بصفة خاصة، طبيعة الارتباط الذي نفترضه في كل نموذج بين الوحدات التجريبية داخل القطاع، ذلك لأنه يمكن في الغالب الحكم على فائدة النموذج من زاوية تلك الارتباطات المفترضة.

وفي حالة خاصة من القطاعات العشوائية عندما تكون القطاعات وحدات تجريبية مثل أشخاص، محلات، أو مدن، تتلقى كل منها جميع المعالجات عبر الزمن أو يتم تقويم تأثيرات معالجات عند نقاط زمن مختلفة (الدعاية مثلا). تسمى تلك التصاميم تصاميم قياسات متكررة وسوف نناقشها في الفصل ٢٨.

النموذج التجميعي

النموذج التجميعي لتأثيرات عشوائية للقطاعات، وتأثيرات مثبتة للمعالجات، هو نموذج مشابه لنموذج التأثيرات المثبتة (25.12):

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \rho_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \qquad (25.12)$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت.

ρ_i مستقلة و $N(0,\sigma_\rho^2)$

τ_j ثوابت خاضعة للقيد $\sum \tau_j = 0$

ε_{ij} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$، ومستقلة عن ρ_i

$i = 1,\ldots, n; j = 1,\ldots, r$

خواص النموذج

تكون المشاهدات Y_{ij} للنموذج التجميعي (25.12) موزعة توزيعا طبيعيا لأن كلا منها عبارة عن تركيب خطي من متغيرات طبيعية مستقلة. ويكون المتوسط والتباين لـ Y_{ij}:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu_{..} + \tau_j \qquad (25.13a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ij}\}=\sigma_Y^2=\sigma_\rho^2+\sigma^2 \qquad (25.13b)$$

ولذا يكون تباين Y_{ij} ونرمز له بـ σ_Y^2 ثابتا لجميع المشاهدات، ولكنه هنا مؤلف من مركبتين : (١) التشتت بين القطاعات σ_ρ^2 و (٢)تباين الخطأ σ^2.

و يفترض النموذج التجميعي (25.12) أن المشاهدات من قطاعات مختلفة مستقلة، ومع ذلك، فإن أي مشاهدتين من القطاع نفسه Y_{ij} و $Y_{ij'}$ تكونان مرتبطتين في هذا النموذج. ويمكن أن نبيّن أن تغايرهما هو:

$$\sigma\{Y_{ij},Y_{ij'}\}=\sigma_\rho^2 \qquad j\neq j' \qquad (25.14)$$

وهكذا يمكن القول مقدما أن لأي مشاهدتين من القطاع نفسه ارتباط موجب، ويبقى التغاير نفسه لجميع القطاعات. وسبب الارتباط هو أنه لأي مشاهدتين من القطاع نفسه المركبة ρ_i نفسها، مما يؤدي إلى جعل المشاهدتين أكثر شبها . و يكون هذا التغاير الموجب معقولا في كثير من التطبيقات. وعلى سبيل المثال، سيتجه تعلم فصل من الفصول المختلفة في المدرسة نفسها لأن يكون أكثر تماثلا مما هو لفصول من مدارس مختلفة وذلك بسبب تماثل التسهيلات، و تماثل نوعية المدرسي، وماشابه.

ويكون معامل الارتباط بين أي مشاهدتين من القطاع نفسه للنموذج (25.12) ثابتا لجميع القطاعات وسنرمز له بالرمز.

$$\omega=\frac{\sigma_\rho^2}{\sigma_Y\sigma_Y}=\frac{\sigma_\rho^2}{\sigma_Y^2} \qquad (25.15)$$

وينتج ذلك من تعريف معامل الارتباط في (13.7) وحقيقة أن $\sigma\{Y_{ij}\}=\sigma\{Y_{ij'}\}=\sigma_Y$.
لاحظ أنه يمكن التعبير عن التغاير في (25.14) كما يلي مستخدمين (25.15):

$$\sigma\{Y_{ij},Y_{ij'}\}=\omega\sigma_Y^2 \qquad j\neq j' \qquad (25.16)$$

وإحدى الخواص المهمة للنموذج التجميعي (25.12)، كما توضحها العلاقتان (25.14) و (25.15)، هي أن ارتباط أي مشاهدتين Y_{ij} داخل قطاع ما معطى، وقبل المحاولات العشوائية، هو ارتباط من النمط نفسه. ولذا يكون لمصفوفة التباين ــ التغاير للمشاهدات في قطاع معطى شكلها الخاص. ونوضح مصفوفة التباين - التغاير للمشاهدات في قطاع من أجل دراسة قطاع عشوائي حيث $r=3$ معالجات، وذلك

• باستخدام عبارة التغاير في (25.16):

$$\sigma^2\{\mathbf{Y}\}=\begin{bmatrix}\sigma_Y^2 & \omega\sigma_Y^2 & \omega\sigma_Y^2\\ \omega\sigma_Y^2 & \sigma_Y^2 & \omega\sigma_Y^2\\ \omega\sigma_Y^2 & \omega\sigma_Y^2 & \sigma_Y^2\end{bmatrix}=\sigma_Y^2\begin{bmatrix}1 & \omega & \omega\\ \omega & 1 & \omega\\ \omega & \omega & 1\end{bmatrix} \qquad (25.17)$$

حيث:

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}Y_{i1}\\ Y_{i2}\\ Y_{i3}\end{bmatrix}$$

لاحظ أن القطر الرئيس للمصفوفة يحتوي على تباينات Y_{ij} وتساوي σ_Y^2 والتغـايرات، $\omega\sigma_Y^2$ ، فيما عدا ذلك.

ويسمى النمط الخاص لمصفوفة التباين - التغاير في (25.17) التناظر المركب.

وبينما تكون أي مشاهدتين في قطاع معطى مرتبطتين قبل المحـاولات العشـوائية، يفترض النموذج التجميعي (25.12) حال اختيـار قطـاع مـا، أن المشـاهدات في ذلـك القطاع مستقلة. ولهذا يكون التغير العشوائي الوحيد الباقي لأي مشـاهدة Y_{ij} هـو حـد الخطأ ε_{ij} ويفترض النموذج التجميعي (25.12) أنها مستقلة. وهكذا يفـترض النمـوذج (25.12)، في دراسة مساعد المدرس، أنه طالما يتم اختيار المـدارس، فـإن أداء فصـل مـا يكون مستقلا عن أداء أي فصل آخر وذلك في كل سنة مختـارة، مفـترضين أن كـل الشروط المشتركة للفصول في تلك المدرسة هي كما يعكسها تأثير القطاع ρ_i.

تعليقات.

١- يمكن التعبير عن تباين Y_{ij} في (2513b) مستخدمين (25.15) كالآتي:

$$\sigma_Y^2=\omega\sigma_Y^2+\sigma^2$$

و بالتالي نحصل على:

$$\sigma_Y^2=\frac{\sigma^2}{1-\omega} \qquad (25.18)$$

٢- يضع افتراض التناظر المركب في النموذج التجميعي (25.12) أكثر مما ينبغـي من القيود، فبينما يكفي هذا الافتراض لتكون الاحصاءة F^* الخاصـة باختبـار تأثـيرات

المعالجات خاضعة لتوزيع F تحت H_0 أي، عندما لاتوجد تأثيرات معالجات، إلا أن هذا الافتراض غير ضروري وسيكفي لهذا الغرض، تحقق شرط الدائرية. ويتطلب هذا الشرط أن يكون تباين الفرق بين أي اثنين من تقديرات متوسطات المعالجات ثابتا ، أي أن :

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{.j}, \bar{Y}_{.j'}\} = \qquad j \neq j' \tag{25.19}$$

ويمكن مواجهة هذا الشرط دون الحاجة إلى التناظر المركب. اعتبر على سبيل المثال، مصفوفة التباين – التغاير الآتية للمشاهدات Y_{ij} ضمن أي قطاع في دراسة قطاع عشوائي تام، حيث $r = 3$ معالجات:

$$\sigma^2\{Y\} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

وإذ لاتستوفي هذه المصفوفة شرط التناظر المركب، إلا أنها تحقّق متطلّب الدائرية في (25.19)، ولدينا $\sigma^2\{\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{.j'}\} = 2/n$ دائما . وعلى سبيل المثال، لدينا:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{.1}, \bar{Y}_{.3}\} = \frac{2}{n} + \frac{8}{n} - 2\left(\frac{4}{n}\right) = \frac{2}{n}$$

تحليل التباين. يحتوي جدول (٢٥–٦) تحليل التباين لنموذج تجميعي (25.12). ومجاميع المربعات هي نفسها كما في (24.6) لنموذج التأثيرات المثبتة.

جدول (٢٥–٦) تحاين لتصميم قطاع عشوائي تام – تأثيرات عشوائية للقطاعات

مصدر التغير	SS	df	MS	$E\{MS\}$ نموذج تجميعي (25.12)	$E\{MS\}$ نموذج تفاعل (25.20)
قطاعات	SSBL	$n - 1$	MSBL	$\sigma^2 + r\sigma_\rho^2$	$\sigma^2 + r\sigma_\rho^2$
معالجات	SSTR	$r - 1$	MSTR	$\sigma^2 + \frac{n}{r-1}\sum\tau_j^2$	$\sigma^2 + \sigma_{\rho\tau}^2 + \frac{n}{r-1}\sum\tau_j^2$
خطأ	SSBL.TR	$(n-1)(r-1)$	MSBL.TR	σ^2	$\sigma^2 + \sigma_{\rho\tau}^2$
المجموع	SSTO	$nr - 1$			

ويحتوي الجدول (٢٥–٦) توقع متوسط المربعات للنموذج (25.12) ، أيضا.

وإحصاءة اختبار تأثيرات المعالجات هي $TR.F^* = MSTR / MSBL$ ، كما يتضح من عمود $E\{MS\}$ في الجدول (٢٥-٦). وهكذا، فإحصاءة الاختبار تبقى نفسها سواء كانت تأثيرات القطاع مثبتة أو عشوائية. كما أن فترات الثقة لمتضادات المعالجات لا تقدّم أية مشاكل جديدة. وسنستخدم $MSBL.TR$، مرة أخرى، كمتوسط مربعات في التباين المقدّر للمتضادة.

نموذج تفاعل

عندما تشير التشخيصات التي نوقشت في فصل ٢٤ إلى وجود تفاعل بين القطاع والمعالجة في حالة كون القطاعات عينة عشوائية من مجتمع من القطاعات، يمكن استخدام نموذج القطاع العشوائي التالي، وهو يسمح بالتفاعل بين القطاعات والمعالجات:

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \rho_i + \tau_j + (\rho\tau)_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad (25.20)$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت.

ρ_i مستقلة و $N(0,\sigma_\rho^2)$

τ_j ثوابت وخاضعة للقيد $\sum\tau_j = 0$

$(\rho\tau)_{ij}$ تتوزع وفق $N(0,\frac{r-1}{r}\sigma_{\rho\tau}^2)$ وخاضعة للقيود $\sum(\rho\tau)_{ij} = 0$ مهما تكن i.

$\sigma\{(\rho\tau)_{ij},(\rho\tau)_{ij'}\} - \frac{1}{r}\sigma_{\rho\tau}^2$ من أجل $j \neq j'$

$(\rho\tau)_{ij}$ مستقلة عن ρ_i ؛ ε_{ij} مستقلة و$N(0, \sigma^2)$ ومستقلة عن ρ_i وعن $(\rho\tau)_{ij}$.

$j = 1,..., r, i = 1 ,..., n$

خواص النموذج. تتوزع المشاهدات Y_{ij} لنموذج التفاعل (25.20) توزيعاً طبيعياً، بالتباين والقيم المتوقعة التالية:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu_{..} + \tau_j \qquad (25.21a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ij}\} = \sigma_Y^2 = \sigma_\rho^2 + \frac{r-1}{r}\sigma_{\rho\tau}^2 + \sigma^2 \qquad (25.21b)$$

ومرة أخرى هنا، Y_{ij} لها تباين ثابت، ولكن يتألف التباين الآن من ثلاث مركبات. فنفترض، كما في نموذج اللاتفاعل (25.12)، أن المشاهدات من قطاعات مختلفة مستقلة

طبقا للنموذج (25.20) وبالمثل، تكون أي مشاهدتين Y_{ij}, $Y_{ij'}$، من القطاع نفسه مرتبطتان في حالة نموذج التفاعل (25.20)، ويمكن تبيان أن التغاير هو:

$$\sigma\{Y_{ij}, Y_{ij'}\} = \sigma^2_\rho - \frac{1}{r}\sigma^2_{\pi\tau} \qquad j \neq j' \tag{25.22}$$

وهكذا يكون لأي مشاهدتين من القطاع نفسه في نموذج التفاعل (25.20) تغاير ثابت، ويصحّ ذلك في جميع القطاعات. ويكون معامل الارتباط بين أي مشاهدتين في القطاع نفسه وسنرمز له بـ ω^* كما يلي:

$$\omega^* = \frac{\sigma^2_\rho - \frac{1}{r}\sigma^2_{\rho\tau}}{\sigma^2_Y} \tag{25.23}$$

تعليقات

١– السبب في أننا نعبر عن تباين حدود التفاعل في نموذج التفاعل (25.20) بالشكل $(r-1)\sigma^2_{\rho\tau}/r$ بدلا من $\sigma^2_{\rho\tau}$ هو أن عبارة توقع متوسط المربعات ستكون عندئذ بسيطة نسبيا .

٢– تنتج صفة التغاير في (25.22) من حقيقة أنه يمكن في حالة نموذج التفاعل (25.12)، تبيان أن:

$$\sigma\{Y_{ij}, Y_{ij'}\} = \sigma\{\rho_i, \rho_i\} + \sigma\{(\rho\tau)_{ij}, (\rho\tau)_{ij'}\} \tag{25.24}$$

والحد الأول على اليمين هو تباين ρ_i، أي σ^2_ρ طبقا للنموذج، والحد الثاني على اليمين هو تغاير حدي تفاعل من القطاع نفسه، والمعطى من النموذج على أنه $\sigma^2_{\rho\tau}/r$.

٣– يفترض نموذج التفاعل (25.20) تماما كما في حالة نموذج اللاتفاعل (25.12) أنه حالما يتم اختيار القطاعات، فإن أي مشاهدتين من قطاع ما تكونان غير مرتبطتين.

تحليل التباين. تبقى مجاميع المربعات ودرجات الحرية لنموذج التفاعل (25.20) كتلك الخاصة بنموذج اللاتفاعل (25.12). ويظهر الفرق الرئيس في استخدام النموذجين في توقع متوسط المربعات، كما هو مبين في جدول (٢٥–٦). ويكون الاختبار المضبوط

لتأثيرات القطاع غير ممكن في حالة نموذج التفاعل، بينما يكون الاختبار المضبوط ممكنا في نموذج اللاتفاعل. ويبقى هذا التمييز غير مهم حيثما كانت القطاعات مستخدمة من الأساس لتخفيض تشتت الخطأ التجريبي وليست لها أهمية جوهرية في ذاتها.

وتبقى إحصاءة الاختبار F^* الخاصة بتأثيرات المعالجات نفسها للنموذجين، ونعني $F^* = MSTR/MSBL.TR$ التي تساوي بالضبط إحصاءة الاختبار (24.76) لنموذج قطاع عشوائي بتأثيرات قطاع مثبتة. وبالمثل يمكن في حالة تأثيرات عشوائية للقطاعات تقدير تأثيرات المعالجات المثبتة لكل من النموذجين بالأسلوب نفسه الموصوف في فصل 24 في حالة تأثيرات مثبتة للقطاعات.

بعض التعليقات النهائية

١- يشير الجدول (٢٥-٦) إلى أنه عندما تكون تأثيرات القطاع عشوائية، فإن *MSBL.TR* تقدّر للنموذج التجميعي (25.12). إلا أن *MSBL.TR* تُقدِّر مجموع تباين حد الخطأ، وتباين التفاعل $\sigma^2_{\rho\tau}$ للنموذج اللاتجميعي (25.20). و من غير الممكن إيجاد تقديرات منفصلة لهاتين المركبتين من النموذج الأخير، ويقال إن المركبتين مختلطتان.

٢- عندما لايتحقق فرض التناظر المركب، والذي يشكل أساسا لكل من نموذج اللاتفاعل (25.12) ونموذج التفاعل (25.20) أوعندما لايتحقق متطلّب الدائرية الأقل قيدا ، يصبح اختبار F المعتاد منحازا . وتقدم بعض حزم الحاسب للمستخدم اختيار القيام باختبار رسمي للتناظر المركب أو الدائرية.

وعندما لا تتحقق هذه الشروط، فهناك طريقة لاختبار محافظ وتقريبي تتلخص فيما يلي:

أ - قم باختبار F العادي. وإذا أدى هذا الاختبار إلى استنتاج H_0، فاقبل هذا الاستنتاج.

ب- وإذا أدى اختبار F العادي إلى H_a، ضع $F(1-\alpha,1,n-1)$ في قاعدة القرار (24.7c) بدلا من $F[1-\alpha, r-1,(n-1)]$. وإذا أدت قاعدة القرار المعدّلة هذه إلى H_a، فاقبل

هذا الاستنتاج.

جـ- إذا أدت قاعدة القرار المعدّلة إلى H_0 أعد النظر في درجات الحرية في قاعدة القرار المعدّلة مستخدما أحد أساليب ايبسلون للتعديل، كما هي موصوفة في المراجع [25.3] و [25.4].

وكبديل، يمكن استخدام أساليب تحليل التباين متعدد المتغيرات شريطة أن يكون $n > r$. انظر مرجع [25.5] لمزيد من المناقشة لهذه المسائل.

٣- اقترحت، أيضا، نماذج مختلطة مبنية على افتراضات أقل تقييدا فيما يتعلق بمصفوفة التباين- التغاير والمعالم في نموذج التحاين. انظر مرجع [25.6] لمناقشة تلك النماذج.

(٢٥-٥) تصاميم قطاع عشوائي معممة

عندما تكون تأثيرات القطاع مثبتة، فإن استخدام نموذج اللاتفاعل في حالة وجود التفاعل بين القطاعات والمعالجات له أثره في تقليل قوة الاختبار وزيادة عرض تقديرات الفترة لتأثيرات المعالجات، مما يجعل التجربة أقل حساسية. وبالإضافة إلى ذلك، هناك حالات يهتم فيها البعض بطبيعة التفاعلات بين القطاعات والمعالجات ويود أن يحصل على تقديرات لها. ومن الممكن استخدام تصميم يسمح بحد تفاعل في النموذج حتى عندما تكون تأثيرات القطاع مثبتة، وذلك يسمح بدراسة طبيعة تأثيرات التفاعل. ويسمى هذا التصميم تصميم قطاع عشوائي معمّم، وهذا التصميم هو نفس تصميم القطاع العشوائي ماعدا تخصيص d وحدة تجريبية لكل معالجة داخل القطاع. ويزيد التصميم حجم القطاع من r وحدة في حالة تصميم قطاع عشوائي إلى dr وحدة. ويكون لهذه الزيادة في حجم القطاع غالبا تأثير في زيادة تشتت الخطأ التجريبي و ذلك عندما يكون عدد الوحدات التجريبية مثبتا . وفي العلوم الاجتماعية، على أي حال، قد تسبب زيادة حجم القطاع، زيادة معتدلة، خسارة طفيفة في الفعالية. وعلى سبيل المثال، إذا كان لدينا قطاع واحد من 10 أشخاص من فئة العمر 20 - 29 بدلا من قطاعين من خمسة أشخاص من فئتي العمر 20 - 24 و 25 - 29، على

الترتيب، فسينطوي ذلك، في أنواع عديدة من التجارب، على خسارة طفيفة في الفعالية.

وكما سنوضح بمثال، يتم تحليل تصميم قطاع عشوائي معمم كتحليل دراسة عادية متعددة العوامل بحيث تشكل القطاعات أحد العوامل. وبالتالي لانواجه أية مشاكل جديدة مع تصميم القطاع العشوائي المعمم فيما يتعلق باختبار تأثيرات المعالجة أو بتقديرها. وسنكون الآن قادرين، بصفة خاصة، على حساب *MSE* واستخدامه كمقدّر لتباين الخطأ.

مثال

يحتوي الجدول (٢٥-٧) بيانات لتجربة ذات عاملين حيث تُدرس تأثيرات الحافز (عامل *A* : مستوى عالي، مستوى منخفض، واللهو (عامل *B* : مستوى عال، مستوى منخفض) على الوقت المطلوب لاستكمال مهمة. مستخدمين ثمانية رجال وثماني نساء. وتمّ تخصيص رجلين عشوائيا لكل معالجة، كما تمّ، بصورة مستقلة تخصيص امرأتين عشوائيا لكل معالجة. ومتغير التجميع في قطاعات هنا هو الجنس.

جدول (٢٥-٧) دراسة ثنائية العامل في تصميم قطاع عشوائي معمّم المشاهدات هي الأوقات اللازمة لاستكمال مهمة

	القطاع (الجنس)	
	ذكر	أنثى
حافز مرتفع:		
لهو مرتفع	12	3
	8	9
لهو منخفض	7	5
	5	9
حافز منخفض:		
لهو مرتفع	14	11
	16	9
لهو منخفض	15	10
	13	14

ويحتوي كل قطاع ثمانية أشخاص، وقد خُصص اثنان عشوائيا لكل معالجة ضمن القطاع. ويتفق المخطط في الجدول (٢٥-٧) مع المخطط في الجدول (٢٢-٢)أ لدراسة ثلاثية العامل، وللتذكير بهذا الاتفاق، وضعنا القطاعات في أعمدة بدلا من أن تكون كالمعتاد في صفوف. وحيث تم اعتبار القطاعات، ومستويات الحافز ومستويات اللهو مثبتة. وسنستخدم النموذج ثلاثي العامل بتأثيرات مثبتة (22.14)، برموز معدّلة لتلائم السياق الحالي:

$$Y_{ijkm} = \mu_{..} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\rho\alpha)_{ij} + (\rho\beta)_{ik} + (\alpha\beta)_{ik} + (\rho\alpha\beta)_{ijk} + \varepsilon_{ijkm}$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت

ρ_i ، α_j و β_k ثوابت خاضعة للقيود $\Sigma\rho_i = \Sigma\alpha_j = \Sigma\beta_k = 0$

$(\rho\alpha)_{ij}$ ، $(\rho\beta)_{ik}$، $(\alpha\beta)_{jk}$ و $(\rho\alpha\beta)_{ijk}$ ثوابت خاضعة لقيود أن المجموع فوق أي دليل يساوي الصفر.

ε_{ijkm} مستقلة و$N(0, \sigma^2)$.

$m = 1,..., d, k =1,..., b, j = 1,..., a, i = 1,...,n$

ويكون تحليل التباين لنموذج القطاع العشوائي المعمم (25.25) هو التحاين ثلاثي العامل المعتاد في الجدول (٢٢-٣)، مع تعديل طفيف في الرموز. و قد استُخدمت حزمة حاسب للحصول على تحليل التباين في الجدول (٢٥-٧) ،ويبين الجدول (٢٥-٨) النتائج. وكما نعلم من الجدول (٢٢-٤) ،فإن جميع الإحصاءات تستخدم MSE في المقام. وهذه الاحصاءات F^* مبينة في الجدول (٢٥-٨). ومن أجل $\alpha = .01$ ، نحتاج إلى $F(.99;1,8) = 11.3$ لكل من تلك الاختبارات. ويتضح من نتائج الجدول (٢٥-٨) (انظر القيم P- المعطاة هناك، أيضا) أن القطاعات لاتتفاعل مع المعالجات العاملية وأنه من بين العاملين، يؤثر الحافز، فقط، على الوقت المطلوب لاستكمال المهمة. وعند هذه النقطة يصبح المزيد من التحليل لتأثيرات الحافز مطلوبا.

جدول (٢٥-٨) تحليل التباين لمثال استكمال مهمة المعطى في جدول (٢٥-٧)
$(d = 2, b = 2, a = 2, n = 2)$

جدول (٢٥-٨) تحليل التباين لمثال استكمال مهمة المعطى في جدول (٢٥-٧) $(d = 2, b = 2, a = 2, n = 2)$

مصدر التغير	SS	df	MS	F*	P-value
قطاعات (الجنس)	$SSBL = 25.00$	$n - 1 = 1$	$MSBL = 25.00$	4.00	.08
عامل A (الحافز)	$SSA = 121.00$	$a - 1 = 1$	$MSA = 121.00$	19.36	.002
عامل B (اللهو)	$SSB = 1.00$	$b - 1 = 1$	$MSB = 1.00$	.16	.70
التفاعلات $BL.A$	$SSBL.A = 4.00$	$(n-1)(a-1) = 1$	$MSBL.A = 4.00$	.64	.45
التفاعلات $BL.B$	$SSBL.B = 16.00$	$(n-1)(b-1) = 1$	$MSBL.B = 16.00$	2.56	.15
التفاعلات AB	$SSAB = 4.00$	$(a-1)(b-1) = 1$	$MSAB = 4.00$	.64	.45
التفاعلات $BL.AB$	$SSBL.AB = 1.00$	$(n-1)(a-1)(b-1) = 1$	$MSBL.AB = 1.00$	.16	.70
الخطأ	$SSE = 50.00$	$(d-1)nab = 8$	$MSE = 6.25$		
المجموع	$SSTO = 222.00$	$dnab - 1 = 15$ $F(.99;1,8) = 11.3$			

(٢٥-٦) استخدام أكثر من متغير تجميع في قطاعات

أحيانا ، لايمكن الحصول على انخفاض كبير في تشتت الخطأ التجريبي إلا باستخدام أكثر من متغير واحد لتحديد القطاعات. وعلى سبيل المثال، قد تدعو الحاجة لاستخدام كل من العمر والجنس لتصميم قطاعات.

القطاع	خصائص الوحدات التجريبية
2	عمر 29 - 20 ذكر
2	عمر 29 - 20 أنثى
3	عمر 39 - 30 ذكر
الخ	الخ

وكمثال آخر، قد يكون كل من الملاحظ ويوم تطبيق المعالجة مفيد كمتغيرات للتجميع في قطاعات:

قطاع	خصائص الوحدات التجريبية			
1	مشاهد	1	يوم	1
2	مشاهد	2	يوم	1
3	مشاهد	1	يوم	2
الخ	الخ			

وما لم نرغب في دراسة التأثيرات المنفصلة لكل من متغيرات التجميع في قطاعات، لا تظهر أية مشاكل جديدة عندما نعرف القطاعات بمتغيرين أو أكثر، ونعامل القطاعات ببساطة كقطاعات عادية، ونحسب مجموع مربعات القطاع كالمعتاد.

وإذا كنا نريد فصل تأثير كل من متغيرات التجميع في قطاعات، وكانت القطاعات معرفة بطريقة عاملية تماما (مثلا استُخدمت تسعة قطاعات عندما تمَّ توظيف ثلاثة ملاحظين وثلاثة أيام للتجميع في قطاعات) فيتعامل التحليل ببساطة مع كل من متغيرات التجميع على أنه عامل ويستخدم الطرق المقدمة في الفصل ٢٢.

وإحدى المشاكل التي تظهر عند استخدام اثنين أو أكثر من متغيرات التجميع في قطاعات هو مايتطلبه ذلك من عدد كبير من القطاعات. افترض القيام بتجربة، حيث الوحدات التجريبية محلات. ولتخفيض تشتت الخطأ التجريبي إلى مستوى معقول، فقد

يكون من المرغوب تجميع المحلات في ستة صفوف وفقا لحجم المبيعات وستة صفوف وفقا للموقع (مركزبيع في ضاحية، في ضاحية أخرى، الخ) مما ينتج ستة وثلاثون قطاعا من تركيب متغيري التجميع هذين. وإذا كان المطلوب دراسة ست معالجات، فسنحتاج إلى 216 محلا لهذه التجربة. وفي الغالب يكون استخدام مثل هذا العدد من المحلات مكلفا جدا . وتسمح تصاميم المربع اللاتيني، التي نناقشها في الفصل ٢٩. باستخدام عدد أقل بكثير من التكرارات في هذا النوع من الدراسة. بينما تظل محتفظة بفوائد تخفيض تباين الخطأ كاملة، وذلك من خلال استخدام متغيري التجميع كليهما وبستة فصول لكل منهما.

مراجع ورد ذكرها

[25.1] Owen, D.B. *Handbook of Statistical Tables*. Reading. Mass.: Addision-Wesley Publishing., 1962.

[25.2] Cochran, W.G., and G. M. Cox. *Experimental Designs*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1957, pp. 110-12.

[25.3] Greenhouse, S.W., and S. Geisser. "On Methods in hte Analysis of Profile Data." *Psychometrika* 24 (1959), pp. 95-112.

[25.4] Huynh, H., and L. Feldt. "Estimation of the Box Correction for Degrees of Freedom from Sample Data in the Randomized Block and Split-Plot Designs "*Journal of Educational Statistics* 1 (1976(), pp. 69-82.

[25.5] Winer, B.j. *Statistical Principles in Experimental Design*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1971.

[25.6] Hocking, R.R. "A Discussion of the Two-way Mixed Model. "*The American Statistician* 27 (1973), pp. 148-52.

مسائل

(٢٥-١) **العلاج المضاد للغثيان** يعاني مرضى السرطان الذين هم تحت العلاج الكيماوي، عادة، من نوبات غثيان غير مسيطر عليها بالعقاقير التقليدية المعتادة للغثيان. ولتقويم التأثير المقارن لعقارين تجريبين من العقاقير المضادة للغثيان، تمَّ تجميع، 36 من مرضى السرطان في مجموعات من ثلاثة على أساس تاريخهم السابق في تعرضهم لنوبات غثيان حادة وتم تخصيصهم عشوائيا لواحدة من المعالجات الثلاثة في دراسة (مضاعفة التعمية) بينما هم تحت العلاج الكيماوي. كانت المعالجة الأولى عقارا تقليديا مضادا للغثيان، بينما كانت المعالجتان 2 و 3 العقاقير التجريبية. وتمَّ تقويم تأثيرات كل عقار من تقارير المرضى، مرمّزة 1 للتحسن و 0 لعدم التحسن وفيما يلي

البيانات:

قطاع i	معالجة (j) 1	2	3
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	1
4	0	0	1
5	0	1	0
6	0	0	0
7	1	0	1
8	0	1	1
9	0	1	1
10	0	0	1
11	1	0	1
12	0	0	1

أ - استخدم اختبار كوكـران لتحديـد مـاإذا كـانت متوسـطات فعاليـات العقاقير الثلاثة تختلف أم لا، استخدم $\alpha = .05$. اكتب البدائـل، قـاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

ب - قم باختبارات ثنائية متعـددة لتصنيـف العقاقـير الثلاثـة وفقـا لمتوسـط الفعالية، استخدم مستوى معنوية عائلي $\alpha = .10$. صف استنتاجاتك.

(٢٥-٢) **قسائم مُنتج**. صممت إحدى وكالات الإعـلان تجربـة لتقويـم فعاليـة أربـع قسائم مجانية مختلفة لأحد المنتجات المنزلية، اشتركت اثنتان وخمسـون أسـرة. وتمّ تجميـع الأسـر في مجموعـات حجمهـا أربـع وفقـا لمستوى الدخـل، وتمّ تخصيصهم عشوائيا لأحد القسائم. و تبين البيانات التالية ماإذا كـانت كـل أسـرة قـد اسـتخدمت القسـيمة لشـراء المنتـج في الشـهر التـالي أم لا (1 : استُخدمت القسيمة، 0 : لم تُستخدم القسيمة).

قطاع i	قسيمة مجانية (j) 1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	0	1	0	1
3	1	1	1	1
4	0	0	0	0
5	0	0	1	1
6	1	0	0	1
7	0	0	1	1
8	0	0	0	0
9	1	1	1	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	1
12	0	0	1	1
13	0	0	1	1

أ - استخدم اختبار كوكران لتحديد ماإذا كان متوسط استخدام القسيمة مختلفا بين القسائم الأربع أم لا، استخدم $\alpha = .05$. اكتب البدائل؟ قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P- للاختبار ؟

ب- قم باختبارات ثنائية متعددة لتصنيف القسائم وفقا لمتوسط استخدامها، استخدم مستوى معنوية عائلي $\alpha = .10$. اكتب استنتاجاتك.

(٢٥-٣) بالعودة إلى مسألتي **تدريب مراجعي الحسابات** (٢٤-٨)، (٢٤-٩)، فقد اقتُرح أنه ينبغي هنا استخدام اختبار فريدمان اللامعلمي.

أ - رتب البيانات ضمن كل قطاع وقم باختبار فريدمان، استخدم $\alpha = .05$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة- ماهي القيمة P- للاختبار ؟ هل تتفق نتيجتك مع ماحصلت عليه في المسألة (٢٤-٩)جـ؟.

ب- استخدم اسلوب الاختبار الثنائي المتعدد (٢٥-٥) لتصنيف طرق التدريب الثلاث وفقا لمتوسط المهارة، استخدم مستوى معنوية عائلي $\alpha = .10$. لخص استنتاجاتك.

(٢٥-٤) بالإشارة إلى مسألة **ألم الأسنان** (٢٤-١٢) تجاهل البنية العاملية للمعالجات. كان أحد المستشارين قلقا حول مصداقية فروض النموذج واقترح تحليل الدراسة بواسطة اختبار فريدمان.

أ - رتب البيانات داخل كل قطاع وقم باختبار فريدمان، استخدم $\alpha = .025$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة- ما هي القيمة P- للاختبار ؟

ب- استخدم طريقة الاختبارات الثنائية المتعددة (٢٥-٥) لتصنيف المعالجات الأربع وفقا لمتوسط إسعاف الألم، استخدم مستوى معنوية عائلي $\alpha = .05$ اكتب استنتاجاتك.

(٢٥-٥) بالإشارة إلى مسألة **تدريب مراجعي الحسابات** (٢٤-٨) افترض أن المشاهدة $Y_{23} = 89$ مفقودة بسبب مرض المراجع وانسحابه من الدراسة.

أ – اكتب نموذج تحاين لهذه الحالة. اكتب، أيضا، نموذج الانحدار المكافىء، استخدم 1 ,1 - ,0 كمتغيرات مؤشرة.

ب– اكتب نموذج الانحدار المخفض لاختبار الفروق في متوسط درجات المهارة لطرق التدريب الثلاث.

جـ – اختبر ما إذا كانت متوسطات درجات المهارة لطرق التدريب الثلاث مختلفة أم لا و ذلك بتوفيق النموذجين التام والمخفّض، استخدم $\alpha = .05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

د – قارن متوسطي درجتي المهارة لطريقتي التدريب 2 و 3 باستخدام اسلوب الانحدار، استخدم 95% فترة ثقة.

(٢٥–٦) بالإشارة إلى **مسألة الدهن في الحمية الغذائية** (٢٤–١٠)، افترض أن المشاهدتين $Y_{31} = .15$ و $Y_{51} = 1.62$ مفقودتان بسبب عدم متابعة الأشخاص المعنيين للحمية الموصوفة.

أ– اكتب نموذج تحاين لهذه الحالة. أكتب نموذج الانحدار المكافىء واستخدم 1 ,1 - ,0 كمتغيرات مؤشرة.

ب – اكتب نموذج الانحدار المخفض لاختبار الفروق في متوسط الخفض في مستوى الدهن للحميات الثلاث.

جـ – اختبر ماإذا كان متوسط الخفض في مستوى الدهن للحميات الثلاث مختلفا أم لا بتوفيق النموذجين التام والمخفض، استخدم $\alpha = .05$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

د – قارن متوسط الخفض في مستوى الدهن للحميتين 1 و 3 باستخدام أسلوب الانحدار واستخدم 98% فترة ثقة.

(٢٥–٧) **اهتراء دهان الطرق.** درس قسم الطرق السريعة في إحدى الولايات مميزات الاهتراء لخمسة دهانات مختلفة من ثمانية مواقع من الولاية اشتملت الدراسة على الدهان القياسي، المستخدم حاليا، (دهان1) وأربعة دهانات تجريبية

(دهانات 5, 4, 3, 2) وقد تم اختبار المواقع الثمانية عشوائيا ، مما يعكس التشتت في كثافة المرور عبر الولاية. وفي كل موقع، تمّ استخدام ترتيب عشوائي للدهانات لسطح الطريق المختار. وبعد فترة مناسبة من التعرّض لآثار الطقس والمرور، تمّ الحصول على مقياس مركب للاهتراء معتبرين كلا من التحمل والرؤية. وفيما يلي بيانات التحمل (الدرجة الأعلى تقابل الصفة الأفضل للتحمل).

قطاع i	الدهان (j) 1	2	3	4	5
1	11	13	10	18	15
2	20	28	15	30	18
3	8	10	8	16	12
4	20	35	27	41	28
5	14	16	13	22	16
6	25	27	26	33	25
7	43	46	41	55	42
8	13	14	12	20	13

أ - أوجد الرواسب لنموذج القطاع العشوائي التجميعي (25.12) وارسمها بيانيا في مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضا، برسم احتمال طبيعي للرواسب. لخص استنتاجاتك حول صلاحية النموذج (25.12).

ب - ارسم بيانيا الاستجابات في مقابل الموقع كما في الشكل (٢٤-١). ماذا يقترح هذا الرسم حول صلاحية افتراض اللاتفاعل هنا؟

جـ - قم باختبار توكي لتجميعية تأثيرات الموقع والمعالجة مشروطة على المواقع المختارة، استخدم $\alpha = .005$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

(٢٥-٨) بالإشارة إلى مسألة **اهتراء دهان الطرق** (٢٥-٧)، افترض أن نموذج القطاع العشوائي التجميعي (25.12) ملائم.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب- اختبر ما إذا كان متوسط التحمل يختلف للدهانات الخمسة، استخدم مستوى معنوية $\alpha = .05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار؟

جـ- قارن متوسط التحمل لكل دهان تجريبي في مقابل الدهان القياسي، استخدم طريقة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة بمعامل ثقة عائلي 90%. لخص استنتاجاتك.

د - كانت الدهانات 5, 3, 1 بيضاء اللون بينما الدهانات 2 و 4 صفراء. قدّر الفرق بين متوسطي التحمل لمجموعتي الدهان بفترة ثقة 95%. فسّر استنتاجاتك.

(٢٥-٩) **نسيج العضلة.** درس أحد علماء وظائف الأعضاء تأثيرات ثلاثة كواشف على نسيج العضلة في الكلاب. تمّ اختيار عشر حظائر في كل منها ثلاثة كلاب عشوائيا وتمّ تخصيص الكواشف الثلاثة عشوائيا على الكلاب الثلاثة في كل حظيرة، وفيما يلي بيانات تأثير الكواشف (القيمة الأعلى تقابل مستوى النشاط الأعلى)

حظيرة i	كاشف (j) 1	2	3	حظيرة i	كاشف (j) 1	2	3
1	10	15	14	6	7	9	10
2	8	12	13	7	24	30	27
3	21	27	25	8	16	18	20
4	14	17	17	9	23	29	32
5	12	18	16	10	18	22	21

أ ــ أوجد الرواسب لنموذج القطاع العشوائي التجميعي (25.12) ثم ارسمها بيانيا في مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. لخص استنتاجاتك.

ب- ارسم الاستجابات في مقابل الحظائر كما في الشكل (٢٤-١). ماذا يقترح هذا الرسم حول صلاحية فرض اللاتفاعل هنا ؟

جـ - قم باختبار توكي لتجميعية تأثيرات الحظائر ولكواشف مشروطة على الحظائر المختارة، استخدم 025. = α. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

د - بناء على نتائج الجزئين (ب) و(جـ)، هل يبدو نموذج القطاع العشوائي مع تفاعل (25.20) أكثر ملاءمة هنا؟ ماهي الفروق العملية في استخدام النموذج (25.12) والنموذج (25.20)؟

(٢٥-١٠) بالإشارة إلى مسألة **نسيج العضلة** (٢٥-٩). افترض إمكانية تطبيق نموذج القطاع العشوائي التجميعي (25.12).

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب- اختبر ماإذا كان متوسط مستوى النشاط مختلفا للكواشف الثلاثة أم لا، استخدم مستوى معنوية $\alpha = .025$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة -P للاختبار ؟

جـ- نتوقع أن يتشابه الكاشفان 2 و 3 ولكنهما يختلفان عن الكاشف 1. استخدم طريقة المقارنات المتعددة الأكثر كفاءة بمعامل ثقة عائلي 95% لتقدير:

$$D_1 = \mu_2 - \mu_3$$
$$L_1 = \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} - \mu_1$$

ولخص نتائجك.

د - اختبر ما إذا كان σ_ρ^2 يساوي الصفر، استخدم $\alpha = .025$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

(٢٥-١١) سأل أحد علماء الاجتماع، بعد معرفته لتصاميم القطاع العشوائي المعممة. لماذا يستخدم أي باحث تصميم قطاع عشوائي تام، يتطلب افتراض عدم تفاعل القطاع والمعالجة في الوقت الذي يمكن فيه تجنب ذلك الفرض في تصميم قطاع عشوائي معمم؟ علّق.

(٢٥-١٢) بالإشارة إلى مثال استكمال مهمة في صفحة...

أ - تحقق من تحليل التباين في الجدول (٢٥-٨)، مستخدما بيانات الجدول (٢٥-٧).

ب- قدّر الفرق في متوسطات التأثيرات لمستويي الحافزين مستخدما 99% فترة ثقة.

(٢٥-١٣) بالإشارة إلى مسألة **تدريب مراجعي الحسابات** (٢٤-٨)، أعادت شركة المحاسبة التجربة مع مجموعة أخرى من 30 مراجعا، ولكن تمَّ تجميعهم هذه المرة في خمسة قطاعات، في كل منها ستة مراجعين. وفي كل قطاع، تمّ تخصيص كل معالجة عشوائيا لاثنين من المراجعين، وكانت النتائج كما يلي:

قطاع i	طريقة تدريب (j)			قطاع i	طريقة تدريب (j)		
	1	2	3		1	2	3
1	74	84	91	4	65	73	84
	71	78	95		70	78	87
2	73	75	93	5	64	71	81
	69	83	98		61	74	74
3	75	81	89				
	67	74	86				

افترض أن نموذج القطاع العشوائي المعمم (25.25)، معدلا من أجل دراسة وحيدة العامل هو نموذج ملائم.

أ – اكتب نموذج قطاع عشوائي معمم لهذا التطبيق.

ب– اكتب جدول تحليل التباين.

جـ– اختبر ماإذا كانت درجات متوسط المهارة لطرق التدريب الثلاث مختلفة أم لا، استخدم $\alpha = .01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة P– للاختبار ؟

د – قم بجميع المقارنات الثنائية بين طرق التدريب الثلاث، استخدم أسلوب توكي بمعامل ثقة عائلي 95%. لخص استنتاجاتك.

هـ– أوجد الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. قم، أيضا، برسم احتمال طبيعي للرواسب. لخص استنتاجاتك.

و – اختبر ماإذا كانت القطاعات تتفاعل مع المعالجات أم لا، استخدم $\alpha = .01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ما هي القيمة P– للاختبار ؟

تمارين

(٢٥-١٤) استنبط (25.2a) من (25.2).

(٢٥-١٥) استنبط (25.4a) من (25.4) عندما لايكون هناك قيم متساوية من المشاهدات.

(٢٥-١٦) اعتبر دراسة تصميم قطاع عشوائي تام فيها $r = 2$, $n = 4$، وينطبق عليها نموذج القطاع العشوائي (24.2) مع مفقودة.

استخدم طرق المصفوفة في الفقرة ٨-٦ للحصول على مقدّر لـ μ_{31}.

(تلميح : اعتبر الدراسة المعطاة في الفقرة (٢١-١).

(٢٥-١٧) بالإشارة إلى مسألة **ألم الأسنان** (٢٤-١٢). افترض أن الأشخاص الذين استُخدموا في الدراسة تمّ اختيارهم من 8 مدن (قطاعات)، وأن المدن تمّ اختيارها من مجتمع من المدن. افترض أن نموذج القطاع العشوائي التجميعي (25.12) قابل للتطبيق،باستثناء أننا نحتاج لأخذ البناء العاملي لتأثيرات المعالجات المثبتة في الاعتبار.

أ - اكتب نموذج قطاع عشوائي لهذه الحالة.

ب - ما هي إحصاءة الاختبار الملائمة لاختبار ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا؟ ماهي إحصاءة الاختبار المناسبة لاختبار التأثيرات الرئيسة؟

(إرشاد: اعتبر اختبار تأثيرات المعالجات للنموذج (25.12).

(٢٥-١٨) استنبط (25.14).

مشاريع

(٢٥-١٩) بالإشارة إلى مسألة **اهتراء دهان الطريق** (٢٥-٧).

أ - قدّر مصفوفة التباين - التغاير لمشاهدات المعالجات في قطاع.

استخدم (28.8) للحصول على عناصر المصفوفة.

ب- هل تبدو خاصية التناظر المركب (25.17) مناسبة هنا ؟ اشرح.

جـ- هل تبدو خاصية الدائرية (25.19) مناسبة هنا ؟ اشرح.

(٢٥-٢٠) بالإشارة إلى مسألة **نسيج العضلة** (٢٥-٩).

أ - قدّر مصفوفة التباين - التغاير لمشاهدات المعالجات في قطاع.

استخدم (28.8) للحصول على عناصر المصفوفة.

ب- هل تبدو خاصية التناظر المركب (25.17) مناسبة هنا ؟ اشرح.

جـ- هل تبدو خاصية الدائرية (25.19) مناسبة هنا ؟ اشرح.

التصاميم الحاضنة والمعاينة الجزئية

نتابع في هذا الفصل العناصر الأساسية للتصاميم الحاضنة ويشمل ذلك استخدام المعاينة الجزئية. وسنبدأ هذا الفصل بدراسة المفهوم العام للتصاميم الحاضنة ونصف كيفية اختلاف هذه التصاميم عن التصاميم المتصالبة- وسنتعرض بالتفصيل للتصاميم الحاضنة ثنائية العامل ولتحليلها. ونختتم الفصل بدراسة تصاميم المعاينة الجزئية.

(٢٦-١) التمييز بين العوامل المتحاضنة والمتصالبة

في الدراسات العاملية التي قُدمت حتى الآن، حيث يظهر كل مستوى لعامل واحد مع كل مستوى من مستويات كل عامل آخر، تسمى هذه العوامل متصالبة، وتظهر حالة أخرى عندما تكون العوامل متحاضنة، وسنوضح الآن التمييز بين العوامل المتحاضنة والعوامل المتصالبة ببعض الأمثلة التي تتضمن دراسات ثنائية العامل.

مثال (١)

تدير شركة صناعية كبرى ثلاث مدارس تدريبية إقليمية للميكانيكا، واحدة في كل منطقة من مناطق نشاطها. في كل مدرسة اثنان من المدربين يدرّس كل منهم فصلا من 15 دارسا (ميكانيكيا) في دورة مدتها ثلاثة أسابيع. واهتمت الشركة بتأثير كل من المدرسة (عامل A) والمدرب (عامل B) على التحصيل الدراسي. ولدراسة تلك التأثيرات، شُكّلت الفصول في كل منطقة بالطريقة العادية وتمَّ تخصيصها عشوائيا لأحد المدربين في المدرسة. وقد جرى ذلك لدورتين وفي نهاية كل دورة تمَّ الحصول على مقياس مناسب للتحصيل الدراسي لكل فصل. ويوضح الجدول (٢٦-١)

النتائج.

ويبدو مخطط الجدول (٢٦-١) مطابقا لدراسة عادية ثنائية العامل بمشاهدتين في كل خلية (انظر على سبيل المثال الجدول (١٨-٧). والدراسة في الحقيقة ليست دراسة ثنائية العامل بالمعنى المعتاد.

جدول (٢٦-١) بيانات عينة لدراسة حاضنة ثنائية العامل. - مثال مدرسة التدريب (درجات التحصيل الدراسي للفصل مرمّزة)

العامل i (المدرسة)		العامل ب (المتدربون) j 1	2	المجموع
اتلانتا		25	14	
		29	11	
	المجموع	$Y_{11.} = 54$	$Y_{12.} = 25$	$Y_{1..} = 79$
شيكاغو		11	22	
		6	18	
	المجموع	$Y_{21.} = 17$	$Y_{22.} = 40$	$Y_{2..} = 57$
سان فرانسيسكو		17	5	
		20	2	
	المجموع	$Y_{21.}$	$Y_{32.} = 7$	$Y_{3..} = 44$
			المجموع	$Y_{...} = 180$

والسبب في ذلك أن المدربين في مدرسة أتلانتا لم يدرّسوا، أيضا، في المدرستين الأخريين وبالمثل بالنسبة لباقي المدربين ولهذا شملت الدراسة ستة مدربين. وكانت دراسة عادية ثنائية العامل بستة مدربين مختلفين ستتألف من 18 معالجة كما هو مبيّن في الجدول (٢٦-٢)أ، إلا أنه في مثال مدرسة التدريب شملت الدراسة ستة عوامل، فقط، كما يظهر في الجدول (٢٦-٢)ب، حيث تمثل الخلايا الملغاة، معالجات غير

مدروسة. ويحتوي الشكل (٢٦-١) على رسم توضيحي للتصميم الحاضن في مثال مدرسة التدريب شاملا تكرارين اثنين للدراسة.

ويبدو واضحا من الجدول (٢٦-٢)ب أن تصميم التجربة لمثال مدرسة التدريب يتضمن ترتيبا عامليا غير كامل من نوع خاص، حيث يظهر كل مستوى من العامل B (المدرب) مع مستوى واحد، فقط، من مستويات العامل A (المدرسة). وعلى وجه التحديد، يدرّس كل مدرب هنا في مدرسة واحدة، فقط. ويقال لذلك إن العامل B محضّن ضمن العامل A. وكما ذكر سابقا ففي دراسة عاملية عادية، حيث يظهر كل مستوى من العامل A مع كل مستوى من العامل B يُقال إن A وB متصالبان.

وهناك طريقة أخرى للنظر في التمييز بين التصاميم الحاضنة والمتصالبة، فلنرمز بالرمز، μ_{ij} مثلا ، لمتوسط الاستجابة عندما يكون العامل A عند المستوىi والعامل B عند المستوى j. إذا كانت العوامل متصالبة يبقى المستوى j للعامل B نفسه لكل مستويات العامل A. وفي المقابل، إذا كان العامل B محضنا ضمن العامل A، فليس هناك ماهو مشترك بين المستوى j للعامل B،مع كون العامل A عند المستوى 1 وبين المستوى j للعامل B مع كونه العامل A عند المستوى 2، وهلم جرا. وفي دراسة عاملية متصالبة لتأثيرات السعر ($1.99 - $2.49) ومستوى الدعاية(عالي- متخصص). ـ على سبيل المثال ـ فإن مستوى دعاية معين يكون هو نفسه بغض النظر عن السعر الذي يظهر معه، وبالمثل بالنسبة لمستويات السعر. وعلى الوجه الآخر نرى في التصميم الحاضن في مثال مدرسة التدريب أن المدرب الأول في المدرسة ١ليس هو نفسه المدرب الأول في المدرسة ٢، وهكذا.

جدول (٢٦-٢) توضيح للعوامل المتصالبة والمتحاضنة ـ مثال مدرسة التدريب

(أ) العوامل المتصالبة

	المدّرب العامل (ب)					
المدرسة (العامل أ)	1	2	3	4	5	6
أتلانتا						
شيكاغو						
سان فرانسيسكو						

(ب)العوامل المتحاضنة

	المدّرب العامل (ب)					
المدرسة (العامل أ)	1	2	3	4	5	6
أتلانتا			X	X	X	X
شيكاغو	X	X			X	X
سان فرانسيسكو	X	X	X	X		

مثال (٢)

اهتم أحد المحللين بتأثيرات المنطقــة (عــامل *A*) والقســم (عــامل *B*) علـى انتشــار المعلومات حول مُنتَج جديد. وقد تمَّ الحصول على المعلومات من عينــات مـن أسـر في أقسام مختلفة داخل مناطق مختارة. وحيث أن القسم المسمى 1 في منطقة ما يختلف عـن القسم المسمى 1 في منــاطق أخـرى، وكذلـك الأمـر بالنسبة للأقسـام الأخـرى، فـإن الأقسام تكون هنا محضنة داخل المناطق.

شكل (٢٦-١) تمثيل بياني لتصميم حاضن ثنائي العامل ـ مثال مدرسة التدريب

المدرسة (*i*): 1 (j = 1)، 2 (j = 2)، 3 (j = 3)

متدربون (j): 1 (j = 1)، 2 (j = 2)، 3 (j = 1)، 4 (j = 2)، 5 (j = 3)، 6 (j = 2)

الصف (*k*): 1 (k = 1)، 2 (k = 2)، 3 (k = 1)، 4 (k = 2)، 5 (k = 1)، 6 (k = 2)، 7 (k = 1)، 8 (k = 2)، 9 (k = 1)، 10 (k = 2)، 11 (k = 1)، 12 (k = 2)

تعليقات

١- يكون التمييز بين التصاميم الحاضنة والمتصالبة في الغالب دقيقا ، ففي المثال، ٢ إذا مُثّلت أقسام كل منطقة بمستويات متوسط دخــل محــددة وبحيــث يكـون الدخـل المتوسط للقسم الأول في كل منطقة $9000 - $5000 مثلا والدخـل المتوسـط للقسـم الثاني $19.999 - $10.000 وهكذا لبقية الأقسـام. فيمكـن النظـر للتصميـم علـى أنـه متصالب. وتكون العوامل هي المنطقــة، والمستوى الاقتصـادي للقسـم، وهـي عوامـل متصالبة باعتبار أن مستوى اقتصاديـا معينـا يبقـى نفسـه في جميـع المنـاطق والعكـس

. بالعكس.

٢- تظهر العوامل المتحاضنة في الدراسات التي تعتمد على المشاهدة حيث لاحيلة للباحث في واقع العوامل قيد الدراسة، أو في تجارب يمكن للباحث فيها أن يتدبّر، فقط، بعض العوامل. وكما نذكر، فإن العوامل التي لا حيلة لنا فيها تسمى عوامل تصنيف، تمييزا لها عن عوامل تجريبية يمكن تخصيصها للوحدات التجريبية كما نريد. ويشكل المثال ٢ دراسة تعتمد على المشاهدة حيث كل من المنطقة والقسم هي عوامل تصنيف لأن الأسر (وحدات الدراسة) لم تُخصص عشوائيا لأي من المنطقة أو القسم. وتشكل المدرسة في المثال 1 عامل تصنيف لأن فصول المدرسة (وهي الوحدات التجريبية) قد تم تشكيلها من ميكانيكيين من المنطقة التي تقع فيها المدرسة. والمدربون في هذا المثال هم عامل تجريبي باعتبارهم خُصّصوا عشوائيا لفصل ما، ولكن الناتج كان تصميما حاضنا لأن التعشية اقتصرت على الفصول داخل مدرسة واحدة.

(٢٦-٢) تصاميم حاضنة ثنائية العامل

سنعتبر الآن تصاميم حاضنة تتضمن عاملين حيث يحتضن أحدهما الآخر، وحرصا على الاتساق، سنعتبر دائما الحالة التي يحتضن فيها العامل A العامل B. وسنفترض بداية أن تأثيري العاملين كليهما مثبت، ولكننا سنعتبر فيما بعد، أيضا، حالة تأثيرات عشوائية. وسنفترض عبر المناقشة بكاملها أن جميع متوسطات المعالجات متساوية الأهمية.

تطوير عناصر نموذج

سنستخدم الرموز المعتادة لدراسة ثنائية العامل، إفترض أن μ_{ij} ترمز لمتوسط الاستجابة عندما يكون العامل A عند المستوى $(i = 1,\ldots, a)$ ويكون العامل B عند المستوى $(j = 1,\ldots,b)$ وكالعادة، عندما تكون كل متوسطات الاستجابة متساوية الأهمية، نعرف:

$$\mu_{i.} = \frac{\sum_j \mu_{ij}}{b} \tag{26.1}$$

ويمثل $\mu_{i.}$ ، في مثال مدرسة التدريب، متوسط درجة التعليم في مدرسة أتلانتا مـأخوذا فوق المدربين في تلك المدرسة. وتُفسر $\mu_{2.}$ ، $\mu_{3.}$ بصورة مشابهة. لاحـظ مـرة أخـرى أن $\mu_{i.}$ يمثل متوسط درجات التعلم وهو متوسط محسوب فوق المدربين المختلفين.

نعرف كالعادة التأثير الرئيس للمستوى i للعامل A على الشكل:

حيث:

$$\alpha_i = \mu_{i.} - \mu_{..} \qquad (26.2)$$

$$\mu_{..} = \frac{\sum_i \sum_j \mu_{ij}}{ab} = \frac{\sum_i \mu_{i.}}{a} \qquad (26.3)$$

هو المتوسط العام للاستجابة. ويتبع من (26.3) أن:

$$\sum_i \alpha_i = 0$$

وفي التصميم الحاضن لامعنى لاستخدام مركبة نموذج للتأثير الرئيس للمستوى j للعامل B. ولإدراك السبب اعتـبر مـرة أخـرى مثـال مدرسـة التدريـب. فبمـا أن كـل مدرسة تستخدم مدربـين مختلفـين، فـالمدربون j في المـدارس المختلفـة ليسـوا المدربـين أنفسهم. ولايكون هناك معنى لاعتبار التأثير المتوسط للمـدرب فـوق جميـع المـدارس. ونحتاج، بدلا من ذلك، لاعتبار التأثيرات المفردة لكل مدرب في كل مدرسة. ونرمـز لتلك التأثيرات المفردة بالرمز $\beta_{j(i)}$، حيث يشير الدليل $j(i)$ إلى أن المستوى j للعامل B محضن داخل المستوى i للعامل A. ونعرف $\beta_{j(i)}$ كما يلي:

$$\beta_{j(i)} = \mu_{ij} - \mu_{i.} \qquad (26.5)$$

ويمكن إعادة كتابتها باستخدام (26.2) لتصبح:

$$\beta_{j(i)} = \mu_{ij} - \alpha_i - \mu_{..} \qquad (26.5a)$$

ويتبع من (26.5) و(26.1)، أن:

$$i = 1,\ldots,a \quad \sum_j \beta_{j(i)} = 0 \qquad (26.6)$$

ويمكن بوضوح رؤية معنى $\beta_{j(i)}$ من (26.5). وبالإشارة إلى مثال مدرسة التدريب يكون $\beta_{j(i)}$ ببساطة الفرق بين متوسط درجة التعلم للمدرب j من المدرسة i والمتوسـط الإجمالي لمتوسطات درجة التعلم مأخوذا فوق جميع المدربين في تلك المدرسة. وهكـذا يُقاس تأثير المدرب j من المدرسة i بالنسبة إلى المتوسط الإجمالي لدرجـة التعلـم الخـاص

بالمدرسة التي يدرس فيها. وسنسمي $\beta_{j(i)}$ التأثير النوعي للمستوى j للعامل B محضنا ضمن المستوى i للعامل A.

لقد عبرنا الآن عن متوسط الاستجابة μ_{ij} بدلالة المتوسط الإجمالي، والتأثير الرئيس للمستوى i للعامل A، والتأثير النوعي للمستوى j للعامل B محضنا ضمن المستوى i للعامل A، الأمر الذي يمكن رؤيته من (26.5a):

$$\mu_{ij} \equiv \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{j(i)} = \mu_{..} + (\mu_{i.} - \mu_{..}) + (\mu_{ij} - \mu_{i.}) \qquad (26.7)$$

وفي مثال مدرسة التدريب جرى التعبير عن متوسط درجة التعلم للمدرب j في المدرسة i بدلالة المتوسط الإجمالي والتأثير الرئيس للمدرسة i والتأثير النوعي للمدرب j ضمن المدرسة i.

ولاستكمال النموذج نحتاج، فقط، إلى إضافة حد خطأ عشوائي. وسنرمز لهذا الحد بالرمز $\varepsilon_{k(ij)}$ حيث يمثل الدليل الأول التكرار k ويحدد تركيبة العوامل في التكرار k. وسنستخدم الآن الدليل (i, j) إذ يمكن النظر إلى التكرارات الخاصة بأي مركب من العوامل $k(ij)$، على أنها محضنة ضمن ذلك المركب (i, j). وفي مثالنا عن مدرسة التدريب، كانت التكرارات هي الفصول المختلفة من الميكانيكيين الذين تم تدريبهم بواسطة المدرب نفسه في مدرسة معينة ـ وبما أن الفصل الأول للمدرب j من المدرسة i يختلف عن الفصل الأول لأي مركب مدرسة ــ مدرّب، وكذلك الأمر بالنسبة للفصل الثاني، فيمكن اعتبار الفصول محضنة ضمن تراكيب المدرسة ــ المدرب. ويوضح الشكل (٢٦-١) هذا التحضين.

لم نشر حتى الآن لتحضين التكرارات ضمن تراكيب العوامل لأنه لم يكن ضروريا . ومع ذلك، وفي ظل الاعتبارات الراهنة للعوامل المحضنة، سيكون مفيدا التعرف على تحضين متغير التكرارات ضمن تراكيب العوامل.

نموذج تصميم حاضن

لنرمز بالرمز Y_{ijk} للمشاهدة k عندما يكون العامل A عند المستوى i والعامل B عند المستوى j. وسنفترض أن هناك n تكرارا لكل تركيب من العوامل، أي k

$k=1,\dots,n$ و $i=1,\dots,a$ و $j=1,\dots,b$. وعندما تكون تأثيرات العاملين A ، B مثبتة، يكون نموذج التصميم الحاضن المناسب:

$$Y_{ijk}=\mu_{..}+\alpha_i+\beta_{j(i)}+\varepsilon_{k(ij)} \qquad (26.8)$$

حيث:

$\mu_{..}$ مقدار ثابت

α_i مقادير ثابتة خاضعة للقيد $\sum \alpha_i=0$

$\beta_{j(i)}$ مقادير ثابتة خاضعة للقيد $\sum_j \beta_{j(i)}=0$ من أجل كل i .

$\varepsilon_{k(ij)}$ متغيرات مستقلة و $N(0,\sigma^2)$

$i=1,\dots,a;\ j=1,\dots,b;\ k=1,\dots,n$

وتكون القيمة المتوقعة والتباين للمشاهدات Y_{ijk} في نموذج التصميم الحاضن:

$$E\{Y_{ijk}\}=\mu_{..}+\alpha_i+\beta_{j(i)} \qquad (26.8a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\}=\sigma^2 \qquad (26.8b)$$

وهكذا يكون لجميع المشاهدات تباين ثابت. وفضلا عن ذلك، ففي هذا النموذج تكون المشاهدات Y_{ijk} مستقلة وتتوزع توزيعا طبيعيا .

تعليقات

١– ليس ضروريا مانراه في (26.8) من تساوي عدد التكرارات لجميع تراكيب العوامل، ولا بقاء عدد مستويات العامل المحضن B (عدد المدربين في مثال مدرسة التدريب) نفسه لكل مستوى من العامل A (المدرسة في هذا المثال). وسنناقش فيما بعد إزالة بعض هذه القيود. ونكتفي الآن بالإشارة، فقط، إلى أن الحسابات تصبح أكثر تعقيدا عند التخلص من تلك القيود.

٢– لايوجد حد تفاعل في نموذج التصميم الحاضن (26.8)، وليس هناك حاجة له، ذلك لأن العامل B محضن ضمن العامل A وليس متصالبا معه، وللتعبير عن ذلك بصورة مختلفة إلى حد ما نقول إنه بالنسبة لمدرسة التدريب لايمكن تقدير تفاعل بين المدرب والمدرسة في الوقت الذي يدرس فيه كل مدرب في مدرسة واحدة، فقط. ويستوعب تأثير المدرب $\beta_{j(i)}$ ، حيث انه محدد لمدرسة معطاة i، تأثير التفاعل بين ذلك المدرب j بالذات (فى المدرسة i) والمدرسة i، ولكن لايمكن فصل تأثير التفاعل هذا

في تصميم حاضن.

٣- بصفة عامة لاتكون متوسـطات مستويات العوامـل $\mu_{i.}$ في تصميـم حـاضن نفسها كالمتوسطات المقابلة في تصميم متصالب. ونذكر أنه في تصميم حاضن تُحسب المتوسـطات $\mu_{i.}$ بـأخذ المتوسـط فـوق بعـض المستويات المـميزة للعـامل B ، فقـط. وبالإشارة إلى مثال مدرسة التدريـب، حصلنـا علـى $\mu_{i.}$ بـأخذ المتوسـط فـوق أولئـك المدربين الذين يدربون في المدرسة i ، فقط. وفي المقـابل، نحصـل علـى المتوسـط $\mu_{i.}$ في تصميم متصالب، بأخذ المتوسط فوق جميع المدربين الذين شملتهم الدراسة.

تأثيرات العامل العشوائي

إذا كان لكل من A و B مستويات عامل عشوائية نعدّل نموذج التصميم الحاضن (26.8) بحيث تصبح α_i ,$\beta_{j(i)}$ و $\varepsilon_{k(ij)}$ متغيرات عشـوائية مسـتقلة تتبـع التوزيـع الطبيعـي بتوقعات 0 وتباينات σ_a^2 ، σ_b^2 و σ^2 على الترتيب. وهكذا يُفترض أن جميع $\beta_{j(i)}$ لهـا التباين نفسه σ_β^2 ويتم افتراض أن جميع $\beta_{j(i)}$ لها التباين نفسه، أيضا، إذا كان العـامل B ،فقط، عشوائيا . ومن المهم التحقق مما إذا كان هذا الافتراض مناسبا ، فمن الممكن جدا أن تكون متوسطات الاستجابة μ_{i1}،μ_{i2}، ... في أحد مستويات العامل A (نبات - مدرسة - مدينة - الخ) مختلفة في تشتتها عما هو في المستويات الأخرى للعـامل A (نباتات أخرى، مدارس ومدن...، الخ). وقـد نوقشـت اختبـارات تسـاوي التبـاين في الفقرة ١٦-٢.

(٢٦-٣) تحليل التباين لتصاميم حاضنة ثنائية العامل

توفيق نموذج. يتم الحصول على تقديرات المربعات الصغرى للمعالم في نموذج التصميم الحاضن (26.8) بالطريقة العادية. وتكـون تقديـرات المربعـات الصغـرى، مسـتخدمين رموزنا المعتادة لبيانات العينة في دراسات عاملية، كما يلي:

المقدّر	المعلمة	
$\hat{u}_{..} = \bar{Y}_{...}$	$\mu_{..}$	(26.9a)
$\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$	α_i	(26.9b)
$\hat{\beta}_{j(i)} = \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...}$	$\beta_{j(i)}$	(26.9c)

وتكون القيم المتوقعة:

$$\hat{Y}_{ijk} = \bar{Y}_{...} + (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..}) = \bar{Y}_{ij.} \qquad (26.10)$$

وتكون الرواسب:

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.} \qquad (26.11)$$

مجاميع المربعات

نحصل على تحليل التباين لنموذج التصميم الحاضن (26.8) بتفكيك الانحراف الكلي كما يلي:

$$\underbrace{Y_{ijk} - \bar{Y}_{...}}_{\text{الانحراف الكلي}} = \underbrace{\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}}_{\text{التأثير الرئيس}} + \underbrace{\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..}}_{\text{التأثير النوعي لـ } B \text{ عندما يكون } A \text{ عند المستوى } i} + \underbrace{Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.}}_{\text{الراسب}} \qquad (26.12)$$

وعند تربيع (26.12) والجمع فوق جميع المشاهدات، تسقط جميع الحدود الجدائية ونحصل على:

$$SSTO = SSA + SSB(A) + SSE$$

حيث:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...}) \qquad (26.13a)$$

$$SSA = bn \sum_i (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 \qquad (26.13b)$$

$$SSB(A) = n \sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..})^2 \qquad (26.13c)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2 = \sum_i \sum_j \sum_k e_{ijk}^2 \qquad (26.13d)$$

ويكون $SSTO$ مجموع المربعات الكلي المعتاد، SSA مجموع مربعات العامل A المعتاد وهو يعكس تشتت متوسطات مستويات العامل المقدرة $\bar{Y}_{i..}$.

ويكون $SSB(A)$ مجموع مربعات العامل B، وتعكس الرموز حقيقة أن العامل B محضّن ضمن العامل A. ويتكوّن $SSB(A)$ من حدود مثل:

$$n \sum_j (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..})^2 \qquad (26.14)$$

وهي ببساطة مجموع مربعات العامل B المعتاد، عندما يكون العامل A عند المستوى i، وتُجمع تلك الحدود عندئذ فوق جميع مستويات العامل A.

وأخيرا ، فإن مجموع مربعات الخطأ SSE هو، كالعادة، مجموع مربعات الرواسب، وهو يعكس تشتت كل مشاهدة Y_{ijk} حول متوسط المعالجة المقدَّر المقابل لها $\overline{Y}_{ij.}$. وبصورة بديلة يمكن النظر إلى SSE على أنه مكوَّن من حدود مثل:

$$\sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2 \qquad (26.15)$$

وهي ببساطة مجموع مربعات الخطأ العادية ضمن المستوى i للعامل A، ثم تُجمع هذه الحدود فوق جميع مستويات العامل A.

وهكذا يمكن النظر الى تصميم حاضن ذي عاملين على أنه سلسلة من دراسات وحيدة العامل عند المستويات المتتابعة للعامل الآخر. ووفقا لمثال مدرسة التدريب، تؤدي دراسة تأثيرات المدربين (B) داخل أي مدرسة معطاة (A_i) إلى مجاميع المربعات المعتادة للمدربين وإلى أخطاء، وذلك في تحليل تباين أحادي العامل ضمن المدرسة (A_i)، ونرمز لها بـ $SSB(A_i)$ و $SSE(A_i)$.

$$SSB(A_i) = n\sum_j (\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..})^2 \qquad SSE(A_i) = \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2$$

وتجميع هذه المقادير يُنتج $SSB(A)$ و SSE على الترتيب. ويكون مجموع مربعات مابين المدارس SSA ، فقط، هو الذي يُفصح عن العامل الآخر. ويوضح الجدول (٢٦-٣) هذه العلاقة بين تحليل التباين أحادي العامل لكل مدرسة وتحليل التباين ثنائي العامل للتصميم الحاضن.

صيغ حسابية. يمكن استخدام الصيغ الآتية للحساب اليدوي:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abn} \qquad (26.16a)$$

$$SSA = \frac{\sum_i Y_{ij.}^2}{bn} - \frac{Y_{...}^2}{abn} \qquad (26.16b)$$

$$SSB(A) = \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{n} - \frac{\sum_i Y_{i..}^2}{bn} \qquad (26.16c)$$

$$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{n} \qquad (26.16d)$$

جدول (٢٦-٣) العلاقة بين تباين عاملين متحاضنين وتباينات عامل واحد ـ مثال مدرسة التدريب.

مصدر التغير	تباينات عامل واحد						تباين عاملين متحاضنين	
	مدرسة ١		مدرسة ٢		مدرسة ٣			
	SS	df	SS	df	SS	df	SS	df
ما بين المدربين	$SSB(A_1)$	$2 - 1$	$+ \; SSB(A_2)$	$2 - 1$	$+ \; SSB(A_3)$	$2 - 1$	$= \; SSB(A)$	$3(2 - 1)$
(ضمن المدارس) الخطأ	$SSE(A_1)$	$2(2 - 1)$	$+ \; SSE(A_2)$	$2(2 - 1)$	$+ \; SSE(A_3)$	$2(2 - 1)$	$= \; SSE$	$3(2)(2 - 1)$
المجموع ضمن المدارس	$SSTO(A_1)$	$2(2) - 1$	$SSTO(A_2)$	$2(2) - 1$	$SSTO(A_3)$	$2(2) - 1$	$SSTO(A_3)$	$2(2) - 1$
ما بين المدارس							SSA	$3 - 1$
المجموع							$SSTO$	$3(2)(2) - 1$

درجات الحرية

يمكن استنتاج درجات الحريـة المصاحبـة لمجـاميع المربعـات المختلفـة مباشـرة مـن العلاقات المعروفة آنفة الذكر، وحيث أن هناك abn مشاهدة فتكـون درجـات الحريـة المصاحبة لـ $SSTO$ هي abn-1. ولأي مستوى للعامل A يوجـد $b(n$-1) درجـة حريـة مصاحبة لمجموع مربعات الخطأ، وبـالجمع فـوق جميـع مسـتويات العـامل A لابـد مـن وجود $ab(n$-1) درجة حرية مصاحبة لـ SSE. وبالمثل، لأي مستوى للعامل A، لدينـا b-1 درجة حرية مصاحبة لمجموع مربعات العامل B. وبالتجميع فـوق كـل مسـتويات العامل A نجد بالمثال أنه لابد مـن وجـود $a(b$-1) درجـة حريـة مصاحبـة لـ $SSB(A)$. وأخيرا ، بما أنه يوجد a مستوى للعامل A فلابد من وجود a-1 درجة حربة مصاحبة لـ SSA .

ويوضح الجدول (٢٦-٣) هـذا التجميـع لدرجـات الحريـة لمثـال مدرسـة التدريـب، ويقدم الجدول (٢٦-٤) جدول تحليل التباين العـام لنمـوذج التصميـم الحـاضن ثنـائي العامل (26.8) حيث العامل B محضن ضمن العامل A.

جدول (٢٦-٤) جدول تباين لنموذج محضن ذي عاملين مع تأثيرات مثبتة (B محضنة ضمن A)

مصدر التغير	SS	df	MS	$E\{MS\}$
العامل A	$SSA=bn\Sigma(\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{...})^2$	a-1	MSA	$\sigma^2+bn\frac{\Sigma\alpha_i^2}{a-1}$
العامل B (ضمن A)	$SSB(A)=n\Sigma\Sigma(\overline{Y}_{ij.}-\overline{Y}_{i..})^2$	$a(b$-1)	$MSB(A)$	$\sigma^2+n\frac{\Sigma\Sigma\beta_{j(i)}^2}{a(b-1)}$
الخطأ	$SSE=\Sigma\Sigma\Sigma(Y_{ijk}-\overline{Y}_{ij.})^2$	$ab(n$-1)	MSE	σ^2
المجموع	$SSTO=\Sigma\Sigma\Sigma(Y_{ijk}-\overline{Y}_{...})^2$	abn-1		

مثال

اعتبرت كل من المدارس والمدربين في مثـال مدرسـة التدريـب جـدول (٢٦-١) عوامل ذات تأثيرات مثبتة، ولذا يعتبر النموذج (26.8) مناسبا . يوضـح شـكل (٢٦-٢) رسما خطيا لمتوسطات المعالجات المقدّرة $\overline{Y}_{ij.}$ لمثال مدرسـة التدريـب. لاحـظ أن

هذا الرسم ليس في هيئة دراسة متصالبة ثنائية العامل بسبب استخدام مدربين مختلفين في المدارس المختلفة. ويقترح الشكل (٢٦-٢) اختلافات قوية بين المدربين ضمن مدرسة، وأيضا، إمكانية فروق في متوسطات التعلم بين المدارس.

ولتحليل تلك التأثيرات رسميا، سنبدأ بالحصول على تحليل التباين. ونحصل على مجاميع المربعات باستخدام الصيغ الحسابية (26.6) كما يلي:

$$SSTO = (25)^2 + (29)^2 + (14)^2 + ... + (2)^2 - \frac{(180)^2}{12}$$
$$= 3,466 - 2,700 = 766$$
$$SSA = \frac{1}{4}[(79)^2 + (57)^2 + (44)^2] - 2,700$$
$$= 2,856.5 - 2,700 = 156.5$$

شكل (٢٦-٢) رسم خط لمتوسطات المعالجات المقدرة – مثال مدرسة التدريب

0	5	10	15	20	25	$\bar{Y}_{ij.}$

درجة التعلم

O أتلانتا
□ شيكاغو
Δ سان فرانسيسكو

$$SSB(A) = \frac{1}{2}[(54)^2 + (25)^2 + ... + (7)^2] - 2,856.5$$
$$= 3,424 - 2,856.5 = 567.5$$
$$SSE = 3,466 - 3,424 = 42$$

ويحتوي الجدول (٢٦-٥)أ على تحليل التباين.

العلاقة بين مجاميع المربعات المحضنة والمتصالبة

إذا لم يتوفر برنامج حاسب لتحليل التباين لتصاميم حاضنة وكان لدينا برنامج لعوامل متصالبة، فيمكن، و بمشقّة بسيطة، استخدام هذا الأخير عندما يكون عدد مستويات العامل المحضن B نفسه لكل مستوى للعامل A ، ويكون عدد التكرارات نفسه لجميع تراكيب العوامل. يسمى هذا النوع من التصاميم الحاضنة بالمتوازن. ويحتوي الجدول (٢٦-٦) على تحليل التباين (الخاطىء) من دورة تشغيل حاسب لمثال مدرسة التدريب في الجدول (٢٦-١) عالجت العاملين على أنهما متصالبين.

وعندما نقارن تحليل التبـاين الخـاطىء هـذا بـالتحليل الصحيـح في جـدول (٢٦-٥)أ، نلاحظ أن $SSTO$، SSA و SSE تبقى نفسها في كلـى الحـالتين. وكذلـك درجـات الحرية المصاحبة، ويكون الفرق بين تحليلـي التبـاين هـو أن التحليـل المحضّـن لايتضمـن مجموع مربعات تفاعل. ومع هذا لو استخدمنا العلاقة:

$$\underbrace{SSB(A)}_{\text{محضن}} = \underbrace{SSB + SSAB}_{\text{متصالب}} \quad (26.17)$$

وقمنا بالشيء نفسه بالنسبة لدرجات الحرية فسنحصل على مجموع المربعات الصحيـح للعامل المحضّن B، ولدرجات الحرية الخاصة به:

$$SSB(A) = 108.0 + 459.5 = 567.5$$
$$df = 1 + 2 = 3$$

جدول (٢٦-٥) تحاين لتصميم حاضن ذي عاملين - مثال مدرسة التدريب

(أ) جدول التحاين

مصدر التغير	SS	df	MS
المدارس (A)	$SSA = 156.5$	2	78.25
متدربون ضمن المدارس [B(A)]	$SSB(A) = 567.5$	3	189.17
الخطأ [E]	$SSE = 42.0$	6	7.00
المجموع	$SSTO = 42.0$	11	

(ب) تفكيك $SSB(A)$

مصدر التغير	$SSB(A_i)$	df	$MSB(A_i)$
المدربون، أتلانتا	$SSA = 156.5$	1	210.25
المدربون، شيكاغو	$SSB(A) = 567.5$	1	132.25
المدربون، سان فرانسيسكو	$SSE = 42.0$	1	225.00
المجموع	$SSTO = 42.0$	3	

الجدول (٢٦-٦) تحاين عامل متصالب غير صحيح لتصميم محضّن ذي عاملين - مثال مدرسة التدريب

مصدر التغير	*SS*	*df*	*MS*
المدارس (A)	$SSA = 156.5$	2	78.25
المدربون (B)	$SSB = 108.0$	1	108.00
تفاعلات المدرسة-المدرب (AB)	$SSAB = 459.5$	2	229.75
الخطأ (E)	$SSE = 42.0$	6	7.00
المجموع	$SSTO = 42.0$	11	

وباستخدام العلاقة (26.17)، يمكن أن نحصل بسهولة على مجاميع المربعات ودرجات الحرية المناسبة لتصميم حاضن متوازن ذي عاملين من حزمة حاسب خاصة بعوامل متصالبة.

اختبارات تأثيرات عامل

اختبارات تأثيرات عامل في دراسة محضّنة ثنائية العامل هي اختبارات لا صعوبة فيها.

وتتحدد إحصاءة الاختبار المناسبة، كما في دراسة ثنائية العامل متصالبة، بمقارنة قيم التوقع لمتوسطات المربعات في جدول التحاين. وتوقع متوسط المربعات في نموذج التأثيرات المحضّنة (26.8) مبيّنة في الجدول (٢٦-٤). ويمكن الحصول عليها بعمليات شاقة إلى حد ما.

ولا نوضح هذه العمليات، لأننا سنقدم في الفصل ٢٧ طريقة بسيطة نسبيا لإيجاد توقع متوسط المربعات لأي تصميم حاضن متوازن.

ويشير العمود $E\{MS\}$ في الجدول (٢٦-٤) إلى أن الاختبار الخاص بالتأثيرات الرئيسة للعامل A في نموذج التأثيرات المثبتة (26.8) وهو الاختبار:

$$H_0: \text{جميع الـ } \alpha_i \text{ مساوية للصفر}$$
$$H_a: \text{ليست جميع الـ } \alpha_i \text{ مساوية للصفر} \qquad (26.18a)$$

مبني على إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{MSA}{MSE} \qquad (26.18b)$$

وقاعدة القرار التي تضبط مستوى الأهمية عند α هي:

(26.18c)

إذا كان $F^* \leq F[1 - \alpha; a - 1, (n - 1)ab]$ ، استنتج H_0

إذا كان $F^* > F[1 - \alpha; a - 1, (n - 1)ab]$ ، استنتج H_a

وبصورة مشابهة لاختبار تأثيرات العامل B:

(26.19a)

H_0: جميع الـ $\beta_{j(i)}$ مساوية للصفر

H_a: ليست جميع الـ $\beta_{j(i)}$ مساوية للصفر

فإن احصاءة الاختبار المناسبة هي:

$$F^* = \frac{MSB(A)}{MSE} \qquad (26.19b)$$

وقاعدة القرار المناسبة هي:

(26.19c)

إذا كان $F^* \leq F[1 - \alpha; a(b-1), (n - 1)ab]$ ، استنتج H_0

إذا كان $F^* > F[1 - \alpha; a(b-1), (n - 1)ab]$ ، استنتج H_a

مثال. نعود إلى مثال مدرسة التدريب، فبناء على تحليل التباين في الجدول (٢٦-٥)أ، كان أول اختبار قمنا به هو لتحديد ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للمدرسة موجودة أم لا. والبدائل معطاة في (26.18a)، وإحصاءة الاختبار (26.18b) هنا هي:

$$F^* = \frac{78.25}{7.00} = 11.2$$

ويُراد ضبط مستوى الأهمية عند $\alpha = .05$، ونحتاج بالتالي إلى $F(.95; 2,6) = 5.14$. وبما أن $F^* = 11.2 > 5.14$، فقد استنتجنا أن المدارس الثلاث تختلف في متوسطات تأثيرات التعلّم والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0094.

وبعد ذلك قمنا باختبار الفروق في متوسطات تأثيرات التعلم بين المدربين ضمن كل مدرسة. والبدائل معطاة في (26.19a) أو إحصاءة الاختبار (26.19a) هي هنا:

$$F^* = \frac{189.17}{7.00} = 27.0$$

ومن أجل $\alpha = .05$، نحتاج إلى $F(.95; 3, 6) = 4.76$، وبما أن $F^* = 27.0 > 7.76$، فقد

استنتجنا أن المدربين ضمن كل مدرسة يختلفون فيما يتعلق بمتوسطات تأثيرات التعلم والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0.0007.

تعليقات

١ـ التعبير البديل للفرضية H_0 في (26.19a) بدلالة متوسطات المعالجات μ_{ij} هو:

$$H_0: \mu_{11} = \mu_{12} = ... = \mu_{1b}\ ; \mu_{21} = \mu_{22} = ... = \mu_{2b}; ... \qquad (26.20)$$

وهكذا تعرض H_0 لمثال مدرسة التدريب أن متوسطات درجات التعلّم لجميع المدربين في أتلانتا هي نفسها، وبصورة مماثلة بالنسبة لبقية المدارس، وهي لا تعرض أن متوسطات درجات التعلم لجميع المدربين في المدارس المختلفة تبقى نفسها.

٢ـ إذا استنتجنا أن تأثيرات العامل B موجودة، فسنرغب في الغالب التعرّف على ما إذا كانت موجودة بالنسبة لجميع مستويات العامل A أم أنها موجودة في بعض منها، فقط.

(في بعض الحالات، قد نرغب في الحقيقة الولوج مباشرة إلى هذا التحليل) وبالإشارة إلى مثال مدرسة التدريب، ستكون المسألة هي ما إذا كانت تأثيرات المدربين مختلفة في جميع المدارس أم في بعض منها، فقط. وكما لاحظنا سابقا ، يتألف $SSB(A)$ في الجدول (26.5)أ من مجاميع مربعات المدربين ضمن المدارس كل بمفردها، ويمكن استخدام مركبة مجاميع المربعات هذه لاختبار تأثيرات المدربين ضمن كل مدرسة. ويتضمن الجدول (26.5)ب مركبة مجاميع المربعات المناسبة. ولاختبار وجود فروق بين مدربي مدرسة أتلانتا، مثلا ، نستخدم إحصاءة الاختبار $F^* = MSB(A_1) / MSE = 210.25 / 7.00 = 30.0$ وعند مستوى الأهمية $\alpha = 0.025$، نحتاج إلى $F(.95;1,6) = 5.99$. وبما أن $F^* = 30.0 > 5.99$، فقد استنتجنا وجود فرق بين المدربين في أتلانتا فيما يتعلق بمتوسطي تأثيري التعلم. وباستخدام مستوى الأهمية نفسه في كل مرة، تمّ الوصول إلى نتائج مماثلة بالنسبة للمدرستين الأخريتين. ومستوى الأهمية العائلي للاختبارات الثلاثة وفقا لمتباينة بونفيرّوني هو 0.15.

٣ـ إذا اختلّ فرض ثبات تباين الخطأ في مثال مدرسة التدريب وكانت التباينات غير متساوية بالنسبة للمدارس الثلاث، فلا يزال من الممكن دراسة الفروق بين تأثيرات

المدربين ضمن كل مدرسة من خلال تحليلات تباين منفصلة لكل مدرسة.

تأثيرات عامل عشوائية

لا تعود إحصاءة الاختبار (26.18b) الخاصة بتأثيرات العامل A الرئيسة إحصاءة اختبار مناسبة إذا كانت أي من تأثيري العامل أو كلاهما عشوائيا . ويعطي الجدول (٢٦-٧) متوسطات المربعات لهذه الحالات وكذلك إحصاءات الاختبار المناسبة.

(٢٦-٤) تقويم مصداقية نموذج تصميم حاضن

الاجراءات التشخيصية الموصوفة سابقا قابلة للتطبيق تماما لفحص ما إذا كان نموذج التصميم الحاضن (26.8) مناسبا . فالرواسب في (26.11):

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.} \qquad (26.21)$$

يمكن فحصها كالمعتاد ـ من أجل الطبيعية، ثبات تباين الخطأ واستقلال حدود الخطأ. وعلى وجه الخصوص، فإن الرسوم النقطية المصطفة للرواسب من أجل كل مستوى من مستويات العامل A قد يكون مساعدا لفحص ما إذا كان تباين حدود الخطأ ثابتا من أجل مستويات العامل A المختلفة، التي احتضنت العامل B.

جدول (٢٦-٧) توقع متوسطات المربعات لتصاميم حاضنة ثنائية العامل مع تأثيرات عشوائية للعوامل (A محض ضمن B).

	توقع متوسط مربعات عشوائي	
متوسط المربعات	A مثبت، B عشوائي	A مثبت، B عشوائي
MSA	$\sigma^2 + \frac{bn}{a-1}\Sigma a_i^2 + n\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + bn\sigma_\alpha^2 + n\sigma_\beta^2$
$MSB(A)$	$\sigma^2 + n\sigma_\beta^2$	$\sigma^2 + n\sigma_\beta^2$
MSA	σ^2	σ^2

	إحصاءة الاختبار المناسبة	
اختبار	A مثبت، B عشوائي	A مثبت، B عشوائي
العامل A	$MSA / MSB(A)$	$MSA / MSB(A)$
العامل $B(A)$	$MSB(A) / MSE$	$MSB(A) / MSE$

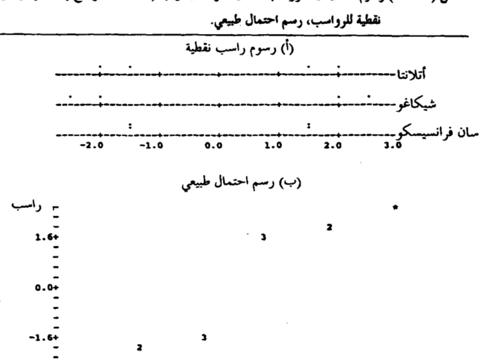
مثال

يحتوي الشكل (٢٦-٣)أ رسوما نقطية مصطفة للرواسب في كل مدرسة من مثال مدرسة التدريب. وقد تأثرت تلك الرسوم بالطبيعة التقريبية للبيانات، ولكنها تدعم ملاءمة افتراض ثبات تباين الخطأ ويقدم الشكل (٢٦-٣)ب رسم احتمال طبيعي للرواسب. وقد تأثر هذا الرسم، أيضا، بالطبيعة التقريبية للمشاهدات ولكنه لايشير إلى حيدان كبير عن الطبيعية. وهذه النتيجة مدعمة بمعامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية فقد بلغت قيمته 0.927 . هذه النتائج، بالإضافة إلى بعض التشخيصات الأخرى (لم تُذكر هنا) ، تدعم صلاحية نموذج التصميم الحاضن (26.8) لمثال مدرسة التدريب.

ملاحظة

في رسوم احتمال طبيعي سابقة رسمنا رواسب لها القيم نفسها في مقابل قيمها المتوقعة، التي حصلنا عليها من (4.6)، كما لو كان للرواسب قيم مختلفة. ويزودنا الشكل 4.2d بمثال عن رسم كهذا.

شكل (٢٦-٣) رسوم تشخيصية للرواسب ـ مثال مدرسة التدريب (مينيتاب، مرجع [26.1]، رسوم نقطية للرواسب، رسم احتمال طبيعي.



وعند وجود قيم كثيرة متساوية للرواسب، كما في مثال مدرسة التدريب، يمكن الحصول على رسم احتمال طبيعي أكثر دقة برسم كل من الرواسب متساوية القيم في مقابل القيمة المتوقعة لمتوسط مراتب مواضع القيم المتساوية. وعندئذ ينبغي أن يوضح الرسم عدد الرواسب متساوية القيم لكل حالة. وقد تم هذا في الشكل (٢٦-٣)ب.

(٢٦-٥) تحليل تأثيرات العوامل في تصاميم حاضنة ثنائية العامل

عندما تشير الاختبارات إلى وجود تأثيرات مهمة للعوامل في تصميم حاضن، يكون من المرغوب، عادة، الحصول على تقديرات لهذه التأثيرات أو إجراء مقارنات بينها.

تقدير متوسطات مستويات العوامل

عندما يكون التأثير الرئيس لعامل (عامل ذو تأثير ثابت) معنويا ، فمن المتواتر الاهتمام بتقدير متوسطات مستويات العوامل $\mu_{i.}$. وتكون متوسطات مستويات العوامل المقدرة $\bar{Y}_{i..}$ مقدرات نقطية غير منحازة لـ $\mu_{i.}$. ويكون التباين المقدَّر لـ $\bar{Y}_{i..}$ ،كما هي العادة للعوامل الثابتة، مبنيا على متوسط المربعات في مقام الإحصاءة المستخدمة لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A، وعلى عدد المشاهدات في $\bar{Y}_{i..}$ وتكون حدود الثقة للمعالم $\mu_{i.}$ في شكلها المعتاد:

$$\bar{Y}_{i..} \pm t(1-a/2;df)s\{\bar{Y}_{i..}\} \qquad (26.22)$$

حيث:

$$s^2\{Y_{i..}\} = \frac{MSE}{bn} \qquad df = ab(n-1) \qquad A \text{ و } B \text{ مثبت} \qquad (26.22a)$$

$$s^2\{Y_{i..}\} = \frac{MSB(A)}{bn} \qquad df = a(b-1) \qquad A \text{ مثبت و } B \text{ عشوائي} \qquad (26.22b)$$

وتوضع حدود الثقة للفروق $D = \mu_{i.} - \mu_{i'}$ بالطريقة العادية مستخدمين المقدرات النقطية $D = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{i'}$ وتوزيع t بدرجات الحرية المصاحبة لمتوسطات المربعات الملائم:

$$\hat{D} \pm t(1-a/;df)s\{\hat{D}\} \qquad (26.23)$$

حيث:

$s^2\{\hat{D}\}=s^2\{\bar{Y}_{i..}\}+s^2\{\bar{Y}_{i'..}\}$ (26.23a) كما أُعطيت بواسطة (26.22a) أو (26.22b)

ويمكن، بالطريقة المعتادة، استخدام أساليب توكي وبونفيروني للمقارنـة المتزامنـة للقيام بأزواج من المقارنات بمعامل ثقة عائلي $1-\alpha$.

وأخيرا ، لاتظهر أية مشاكل جديدة في تقدير مقارنات بين متوسطات مستويات العوامل. ويمكن استخدام أساليب شيفّيه أو بونفيّروني عند تقدير عدة مقارنات.

مثال نرغب في مثال مدرسة التدريب جدول (٢٦-١) بتقدير متوسـط درجـة التعلـم لمدارس أتلانتا بمعامل ثقة 95 بالمائة، وباستخدام النتائج السابقة في الجدولـين (٢٦-١). و(٢٦-٥) نجد، من أجل نموذج تأثيرات مثبتة:

$$\bar{Y}_{1..}=\frac{79}{4}=19.75$$

$$s^2\{\bar{Y}_{1..}\}=\frac{MSE}{bn}=\frac{7.00}{4}=1.75$$

$$s\{\bar{Y}_{1..}\}=1.32$$

$$t(.975;6)=2.447$$

$$16.5=19.75-2.447(1.32)\le\mu_{1.}\le19.75+2.447(1.32)=23.0$$

وبالإضافة إلى ذلك نريد القيام بأزواج من المقارنات بين المدارس الثلاث، بمعـامل ثقـة عائلي 0.90. وسنستخدم طريقة توكي وهي تحتاج إلى:

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}q[1-\alpha;a,ab(n-1)]=q\frac{1}{\sqrt{2}}(.90;3,6)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(2.56)=2.52$$

ويبقى التباين المقدر نفسه لجميع أزواج المقارنات:

$$s^2\{\hat{D}\}=\frac{MSE}{bn}+\frac{MSE}{bn}=\frac{2(7.00)}{4}=3.5$$

وهكذا، فـإن الانحـراف المعيـاري المقـدَّر $s\{\hat{D}\}=1.87$ ويكـون حـدّ الدقـة = 2.52(1.87) = 4.71.

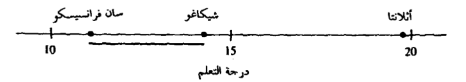
ونجد باستخدام النتائج في جدول (٢٦-١):

$$\bar{Y}_{1..}=19.75\qquad\bar{Y}_{2..}=14.25\qquad\bar{Y}_{3..}=11$$

وتكون عائلة فترات الثقة بمعامل 90 بالمائة كما يلي:

$$.8 = (19.72 - 14.75) - 4.71 \le \mu_{1.} - \mu_{2.} \le (19.75 - 14.25) + 4.71 = 10.2$$
$$4.0 = (19.75 - 11) - 4.71 \le \mu_{1.} - \mu_{3.} \le (19.75 - 11) + 4.71 = 13.5$$
$$-1.5 = (14.25 - 11) - 4.71 \le \mu_{2.} - \mu_{3.} \le (14.25 - 11) + 4.71 = 8.0$$

ونستنتج، بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة أن متوسط درجة التعلم هو الأعلى في أتلانتا وأن الفرق بين متوسطي درجة التعلم الملحوظين في شيكاغو وسان فرانسيسكو هو فرق غير معنوي إحصائيا . ويلخص الرسم التالي تلك النتائج:



تقدير متوسطات المعالجات μ_{ij}

وتوضع حدود الثقة لـ μ_{ij} بالطريقة المعتادة، مستخدمين توزيع t ، عندما تكون تأثيرات كل من العاملين A، B مثبتة:

$$\bar{Y}_{ij.} \pm t[1-\alpha/2;(n-1)ab]s\{\bar{Y}_{ij.}\} \qquad (26.24)$$

حيث:

$$s^2\{\bar{Y}_{ij.}\} = \frac{MSE}{n} \qquad (26.24a)$$

وللقيام بمقارنة ثنائية ضمن مستوى من مستويات العامل A ، نقدر الفرق - $D = \mu_{ij}$ $\mu_{ij'}$

بالمقدر النقطي ونستخدم حدي الثقة:

$$\hat{D} \pm t[1-\alpha/2;(n-1)ab]s\{\hat{D}\} \qquad (26.25)$$

حيث:

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2\,MSE}{n} \qquad (26.25a)$$

ويمكن استخدام اسلوب بونفيروني عندما نرغب القيام بعدة مقارنات، مع ضبط مستوي الثقة العائلي. ويمكن، أيضا، تطبيق أسلوب توكي، ولكنه، في الغالب، سوف لايكون كفؤا حيث ينصبّ الاهتمام عادة على مقارنات ضمن كل مستوى من مستويات عامل ، فقط، بينما تُوسَّس عائلة توكي على جميع المقارنات الممكنة بين

المعالجات كافة وعدّتها ab.

مثال. من المرغوب في مثال مدرسة التدريب مقارنة متوسط الدرجات للمدربين ضمن كل مدرسة، مستخدمين طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة. ومن أجل $g = 3$ مقارنات نحتاج إلى $B = t[1-.10/2(3); 6] = t(.983;6)$ ويكون التباين المقدّر في كل حالة هو:

$$s^2\{\bar{Y}_{i1.} - \bar{Y}_{i2.}\} = \frac{2(7.00)}{2} = 7.0$$

وبالتالي يكون حد الدقة في كل مقارنة $\bar{Y}_{ij.}$ هو $2.748\sqrt{7.0} = 7.27$ ونجد، وبعد الحصول على المتوسطات المقدّرة من الجدول (٢٦-١):

$$7.2 = (27 - 12.5) - 7.27 \le \mu_{11} - \mu_{12} \le (27 - 12.5) + 7.27 = 21.8$$
$$-18.8 = (8.5 - 20) - 7.27 \le \mu_{21} - \mu_{22} \le (8.5 - 20) + 7.27 = -4.2$$
$$7.7 = (18.5 - 3.5) - 7.27 \le \mu_{31} - \mu_{32} \le (18.5 - 3.5) + 7.27 = 22.3$$

ومن الواضح وجود فروق كبيرة بين المدربين ضمن كل مدرسة.

تقدير المتوسط العام $\mu_{..}$

هناك في بعض الأحيان اهتمام بتقدير المتوسط العام $\mu_{..}$. ولمثال مدرسة التدريب، هو متوسط درجة التعلم لجميع مدارس التدريب وجميع المدربين في تلك المدارس. والمقدِّر النقطي هو $\bar{Y}_{...}$. ويتم وضع حدود الثقة باستخدام التوزيع t كالتالي:

$$\bar{Y}_{...} \pm t(1-\alpha/2; df)s\{\bar{Y}_{...}\} \quad (26.26)$$

حيث:

$$s^2\{\bar{Y}_{...}\} = \frac{MSE}{abn} \qquad df = ab(n-1) \qquad \text{(26.26a)}$$
A و B مثبت

$$s^2\{\bar{Y}_{...}\} = \frac{MSA}{abn} \qquad df = a-1 \qquad \text{(26.26b)}$$
A و B عشوائي

$$s^2\{\bar{Y}_{...}\} = \frac{MSB(A)}{abn} \qquad df = a(b-1) \qquad \text{(26.26c)}$$
A مثبت و B عشوائي

مثال. في مثال مدرسة التدريب، نرغب في تقدير المتوسط العام $\mu_{..}$ بـ 95 بالمائة فترة ثقة. والتباين المقدَّر (26.26a) ملائم هنا لأن النموذج يتضمن تأثيرات مثبتة. وبالتالي نحصل على:

$$s^2\{\overline{Y}_{..}\}=\frac{7.00}{12}=.583 \qquad s\{\overline{Y}_{..}\}=.764$$

ولمعامل ثقة 95. نحتاج $t(.975;6) = 2.447$ ومن الجدول (٢٦-١) نجد $\overline{Y}_{..}$، ولذا تكون فترة الثقة المطلوبة:

$$13.1 = 15 - 2.447(7.764) \le \mu_{..} \le 15 + 2.447(.764) = 16.9$$

تقدير مركبات التباين

في حالة تأثيرات عامل عشوائية، قد نرغب في تقدير مركبات التباين. ولاتظهر أية مشاكل جديدة في التصاميم الحاضنة. وعلى سبيل المثال عندما يكون لكل من A و B تأثيرات عشوائية فإن تقديرا غير منحاز لـ σ_α^2 يكون (جدول ٢٦-٧):

$$s_\alpha^2=\frac{MSA-MSB(A)}{bn} \tag{26.27}$$

(٢٦-٦) التحضين غير المتساوي والتكرارات في تصاميم حاضنة ثنائية العامل

لقد افترضنا حتى الآن أن عدد مستويات العامل B المحضنة داخل كل من مستويات العامل A تبقى نفسها ولدينا العدد نفسه من التكرارات لكل تركيبة من العوامل. إلا أن هناك ظروفا قد يختلف فيها عدد مستويات العامل المحضن B باختلاف مستويات العامل A. وكذلك لايتساوى عدد التكرارات لتراكيب عوامل مختلفة. وعلى سبيل المثال، وفي مثالنا السابق، حيث نتعامل مع تأثيرات المدرسة (عامل A) والمدرب (عامل B) على التحصيل الدراسي لفصول الميكانيكا، فقد يكون هناك b_i مدربا في المدرسة i ويتم تعليم n_{ij} فصلا من المدرسة i بواسطة المدرب j.

وستكون الصيغ السابقة لمجاميع مربعات التحاين غير ملائمة لتحضّين وتكرارات غير متساوية. ومن الأفضل، عادة، استخدام أسلوب الانحدار لهذه الحالة، إلا أنه يمكن، أيضا، استخدام أسلوب المصفوفات العام الموصوف في الفقرة (٨-٦) ومع عدم وجود أية مبادىء جديدة مع تأثيرات عامل مثبتة فيمكن المضي مباشرة إلى مثال.

مثال

قررت الشركة الصناعية التي نفذت دراسة مدرسة التدريب أن تقوم لاحقا بدراسة متابعة تشمل شيكاغو وأتلانتا. فقط. و قد استُخدم ثلاثة مدربين في أتلانتا

واثنين في شيكاغو وكان مقررا أن يدرب كل مدرب فصلين، ولكن ظروفا قاهرة أدت إلى إلغاء أحد الفصول لأحد المدربين في أتلانتا. ويقدم جدول (٢٦-٨)أ بيانات هذه الدراسة. ونفترض مرة أخرى أن نموذج التصميم الحاضن ذا التأثيرات المثبتة (26.8)، هو النموذج المناسب:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)} \tag{26.28}$$
$$i = 1, 2; j = 1,\dots b_i; k = 1, \dots, n_{ij}$$
$$b_1 = 3, b_2 = 2$$
$$n_{11} = n_{13} = 2, n_{12} = 1, n_{21} = n_{22} = 2$$

جدول (٢٦-٨) دراسة حاضنة ثنائية العامل بتحضين غير متساو وتكرارات غير متساوية – دراسة متابعة لمدرسة التدريب.

(أ) بيانات

تكرار k	أتلانتا (A_1) B_1	B_2	B_3	شيكاغو (A_2) B_1	B_2
1	20	8	9	4	16
2	22		13	8	20

(ب) Y و X مصفوفات من أجل النموذج التام (26.31)

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{121} \\ Y_{131} \\ Y_{132} \\ Y_{211} \\ Y_{212} \\ Y_{221} \\ Y_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 22 \\ 8 \\ 9 \\ 13 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(جـ) نموذج تام

$$\hat{Y} = 12.667 + .667X_1 + 7.667X_2 - 5.333X_3 - 6.0X_4$$

ولتطوير نموذج الانحدار المكافىء لابد أن نتعرف على القيود في (26.8):

$$\sum_{i=1}^{2}\alpha_i = 0 \qquad \sum_{j=1}^{3}\beta_{j(1)} = 0 \qquad \sum_{j=1}^{2}\beta_{j(2)} = 0 \qquad (26.29)$$

وبالمضي كالمعتاد سنستوعب المعالم α_1، $\beta_{1(1)}$ ، $\beta_{2(1)}$ و $\beta_{1(2)}$ في نموذج الانحدار. ولا نحتاج للمعالم الأخرى إذ لدينا وفقا للقيود (26.29):

$$\alpha_2 = -\alpha_1 \text{ و } \beta_{3(1)} = -\beta_{1(1)} - \beta_{2(1)} \text{ و } \beta_{2(2)} = -\beta_{1(2)} \qquad (26.30)$$

وهكذا نحتاج في مثالنا لأربع متغيرات مؤثرة تأخذ كل منها القيم 1، 1- أو 0. وبالتالي يكون نموذج الانحدار المكافىء:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_1 X_{ijk1} \qquad (26.31)$$

تأثير رئيس لمدرسة

نموذج تام

$$+ \beta_{1(1)}X_{ijk} + \beta_{2(1)}X_{ijk3} + \beta_{1(2)}X_{ijk4} + \varepsilon_{ijk}$$

تأثير مدرب بعينه ضمن مدرسة

حيث:

$Y_{ijk1} =$
1 إذا كان الفصل من المدرسة ١
1- إذا كان الفصل من المدرسة ٢

$Y_{ijk2} =$
1 إذا كان الفصل للمدرب ١ من المدرسة ١
1- إذا كان الفصل للمدرب ٣ من المدرسة ١
0 فيما عدا ذلك

$Y_{ijk3} =$
1 إذا كان الفصل للمدرب ٢ من المدرسة ١
1- إذا كان الفصل للمدرب ٣ من المدرسة ١
0 فيما عدا ذلك

$Y_{ijk4} =$
1 إذا كان الفصل للمدرب ١ من المدرسة ١
1- إذا كان الفصل للمدرب ٢ من المدرسة ١
0 فيما عدا ذلك

ويبين الجدول (٢٦-٨)ب المتجه **Y** والمصفوفة **X** لمثالنا. ولاختبار التأثيرات الرئيسة للمدرسة، نقوم أولا بتوفيق النموذج التام (26.31). ويوضح الجدول (٢٦-٨)جـ

النموذج التوفيقي. ثم نقوم بعد ذلك بتوفيق النموذج المخفض للفرضية: $H_0: \alpha_1 = 0$:

جدول (٢٦-٩) جدول تحاين لدراسة حاضنة ثنائية العامل بتحضين غير متساو وتكرارات غير متساوية. دراسة متابعة مدرسة التدريب.

مصدر التغير	SS	df	MS	F^*
المدارس (A)	3.76	1	3.67	3.76/6.5 = .58
المدربون $[B(A)]$	295.20	3	98.4	98.4/6.5 = 15.1
الخطأ (E)	26.00	4	6.5	

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \beta_{1(1)}X_{ijk2} + \beta_{2(1)}X_{ijk3} + \beta_{1(2)}X_{ijk4} + \varepsilon_{ijk} \quad \text{نموذج منخفض} \qquad (26.32)$$

ويمكن الحصول على إحصاءة الاختبار بالطريقة المعتادة، ولاختبار تأثيرات مدرب بالذات نستخدم النموذج المخفض للفرضية.

وهذا النموذج هو:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_1 + X_{ijk1} + \varepsilon_{ijk} \qquad (26.33)$$

والفرق $SSE(R) - SSE(F)$ يساوي $SSB(A)$.

ويتضمن الجدول (٢٦-٩) جدول التحاين لمثال دراسة المتابعة لمدرسة التدريب. ولا يوجد مجموع مربعات كلي لأن مركبات مجاميع المربعات غير متعامدة.

وتتم اختبارات تأثير المدرسة والمدرب كما سبق. كما يجري تقدير تأثيرات العامل بواسطة معالم الانحدار. وعلى سبيل المثال، تتضمن مقارنة بين متوسطي المدرستين:

$$\mu_{1.} - \mu_{2.} = \alpha_1 - \alpha_2$$

وبما أن $\alpha_2 = -\alpha_1$ كما نعلم من (26.30) فنحتاج لتقدير:

$$\mu_{1.} - \mu_{2.} = \alpha_1 - (-\alpha_1) = 2\alpha_1$$

ويكون المقدّر النقطي $2\hat{\alpha}_1$. ونحصل على التقديرات المرغوبة الأخرى بالطريقة نفسها.

(٢٦-٧) المعاينة الجزئية في دراسة أحادية العامل بتصميم تام العشوائية

في مناقشتنا للتصاميم التجريبية حتى الآن استعرضنا، فقط، تصاميم تتم فيها مشاهدة واحدة، فقط، للمتغير التابع في وحدة تجريبية، إلا أن هناك حالات يُستحسن

فيها الحصول على أكثر من مشاهدة. فلنعتبر تجربة لدراسة تأثير درجة حرارة فرن على قساوة الخبز. استُخدمت ثلاث درجات حرارة وخُصصت وحدتان تجريبيتان (عجنات من خلطة طحين) عشوائيا لكل معالجة. ولم يكن استخدام العجينة كلها لخبز الخبز اقتصاديا كما لم يكن من المجدي تقنيا استخدام العجنة كقطاع. وبالتالي اختيرت ثلاث عينات جزئية من كل عجنة لصنع ثلاثة أرغفة يتم خبزها تحت درجة حرارة معينة. ولدينا هنا ثلاث مشاهدات (عينات جزئية) من كل وحدة تجريبية (عجنة).

ومن الأمثلة الأخرى على تعدد المشاهدات التي تؤخذ للمتغير التابع من كل وحدة تجريبية ذلك الذي حدث في تجربة عن فعالية ثلاث طرق مختلفة للتدريب. كانت الوحدات التجريبية هنا أشخاصا ، وابتغت التجربة قياس طول الفترة الزمنية المطلوبة لإتمام عملية تجميع محرك معين بعد استكمال برنامج التدريب المعطى. وقد تم قياس الزمن اللازم إثر عمليات تجميع متتابعة وهي تشكل المعاينة الجزئية للوحدة التجريبية (شخص).

ورسميا نجد أن المعاينة الجزئية (مشاهدات متكررة على الوحدة التجريبية نفسها) مشابهة تماما للعوامل المحضنة، وسوف نبين ذلك في حالة تصميم تام العشوائية.

نموذج

اعتبر مرة أخرى تجربة دراسة تأثير درجة حرارة الفرن على قساوة الخبز، فيمكن كتابة النموذج لهذه الدراسة كالتالي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \tau_i + \varepsilon_{j(i)} + \eta_{k(ij)} \quad (26.34)$$

ومعاني الرموز هي كالتالي:

١- $\mu_{..}$ ثابت إجمالي

٢- τ_i تأثير درجة الحرارة (أي تأثير المعالجة وهو هنا تأثير مثبت)

٣- $\varepsilon_{j(i)}$ الخطأ التجريبي المصاحب لعجنة بالذات (هنا تأثير عشوائي). والخطأ التجريبي هو كالعادة محضّن ضمن المعالجة، فالعجنة المستخدمة للمعالجة i لم تُستخدم لأي معالجة أخرى.

٤- $\eta_{k(ij)}$ الخطأ المصاحب للعينة الجزئية أو المشاهدة من الوحدة التجريبية للمعالجة (هنا تأثير عشوائي). وخطأ المشاهدة هذا محضن ضمن الوحدة التجريبية وبالتالي ضمن

المعالجة، أيضا .

ويلاحظ أن نموذج المعاينة الجزئية (26.34) يبدو مماثلا تماما لنموذج التصميم الحاضن (26.8) الخاص بتصميم حاضن ثنائي العامل، باستثناء مايتعلق بتغييرات في الرموز تعكس حقيقة أن نموذج المعاينة الجزئية (26.34) هو نموذج أحادي العامل، ويحتوي الخطأ التجريبي وخطأ المشاهدة كليهما. وبالتحديد، فإن تأثير المعالجة τ_i هنا يقابل α_i في نموذج تحضين ثنائي العامل، وتأثير العجنة $\varepsilon_{j(i)}$ يقابل $\beta_{j(i)}$ وحدّ خطأ المشاهدة $\eta_{k(ij)}$ يقابل $\varepsilon_{j(i)}$. وكنتيجة لذلك يتوازى تحليل التباين في حالة المعاينة الجزئية في الدراسة أحادية العامل بتصميم تام العشوائية مع دراسة تحضين ثنائية العامل.

وبصورة عامة، يكون النموذج لمعاينة جزئية، في دراسة أحادية العامل وتصميم تام العشوائية مع تأثيرات معالجة مثبتة وأعداد متساوية من التكرارات والعينات الجزئية، كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \tau_i + \varepsilon_{j(i)} + \eta_{k(ij)} \qquad (26.35)$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت

τ_i ثوابت خاضعة للقيد $\sum \tau_i = 0$

$\varepsilon_{j(i)}$ مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$\eta_{k(ij)}$ مستقلة و $N(0, \sigma_\eta^2)$

$\varepsilon_{j(i)}$ و $\eta_{k(ij)}$ مستقلة.

$i = 1,..., r\,; j = 1,..., n; k = 1, ..., m$

ويكون المتوسط والتباين للمشاهدة Y_{ijk} في هذا النموذج.

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{..} + \tau_i \qquad (26.35a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma_Y^2 = \sigma^2 + \sigma_\eta^2 \qquad (26.35b)$$

وفضلا عن ذلك، فإن المشاهدات Y_{ijk} لهذا النموذج تتوزع توزيعا طبيعيا . وتكون المشاهدات من تكرارات مختلفة (عينات جزئية مختلفة) مستقلة. إلا أننا نعلم سلفا أن أية مشاهدتين من التكرار نفسه مرتبطتان، لأنهما تتضمنان الحد العشوائي $\varepsilon_{j(i)}$ نفسه:

$$\sigma\{Y_{ijk}, Y_{ijk'}\} = \sigma^2 \quad \text{و} \quad k \neq k' \qquad (26.35c)$$

تحليل التباين واختبارات التأثيرات

تكون مجاميع مربعات تحليل التباين الموافقة لنموذج معاينة جزئية كما يلي:

$$SSTO=\sum_i\sum_j\sum_k(Y_{ijk}-\overline{Y}_{...})^2=\sum_i\sum_j\sum_k Y_{ijk}^2-\frac{Y_{...}^2}{rnm} \qquad (26.36a)$$

$$SSTR=rm\sum_i(\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{...})^2=\frac{\sum_i Y_{ij.}^2}{nm}-\frac{Y_{...}^2}{rnm} \qquad (26.36b)$$

$$SSEE=m\sum_i\sum_j(\overline{Y}_{ij.}-\overline{Y}_{i..})^2=\frac{\sum_i\sum_j Y_{ij.}^2}{m}-\frac{\sum_i Y_{i..}^2}{nm} \qquad (2\,6.36c)$$

$$SSOE=\sum_i\sum_j\sum_k(Y_{ijk}-\overline{Y}_{ij.})^2=\sum_i\sum_j\sum_k Y_{ijk}^2-\frac{\sum_i\sum_j Y_{ij.}^2}{m} \qquad (26.36d)$$

يمثل هنا $SSEE$ مجموع مربعات الخطأ التجريبي ويمثل $SSOE$ مجموع مربعات خطأ المشاهدة. لاحظ تقابل الصيغ (26.36) للصيغ (26.13) و (26.16). في حالة تصاميم حاضنة ثنائية العامل. والفرق الوحيد أن لدينا الآن n ,... ,$j=1$ ،r ,... ,$i=1$ ، و $k=1,...,m$ وفي السابق j,i و k تأخذ القيم إلى b ، a و n ،على الترتيب.

ويحتوي الجدول (٢٦-١٠) التحاين لتجربة تامة العشوائية أحادية العامل بمعاينة جزئية. ويوضح الجدول، أيضـا، توقع متوسط المربعات لكل من التأثيرات المثبتة والعشوائية للمعالجات، ويلاحظ، وبصرف النظر عما إذا كانت تأثيرات المعالجات مثبتة أو عشوائية، أن الإحصاءة الملائمة لاختبار تأثيرات المعالجات هي:

$$F^*=\frac{MSTR}{MSEE} \qquad (26.37a)$$

ويستخدم اختبار لوجود تأثيرات خطأ تجريبي، أي $\sigma^2>0$، إحصاءة الاختبار نفسها لكل من تأثيرات المعالجات المثبتة والعشوائية.

$$F^*=\frac{MSEE}{MSOE}$$

مثال. يحتوي جدول (٢٦-١١) على بيانات دراسة تأثير درجة حرارة الخَبْز على قساوة الخبز. البيانات هي درجات على سلّم قياس من 1 إلى 20. حصلنا على تحليل التباين المناسب باستخدام تشغيلة حاسب وهو مبيّن في الجدول (٢٦-١٢) ولاختبار

تأثير درجة الحرارة:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$$

H_a: ليست كل τ_i تساوي الصفر

جدول (٢٦-١٠) التباين لتجربة تامة العشوائية أحادية العامل بمعاينة جزئية

مصدر التغير	SS	df	MS	$E\{MS\}$ τ_i مثبت	$E\{MS\}$ τ_i عشوائي
المعالجات	SSTR	$r-1$	MSTR	$\sigma_\eta^2 + m\sigma^2 + nm\frac{\Sigma\tau_i^2}{r-1}$	$\sigma_\eta^2 + m\sigma^2 + nm\sigma_\tau^2$
الخطأ التجريبي	SSEE	$r(n-1)$	MSEE	$\sigma_\eta^2 + m\sigma^2$	$\sigma_\eta^2 + m\sigma^2$
خطأ المشاهدة	SSOE	$rn(m-1)$	MSOE	σ_η^2	σ_η^2
المجموع	SSTO	$rnm-1$			

جدول (٢٦-١١) بيانات تجربة تامة العشوائية أحادية العامل بمعاينة جزئية – مثال قساوة الخبز.

وحدة المشاهدة	درجة الحرارة: منخفضة $(i=1)$		متوسطة $(i=2)$		عالية $(i=2)$	
الوحدة k	عجنة ١ $j=1$	عجنة ٢ $j=2$	عجنة ٣ $j=1$	عجنة ٤ $j=2$	عجنة ٥ $j=1$	عجنة ٦ $j=2$
1	4	12	14	9	14	16
2	7	8	13	10	17	19
3	5	10	11	12	15	18
	$Y_{11.} = 16$	$Y_{12.} = 30$	$Y_{21.} = 38$	$Y_{22.} = 31$	$Y_{31.} = 46$	$Y_{32.} = 53$

$Y_{2..} = 69$

$Y_{...} = 214$

ونستخدم إحصاءة الاختبار (26.37a):

$$F^* = \frac{117.72}{16.33} = 7.21$$

جدول (٢٦-١٢) تحاين لمثال قساوة الخبز

مصدر التغير	SS	df	MS
درجة الحرارة (TR)	235.44	2	117.72
خلطة الطحين (EE)	49.00	3	16.33
وحدات المشاهدة (OE)	31.33	12	2.61
المجموع	315.78	17	

لاحظ أن مركبات مجاميع المربعات لاتجمع إلى $SSTO$، وذلك بسبب تدوير الرقم العشري الأخير.

وحُدد مستوى المعنوية $\alpha = 0.10$، ولذا نحتاج إلى $F(.90;2,3) = 5.46$، وبما أن $F^* = 7.21 > 5.46$ فنستنتج H_a، أي أن درجة حرارة الخبز تؤثر على قساوة الخبز. والقيمة $P-$ للاختبار هي 07.

ولاختبار الفروق بين العجنات:

$$H_0: \sigma^2 = 0$$
$$H_a: \sigma^2 > 0$$

نستخدم إحصاءة الاختبار (26.37a) :

$$F^* = \frac{16.33}{2.61} = 6.26$$

ولمستوى معنوية $\alpha = .10$، نحتاج إلى $F(.90;3.12) = 2.61$، وبما أن $F^* = 6.26 > 2.61$،

نستنتج H_a ، أي أن هناك تأثيرات للعجنة على قساوة الخبز. والقيمة P- للاختبار هي 0.01 ولذلك يكون لكل من العجنة المعينة من خلطة طحين، ودرجة الحرارة التي تم بها الخبز، تأثيره على قساوة الرغيف.

تقدير تأثيرات المعالجات

عندما تكون تأثيرات المعالجات مثبتة، نهتم عادة بحدود ثقة لمتوسطات المعالجات، $\mu_{i.} = \mu_{..} + \tau_i$ ، كما نهتم بمقارنات ثنائية ومتضادات بين متوسطات المعالجات. ويمكن الحصول عليها بالطريقة المعتادة باستخدام $MSEE$ كتباين خطأ باعتباره الكمية الواردة في مقام إحصاءة الاختبار لتأثيرات مثبتة للمعالجات. وتكون

درجات الحرية هي تلك المصاحبة لـ *MSEE* أي $r(n-1)$. وتكون حدود الثقة لمتوسط المعالجة $\mu_{i.}$، على سبيل المثال:

$$\bar{Y}_{i..} \pm t[1-\alpha/2;(n-1)r]s\{\bar{Y}_{i..}\} \qquad (26.38)$$

حيث:

$$s^2\{\bar{Y}_{i..}\} = \frac{MSEE}{nm} \qquad (26.38a)$$

وبالمثل، يمكن الحصول على حدي ثقة لمقارنة ثنائية بين متوسطي معالجتين، $D = \mu_{i.} - \mu_{i'.}$ كما يلي:

$$\hat{D} \pm t[1-\alpha/2;(n-1)r]s\{\hat{D}\} \qquad (26.39)$$

حيث:

$$D = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{i'..} \qquad (26.39a)$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2MSEE}{nm} \qquad (26.39b)$$

ويمكن استخدام طرق المقارنة المتزامنة لـ توكي وبونفيروني كالمعتاد.

مثال. لتقدير متوسط قساوة الخبز الذي تم خبزه تحت درجة حرارة منخفضة وبمعامل ثقة 0.95، نحتاج إلى:

$$\bar{Y}_{1..} = 7.67$$

$$S^2\{\bar{Y}_{1..}\} = \frac{16.33}{6} = 2.722 \qquad s\{\bar{Y}_{1..}\} = 1.65$$

$$t(.975;3) = 3.182$$

وبالتالي فإن 95 بالمائة فترة ثقة هي:

$$2.4 = 7.67 - 3.182(1.65) \le \mu_{1.} \le 7.67 + 3.182(1.65) = 12.9$$

وكان مرغوبا ، أيضا، تقدير الفرق في متوسط قساوة الرغيف المخبوز تحت درجتي حرارة عالية ومنخفضة بفترة ثقة 95 بالمائة. وباستخدام (26.39) ،نحتاج إلى:

$$\bar{Y}_{1..} = 7.67 \qquad \bar{Y}_{3..} = 16.5$$

$$\hat{D} = \bar{Y}_{3..} - \bar{Y}_{1..} = 16.5 - 7.67 = 8.83$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2(16.33)}{6} = 5.443 \qquad s\{\hat{D}\} = 2.33$$

وتكون فترة الثقة المرغوبة:

$$1.4 = 8.83 - 3.182(2.33) \le \mu_{3.} - \mu_{1.} \le 8.83 + 3.182(2.33) = 16.2$$

تقدير تباينات

نهتم، أحيانا ، بتقدير σ^2 تباين الوحدات التجريبية و σ_η^2 تباين وحدات المشاهدة. ويتضح، من أي من أعمدة $E\{MS\}$ في جدول (٢٦-١٠) أن ما يلي يشكل مقدرات غير منحازة:

معلمة	مقدر غير منحاز	
σ^2	$s^2 = \dfrac{(MSEE - MSOE)}{m}$	(26.40a)
σ_η^2	$s_\eta^2 = MOSE$	(26.40b)

مثال. نحصل من جدول (٢٦-١٢) على التقديرات الآتية لكل من التباينين في مثال قساوة الخبز:

$$s^2 = \frac{16.33 - 2.61}{3} = 4.57$$

$$s_\eta^2 = 2.61$$

وهكذا يكون التشتت المقدّر بين العجنات أكبر، إلى حد ما، منها بين المشاهدات ضمن عجنة.

تعليقات

١- من الشائع تسمية وحدات المعاينة الجزئية" وحدات مشاهدة"، وذلك تمييزا لها عن الوحدات التجريبية. وهكذا، ففي مثال قساوة الخبز، تكون الوحدات التجريبية هي العجنات من خلطة طحين، بينما وحدات المشاهدة هي الأجزاء المختارة من تلك العجنات لصنع أرغفة الخبز.

٢- قد يكون لوحدات المشاهدة ماهية فيزيائية مختلفة كما في مثال قساوة الخبز، حيث كانت أجزاء من عجنة من خلطة طحين. وقد تشير وحدات المشاهدة، أيضا، إلى مشاهدات مكررة على كامل الوحدة التجريبية. وكمثال على ذلك نذكر المثال المبكر حيث تم قياس زمن عملية التجميع لشخص 10 مرات متتالية بعد حصوله على نوع معين من التدريب.

٣- لاحظ أن نموذج المعاينة الجزئية (26.35) لايحتوي على حدود تفاعل، ذلك لأن حدود الخطأ التجريبي $\varepsilon_{j(i)}$ محضنة ضمن المعالجات، وحدود خطأ المشاهدة محضّنة ضمن الوحدات التجريبية. وكما سبق أن رأينا ، فإن حدود التفاعل لاتنطبق عندما يكون أحد المتغيرات محضّنا ضمن الآخر.

٤- اعتبرنا، فقط، حالة عدد متساو من الوحدات التجريبية (n) مطبقة لكل معالجة، والقيام بعدد ثابت من المشاهدات (m) لكل وحدة تجريبية. ونواجه تعقيدات جدية في حال عدم التوازن، ولايتوفر أي اختبار دقيق لتأثيرات المعالجات. ولمناقشة هذا الموضوع أنظر كتابا متقدما مثل المرجع [26.2].

اعتبارات في مجال التصميم

المشكلة التي تظهر في تصميم تجربة بمشاهدات مكررة هي اختيار عدد الوحدات التجريبية وعدد وحدات المشاهدة. افترض أننا نريد تقدير متوسطات المعالجات $\mu_{i.}$ في دراسة متوازنة بتأثيرات معالجة مثبتة. فيمكن تبيان أن:

$$\sigma^2\{\overline{Y}_{i..}\} = \frac{\sigma_\eta^2 + m\sigma^2}{nm} \tag{26.41}$$

ويبدو واضحا من الصيغة (26.41) أنه إذا كان nm مثبتا (عدد الأرغفة التي تمّ خبزها في التجربة في مثال قساوة الخبز)، فإن $\sigma^2\{\overline{Y}_{i..}\}$ تكون أصغر مايمكن إذا جعلنا m أصغر مايمكن، أي $m = 1$. وهكذا، عندما يكون nm مثبتا ، يتطلب التقدير الأمثل لمتوسطات المعالجات اختيار وحدة مشاهدة واحدة، فقط، لكل وحدة تجريبية، ولهذا تنتشر العينة الكلية بين أكبر عدد ممكن من الوحدات التجريبية.

ويكمن تبرير المعاينة الجزئية في اعتبارات التكلفة. افترض أن تكلفة استخدام وحدة تجريبية في الدراسة هو C_1، وأن التكلفة C_2 للحصول على مشاهدة من الوحدة التجريبية. افترض أن التكلفة الكلية C معطاة بالعلاقة:

$$C = c_1 n + c_2 nm \tag{26.42}$$

فيمكن عندئذ إثبات أنه لأي تكلفة كلية C_o يصبح التباين $\sigma^2\{\overline{Y}_{i..}\}$ أقل ما يمكن عندما يكون :

$$m_{opt} = \frac{\sigma_\eta}{\sigma}\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \qquad (26.43a)$$

$$n_{opt} = \frac{C_0}{c_1 + c_2 m_{opt}} \qquad (26.43b)$$

مثال. بالإشارة إلى مثال قساوة الخبز. افترض أن $c_1 = \$30$ و $c_2 = \$5$، وأن تكلفة المشاهدات الكلية في التجربة محددة بـ $C_0 = \$400$. وتشير تقديرات مسبقة إلى أن $\sigma = 2.2$، $\sigma_\eta = 1.5$ على وجه التقريب. فعندئذ تكون الأحجام المثلى للعينة كما يلي:

$$m_{opt} = \frac{1.5}{2.2}\sqrt{\frac{30}{5}} = 1.67$$

$$n_{opt} = \frac{400}{30 + 5(1.67)} = 10.4$$

وهكذا يمكن استخدام 10 عجنات لكل معالجة بمشاهدتين لكل عجنة.

تعليقات

١- لاحظ عدم تأثر العدد الأمثل لوحدات المشاهدة (m_{opt}) بالتكلفة الكلية المسموحة C_0، ويتأثر العدد الأمثل للوحدات التجريبية، فقط، بقيمة C_0 .

٢- يمكن الحصول على النتيجة (26.43) بحساب القيمة الصغرى لـ:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{i..}\} = \frac{\sigma_\eta^2 + m\sigma^2}{nm}$$

خاضعة للقيد:

$$c_1 n + c_2 nm - C_0 = 0$$

وبكتابة دالة لاغرانج:

$$L = \frac{\sigma_\eta^2 + m\sigma 2}{nm} + \lambda(c_1 n + c_2 nm - C_0)$$

نشتق L بالنسبة الى m, n و λ ونضع المشتقات الجزئية مساوية للصفر. وبعد حل المعادلات الثلاثة آنيا . نحصل على النتيجة (26.43).

(٢٦-٨) المعاينة الجزئية البحتة في ثلاث مراحل

قد لاتتضمن الدراسة في بعض الأحيان مقارنات بين المعالجات، ولكن تتضمن، فقط، معاينة جزئية عند عدة مستويات، اعتبر، على سبيل المثال، مهندس ضبط جودة

يرغب في دراسة مواصفة نوعية معينة لمجمّعات حاسب. ويتم إنتاج تلك المجمعات بدفعات تتضمن كل دفعة منها 2,000 مجمعة. وسيختار المهندس عينة عشوائية من دفعة، ثم سيختار من كل دفعة n مجمعة، وسيحصل في النهاية على m مشاهدة حول المواصفة النوعية لكل مجمعة.

نموذج

افترض أن جميع المتغيرات العشوائية متوزعة طبيعيا وأننا أخذنا عينات متساوية عند كل مرحلة، فسيكون النموذج للمعاينة الجزئية في ثلاث مراحل كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \tau_i + \varepsilon_{j(i)} + \eta_{k(ij)} \qquad (26.44)$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت.

τ_i ، $\varepsilon_{j(i)}$ و $\eta_{k(ij)}$ متغيرات عشوائية مستقلة طبيعية بتوقع 0 لكل منها وتباينات σ_τ^2 على الترتيب.

$i = 1,..., r; j = 1,...n; k = 1,..., m$

وفي توضيحنا هنا يمثل τ_i تأثير الدفعة، ويمثل $\varepsilon_{j(i)}$ تأثير المجمّعة المحضّنة ضمن الدفعة، ويمثل $\eta_{k(ij)}$ تأثير المشاهدة المحضنة ضمن المجمّعة، وبالتالي ضمن الدفعة.

تتوزع المشاهدات Y_{ijk} لنموذج المعاينة الجزئية (26.44) توزيعا طبيعيا بمتوسط وتباين:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{..} \qquad (26.44a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma_Y^2 = \sigma_\tau^2 + \sigma^2 + \sigma_\eta^2 \qquad (26.44b)$$

وتوجد ارتباطات مختلفة بين مشاهدتين من الدفعة نفسها.

وهناك تقابل بين نموذج المعاينة الجزئية (26.44) ونموذج المعاينة الجزئية (26.35) لدراسة أحادية العامل τ_i ، باستثناء أننا نفترض هنا أن τ_i مستقلة وتتوزع $N(0,\sigma_\tau^2)$ وأنها مستقلة عن $\varepsilon_{j(i)}$ و $\eta_{k(ij)}$. ويكون الاختلاف الوحيد، رسميا ، بين النموذجين (26.44) و (26.8) هو أن τ_i مثبتة في أحدهما وعشوائية في الآخر. وهناك تقابل، أيضا، بين نموذج المعاينة الجزئية والنموذج الحاضن حيث تكون تأثيرات كل من

العامل A والعامل B عشوائية.

تحليل التباين

يستخدم تحليل التباين لنموذج المعاينة الجزئية البحتة (26.44) بحاميع المربعات نفسها كما سبق، ونعني تلك الموجودة في (26.36). وجدول التحاين هنا هو نفسه كما في الجدول (٢٦-١٠)، ويكون توقع متوسط المربعات القابل للتطبيق هنا هو ذلك الخاص بتأثيرات τ_i عشوائية.

تقدير $\mu_{..}$

غالبا مانهتم بتقدير المتوسط الإجمالي $\mu_{..}$ في حالة المعاينة الفرعية البحتة. متوسط العملية للمواصفة النوعية لمجمّعة حاسب (في مثالنا آنف الذكر) والمقدِّر النقطي لـ $\mu_{..}$ في النموذج (26.44) هو $\bar{Y}_{..}$ ويمكن تبيان أن التباين هو:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_{..}\}=\frac{\sigma_\tau^2}{r}+\frac{\sigma^2}{rn}+\frac{\sigma_\eta^2}{rnm}=\frac{nm\sigma_\tau^2+m\sigma^2+\sigma_\eta^2}{rnm} \tag{26.45}$$

وكمقدّر غير منحاز لهذا التباين نجد:

$$s^2\{\bar{Y}_{..}\}=\frac{MSTR}{rnm} \tag{26.46}$$

ويكون $(1-\alpha)$ حدي ثقة لـ $\mu_{..}$:

$$\bar{Y}_{..}\pm(1-\alpha/2;r-1)s\{\bar{Y}_{..}\} \tag{26.47}$$

توَسِعات المعاينة الجزئية

اقتصرت مناقشتنا للمعاينة الجزئية على تصاميم تامة العشوائية وثلاث مراحل معاينة في حالة المعاينة الجزئية البحتة. ومن الواضح أنه يمكن استخدام المشاهدات المكررة في أي تصميم تجريبي، وأنه يمكن تنفيذ المعاينة الجزئية بأي عدد من المراحل. وسنتابع في الفصل القادم طرقا ميسرة لمعالجة مثل هذه الحالات الأكثر تعقيدا .

مراجع ورد ذكرها

[26.1] *MINITAB Refrence Manual, Release* 7, State College, Pa.: Minitab, Inc., 1989.

[26.2] Searle, S.R. *Linear Models for Unbalanced Data.* New York: John Wiley & Sons, 1987.

مسائل

(٢٦-١) تساءل أحد الطلاب "ماهو الفرق الحاصل سواء افترضنا أن العوامل مثبتة أم أنها عشوائية طالما أن متوسط المربعات في جدول تحليل التباين لتصميم حاضن أحادي العامل يبقى نفسه في الحالتين ؟" علّق.

(٢٦-٢) صرّح باحث أنه يفضل تحليل دراسة حاضنة ثنائية العامل كدراسة متصالبة لأنه يستطيع بذلك عزل المزيد من مصادر التغير. علّق على استراتيج الباحث هذا.

(٢٦-٣) اعتبر دراسة ثلاثية العامل، حيث العامل C محضن ضمن عامل B، والعامل B كان بدوره محضن ضمن عامل A، و $a = b = c = 2$ وضح في هيئة الجدول (٢٦-٢) الاختلاف بين التصميم الحاضن هذا والتصميم المتصالب المقابل.

(٢٦-٤) انتاج مصنع القوارير. درس مهندس انتاج تأثيرات طراز الآلة (عامل A) وعامل التشغيل (عامل B) على الناتج في مصنع للقوارير. وقد تم استخدام ثلاث آلات لانتاج القوارير مختلفة الطراز. كما استخدم إثني عشر عامل تشغيل. و خُصّص أربعة عمال تشغيل لكل آلة واشتغل كل منهم وردية من ست ساعات. وقد تمّ تجميع البيانات عن عدد القطع التي أنتجتها كل آلة وعامل ولمدة أسبوع. وتمثل البيانات التالية عدد القطع المنتجة في الساعة وذلك لكل يوم من أيام العمل في أسبوع:

الآلة i	1				2				3			
عامل التشغيل j	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
اليوم: k = 1	65	68	56	45	74	69	52	73	69	63	81	67
k = 2	58	62	65	56	81	76	56	78	83	70	72	79
k = 3	63	75	58	54	76	80	62	83	74	72	73	73
k = 4	57	64	70	48	80	78	58	75	78	68	76	77
k = 5	66	70	64	60	68	73	51	67	80	75	70	71

أ - أوجد الرواسب لنموذج التصميم الحاضن (26.8) بتأثيرات عوامل مثبتة وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. قم، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي نتائجك حول صلاحية النموذج (26.8)؟

ب - قم بإعداد رسم نقطي مصطف للرواسب لكل آلة. هل تؤيد هذه الرسوم فرضية ثبات تباين الخطأ ؟ ناقش.

(٢٦-٥) بالإشارة إلى إنتاج مصنع القوارير مسألة (٢٦-٤)، افترض أن نموذج التصميم الحاضن (26.8) بتأثيرات عوامل مثبتة هو النموذج المناسب.

أ - هل يمكن تمييز تأثيرات عامل التشغيل عن تأثيرات الوردية في هذه الدراسة؟ ناقش.

ب - أرسم متوسطات المعالجات المقدَّرة $\bar{Y}_{ij.}$ في هيئة الشكل (٢٦-٢). هل يبدو أن هناك تأثيرات لأي من العوامل؟.

جـ - اكتب جدول تحليل التباين.

د - اختبر ما إذا كان متوسط الناتج لطرز الآلات الثلاث مختلفا أم لا. استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

هـ - اختبر ما إذا كان متوسط الانتاج للعمال المخصصين لكل آلة مختلفا أم لا. استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟ ماذا يتضمن استنتاجك حول متوسط الإنتاج للعمال الأربعة المخصصين للآلة؟ إشرح.

و - لكل آلة قم باختبار منفصل حول ما إذا كانت متوسطات الإنتاج للعمال الأربعة مختلفة أم لا. ولكل اختبار، استخدم $\alpha = .01$، أعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.

ز - مستخدما متباينة بونفيروني، ماهو مستوى المعنوية العائلي

للاختبارات المذكـورة في د، هـ، و، عندمـا نعتبرهـا معـا ؟ لخص مجموعة النتائج التي توصلت إليها في اختباراتك تلك.

(٢٦-٦) بالاشارة إلى إنتاج مصنع القوارير المسألتين (٢٦-٤) ، (٢٦-٥).

أ - قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات الإنتاج لـلآلات الثـلاث. استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 0.95. أعرض نتائجك.

ب - قم بجميع المقارنات الثنائية بـين متوسـطات الإنتـاج للعمـال الأربعـة المخصصين للآلة 1 استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 0.95 أعرض نتائجك.

جـ- خبرة العامل رقـم 4 المخصـص للآلـة رقـم 1 أقـل نسـبيا مـن خـبرة العمال الثلاثة الآخرين. قدِّر المقارنة:

$$L=\frac{\mu_{11}+\mu_{12}+\mu_{13}}{3}-\mu_{14}$$

مستخدما 0.99 فترة ثقة. فسِّر تقديرك بفترة.

(٢٦-٧) بالإشارة إلى إنتاج مصنع القواريـر مسـألة (٢٦-٤)، افـترض أنـه تم اختيـار العمال الأربعة المخصصين لكل آلة من عدد كبير من عمال التشغيل.

أ - كيف يمكن تعديل نموذج التصميم الحاضن (26.8) ليتلاءم مـع هـذه الحالة؟.

ب - أوجد التقدير النقطي لتباين العامل المشغل σ_β^2 .

جـ - اختبر ما إذا كان $\sigma_\beta^2=0$ أم لا. استخدم $\alpha=.10$. أعـرض البدائـل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟

د - اختبر ما إذا كانت متوسطات الإنتاج لطُرز الآلات الثلاث مختلفـة أم لا. استخدم $\alpha=.10$ اعرض البدائل، قاعدة القرار والنتيجـة. مـاهي القيمة -P للاختبار؟

هـ- قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسـطات الإنتـاج لـلآلات الثـلاث. استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 0.90 أعرض نتائجك.

و – اختبر الفرض بأن $\beta_{j(i)}$ لجميع الآلات لها التباين نفسه. استخدم اختبار هارتلي (فقرة ١٦-٢) بمستوى معنوية $\alpha = .01$ أعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة.

(٢٦-٨) بالإشارة إلى إنتاج مصنع القوارير مسألة (٢٦-٤) افترض أن العمال الأربعة المخصصين لكل آلة تم اختيارهم عشوائيا من عدد كبير من عمال التشغيل، وأن الآلات الثلاث، أيضا، قد تم اختيارها من عدد كبير من الآلات.

أ – كيف يمكن تعديل نموذج التصميم الحاضن (26.8) ليوافق هذه الحالة؟.

ب – أوجد تقديرا نقطيا لكل من تباين العامل σ_β^2 وتباين الآلة σ_α^2 على الترتيب.

جـ – اختبر ما إذا كان σ_α^2 يساوي صفرا . استخدم $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة P– للاختبار؟.

د – يهتم مهندس الإنتاج بتقدير المتوسط العام $\mu_{..}$ بـ 95 بالمائة فترة ثقة أوجد فترة الثقة المرغوبة، واعط تفسيرا لها.

(٢٦-٩) **الوعي الصحي**. شاركت ثلاث ولايات (عامل A) في دراسة للوعي الصحي، ابتكرت كل ولاية، وبصورة مستقلة، برنامجا للوعي الصحي. اختيرت ثلاث مدن (عامل) داخل كل ولاية للمشاركة واعتبر عشوائيا خمس أسر من كل مدينة لتقويم فعالية البرنامج. وقد تمت متابعة جميع أفراد الأسرة المختارة قبل وبعد المشاركة في البرنامج وشُكّل دليل مركب لكل أسرة يقيس أثر برنامج الوعي الصحي. وفيما يلي بيانات عن الوعي الصحي (كلما كبرت قيمة الدليل كلما كان الوعي أكبر).

أ – أوجد الرواسب لنموذج التصميم الحاضن (26.31) بتأثيرات مثبتة للعوامل وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. قم أيضا بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج (26.8)؟.

ب- قم بإعداد رسوم نقطية مصطفة لكل ولاية. هـل تؤيـد تلـك الرسـوم افتراض ثبات تباين الخطأ ؟ ناقش.

الولاية i		1			2			3		
عامل التشغيل j		1	2	3	1	2	3	1	2	3
اليوم:	k = 1	42	26	34	47	56	68	19	18	16
	k = 2	56	38	51	58	43	51	36	40	28
	k = 3	35	42	60	39	65	49	24	27	45
	k = 4	40	35	29	62	70	71	12	31	30
	k = 5	28	53	44	65	59	57	33	23	21

(٢٦-١٠) بالإشارة إلى **الوعي الصحي** مسألة (٢٦-٩) افترض أن نمودج التصميـم الحاضن (٢٦-٩) بتأثيرات مثبتة هو النموذج المناسب.

أ - ارسم بيانيا متوسطات المعالجات المقدّرة $\bar{Y}_{ij.}$ في هيئة الشكل (٢٦-٢٠) هل يبدو أن هناك أية تأثيرات عوامل موجودة؟

ب- أكتب جدول تحليل التباين.

جـ- اختبر ما إذا كانت متوسطات الوعي، في الولايات الثلاث مختلفة أم لا. استخدم $\alpha = .05$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجـة. مـاهي القيمة-P للاختبار؟.

د - اختبر ما إذا كانت متوسطات الوعي في المدن الثلاث ضمن كل ولاية مختلفة أم لا، استخدم $\alpha = .05$. أكتب البدائل، قـاعدة القـرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار؟ ماذا يتضمن استنتاجك حـول متوسطات الوعي في المدن الثلاث في الولاية؟ إشرح.

هـ - باستخدام متباينة بونفيروني مـاهو مستوى المعنوية العائلي للاختبارات في الأجزاء جـ، د عندما نعتبرها معا ؟ لخص مجموعة الاستنتاجات التي توصلت إليها في اختباراتك.

(٢٦-١١) بالاشارة إلى الوعي الصحي المسائل (٢٦ -٩)، (٢٦-١٠)

أ – قدّر μ_{11} بـ 0.95 فترة ثقة. فسر تقديرك بفترة.

ب– أحصل على فترات ثقة منفصلة لكل من $\mu_{1.}$، $\mu_{2.}$ و $\mu_{3.}$ كل منها بمعامل 0.99 اعط تفسيرا لهذه التقديرات.

جـ– أوجد فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات الولايات. استخدم طريقة توكي ومعامل ثقة عائلي 0.90. لخص نتائجك.

د – من المرغوب الحصول على 0.95 فترة ثقة لـ $D = \mu_{11} - \mu_{32}$ باعتبار أن هاتين المدينتين حجمين متقاربين، اعط تفسيرا للتقدير بفترة.

(٢٦–١٢) بالإشارة إلى **الوعي الصحي** مسألة (٢٦–٩) افترض أن المدن الثلاث ضمن كل ولاية قد اختيرت عشوائيا من بين كل المدن في الولايات،

أ – كيف يمكن تعديل نموذج التصميم الحاضن (26.8) ليلائم هذه الحالة؟.

ب– أوجد تقديرا نقطيا لتباين المدينة σ^2_{β}. هل هناك أي شيء غير مألوف هنا حول ذلك التقدير؟.

جـ– اختبر ما إذا كان σ^2_{β} يساوي الصفر أم لا. استخدم $\sigma = .10$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟.

د – اختبر ما إذا كانت متوسطات الوعي مختلفة في الولايات الثلاث أم لا. استخدم $\alpha = .10$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة ما هي القيمة -P لهذا الاختبار؟.

هـ – أوجد فترات ثقة لجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات الولايات. استخدم طريقة توكي ومعامل ثقة عائلي 90 بالمائة لخص نتائجك.

و– اختبر الفرض بأن $\beta_{j(i)}$ لجميع الولايات لها التباين نفسه σ^2_{β}. استخدم اختبار هارتلي (فقرة ٢٦–٢) بمستوى معنوية $\alpha = .05$. أكتب البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.

(٢٦–١٣) بالإشارة الى **الوعي الصحي** مسألة (٢٦–٩) افترض أن المدن الثلاث داخل كل ولاية وأن الولايات الثلاث قد اختيرت عشوائيا .

أ -كيف يمكن تعديل نموذج التصميم الحاضن (26.8) ليلائم هذه الحالة؟.

ب- أوجد تقديرا نقطيا لكل من تباين المدينة وتباين الولاية، σ_β^2 و σ_α^2، على الترتيب.

جـ- اختبر ما إذا كانت $\sigma^2{}_\alpha$ تساوي صفرا أم لا، استخدم $\alpha = .10$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟.

د - قدر المتوسط الإجمالي لدليل الوعي الصحي μ. مستخدما 99 بالمائة فترة ثقة. فسّر تقديرك هذا.

(٢٦-١٤) **الرقابة الداخلية.** تدير إحدى الشركات الكبيرة للبيع بالمفرق ثلاثة مراكز إقليمية للمحاسبة. (عامل A). ويوظف المركز 1 ثلاثة فرق لمراجعة الحسابات بينما يوظف كل من المركزين الآخرين فريقين للمراجعة، وإحدى مهام كل مركز أن يراجع ماإذا كانت رقابة داخلية معينة تعمل بكفاءة في عملية إخراج جداول المرتبات. وقد طُلبت بيانات عن النسبة المئوية للمعاملات التي وُجد أن الرقابة الداخلية فيها كانت مناسبة وذلك لكل فريق في كل إقليم وعن الشهرين السابقين. وقد وردت بيانات ثلاثة شهور في إحدى الحالات وبيانات شهر واحد، فقط، في حالة أخرى. وقد استخدم تحويل قوس الجيب $\sqrt{p}$ وصولا إلى استقرار تباينات الخطأ. وكانت البيانات بعد التحويل كالتالي:

الاقليم i		1			2		3	
الفريق j		1	2	3	1	2	1	2
الشهر:	k = 1	151.6	143.2	131.4	163.8	151.6	157.0	160.0
	k = 2	141.2	139.4	136.0	154.2		147.2	151.6
	k = 3	149.4						

أ - أكتب نموذج الانحدار التام لهذه الحالة قياسا على النموذج التام التوضيحي (26.31) مستخدما 1،-1، 0 كمتغيرات مؤشرة.

ب- قم بتوفيق النموذج وأوجد الرواسب. أرسم الرواسب في مقابل القيم

التوفيقية. قم، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج؟

(٢٦-١٥) بالإشارة إلى **الرقابة الداخلية** مسألة (٢٦-١٤) افترض أن نموذج التصميم الحاضن (26.8) بتأثيرات عوامل مثبتة بعد تعديله من أجل التحضين غير المتساوي والتكرارات غير المتساوية هو النموذج المناسب.

أ - اختبر التأثيرات الرئيسة للأقاليم مستخدما إحصاءة الاختبار (8.71) ومستوى معنوية $\alpha = .025$. أعرض البدائل، النموذج المخفض، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة-P للاختبار؟

ب- اختبر تأثيرات فرق المراجعة ضمن الإقليم مستخدما إحصاءة الاختبار (8.71) ومستوى معنوية $\alpha = .025$، أعرض البدائل، النموذج المخفض، قاعدة القرار والنتيجة.

جـ- قدّر $D = \mu_{1.} - \mu_{2.}$ (بوحدات مابعد التحويل) بـ 98 بالمائة فترة ثقة.

(٢٦-١٦) سأل أحد الطلبة في الفصل، لماذا لاتأخذ جميع التجارب بالمشاهدات المتكررة باعتبار أن جميع أساليب القياس هي، إلى حد ما، غير مضبوطة؟ علّق.

(٢٦-١٧) بالإشارة إلى **لون الاستبيان** مسألة (١٤-١١) افترض أن التجربة قد نفّذت بتوزيع الملصقات على مواقف السيارات المخصصة في أسبوعين مختلفين مع ملاحظة معدلات الاستجابة لكل أسبوع. وفيما يلي مجموعة البيانات الكاملة عن معدلات الاستجابة.

اللون i		١- الأزرق					٢- الأخضر					٣- برتقالي				
موقف j		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
الأسبوع	k=1	25	26	31	27	35	34	29	25	31	29	31	25	27	29	28
	k=2	32	23	29	24	37	33	27	22	34	25	35	28	25	25	31

أ - أوجد الرواسب لنموذج المعاينة الجزئية (26.35) بتأثيرات معالجات مثبتة، وارسمها، في مقابل القيم التوفيقية. قم أيضا بإعداد رسم

احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج (26.35)؟.

ب- اختبر الفرض بأن $\varepsilon_{ij(k)}$ لها التباين نفسه σ^2 من أجل جميع الألوان. استخدم اختبار هارتلي (فقرة ١٦-٢) بمستوى معنوية $\alpha = .10$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

(٢٦-١٨) بالإشارة إلى **لون الاستبيان** مسألة (٢٦-١٧) افترض أن نموذج المعاينة الجزئية بتأثيرات معالجات (26.35) مثبتة هو النموذج المناسب.

أ - أكتب جدول تحليل التباين.

ب- اختبر ما إذا كانت تأثيرات لون الاستبيان مهمة أم لا؟ استخدم $\alpha = .05$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة ماهي القيمة -P للاختبار؟.

جـ- اختبر ما إذا كانت هناك فروق بين المواقف ضمن الألوان - أم لا، أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة، ماهي القيمة -P للاختبار؟.

د - قدِّر متوسط معدل الاستجابة للاستبيانات الزرقاء بمعامل ثقة 95 بالمائة.

هـ - أوجد تقديرات نقطية لكل من σ^2 و σ_η^2. أي التباينين يبدو أكبر هنا؟

(٢٦-١٩) لدى أحد الإقتصاديين مبلغ $20,000 مخصصة لدراسة مقارنة بين أقساط الديون المستحقة على أسر حضرية تمتلك طفلين أو أقل، وتلك المستحقة على أسر حضرية تمتلك أكثر من طفلين في ولاية. وكانت تكلفة أن تتضمن الدراسة مدينة هي 1,000 $ ،وتكلفة أن تتضمن الدراسة أسرة هي $50 .كما كان عدد الأسر التي تمتلك طفلين أو أقل مساو لعدد الأسر التي تمتلك أكثر من طفلين، افترض أن دالة التكلفة هي كما وردت في (26.24). وكان الهدف الأول للدراسة هو تقدير متوسط الدين لكل من نوعي الأسر بأكبر دقة ممكنة.

أ - إذا كانت القيم التقديرية المبدئية للانحرافات المعيارية هي $\sigma = 150$ و$\sigma_\eta = 300$ فما هو عدد المدن والأسر التي ينبغي أن تشملها الدراسة؟

ب- كيف تتغير حجوم العينات إذا كان $\sigma = 400$ و$\sigma_\eta = 200$؟

(٢٦-٢٠) **مستويات حمض في نبات.** اختيرت عشوائيا أربع نبتات من الفصيلة نفسها في تجربة لمعرفة تركيز حمض معين. واختيرت ثلاث ورقات من كل فئة عشوائيا . وتم الحصول على ثلاثة قياسات منفصلة لتركيز الحمض من كل ورقة فكانت البيانات كالتالي:

4			3			2			1			نبات i
3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	ورقة j
												قياس التركيز
11.3	8.9	7.3	16.5	19.5	15.3	11.9	19.0	14.1	18.3	16.5	11.2	k = 1
10.9	9.4	7.8	17.2	20.1	15.9	12.4	18.5	13.8	18.7	16.8	11.6	k = 2
10.5	9.3	7.0	16.9	19.3	16.0	12.0	18.2	14.2	19.0	16.1	12.0	k = 3

أوجد الرواسب لنموذج المعاينة الجزئية ذي ثلاثة مراحل (26.44)، وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. قم، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج (26.44) ؟

(٢٦-٢١) بالإشارة إلى **مستويات حمض في نبات** مسألة (٢٦-٢٠) افترض أن نموذج المعاينة الجزئية (26.44) ذا المراحل الثلاث هو النموذج المناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب- اختبر ما إذا كانت هناك تغيرات أم لا في متوسطات التركيز من نبتة إلى أخرى. استخدم $\alpha = .05$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة ماهي القيمة -P للاختبار؟

جـ- اختبر ماإذا كانت هناك تغيرات في متوسطات مستويات التركيز بين الأوراق من النبتة نفسها. استخدم $\alpha = .05$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة ماهي القيمة-P للاختبار؟

د - قدِّر المتوسط الإجمالي للتركيز في جميع النبتات من تلك الفصيلة.

استخدم 95 بالمائة فترة ثقة.

هـ – أوجد التقديرات النقطية لـ σ^2 و σ_τ^2 و σ_η^2. أي مركبات التباين تبدو أكثر أهمية في التباين الكلي σ_Y^2؟

(٢٦-٢٢) **الاتساق الكيميائي**. رغبت إحدى الشركات الكيميائية في دراسة اتساق قوة أحد منتجاتها الكيميائية السائلة. يُعدّ المنتج على شكل عجنات في راقودات ضخمة ثم يوضع بعد ذلك في براميل. تخزن البراميل بعد ذلك لفترة من الزمن في مستودع. ولاختبار اتساق قوة المنتج الكيميائي، اختار محلل عشوائيا خمس عجنات مختلفة من المنتج من المستودع ثم اختار عندئذ أربعة براميل من كل عجنة عشوائيا. ثم أخذ ثلاثة قياسات من كل برميل وفيما يلي بيانات القوة:

أ – أوجد الرواسب لنموذج المعاينة الجزئية (26.44) ذي المراحل الثلاث، وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. قم، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج (26.44)؟

عجنة i	1				2				3			
برميل j	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
قياس التركيز												
k=1	2.3	2.5	2.6	2.4	2.8	2.7	2.6	2.4	3.0	3.4	2.9	3.1
k=2	2.1	2.3	2.4	2.6	2.9	2.5	2.6	2.8	3.1	3.3	3.0	2.8
k=3	2.0	2.5	2.7	2.3	2.6	2.8	2.8	2.6	2.9	3.0	3.2	3.2

عجنة i	4				5			
برميل j	1	2	3	4	1	2	3	4
قياس التركيز								
k=1	2.5	2.8	3.1	2.7	3.6	3.8	3.7	3.9
k=2	2.8	3.0	2.8	2.9	3.7	3.8	3.5	3.5
k=3	2.6	2.7	2.9	2.6	3.4	.5	3.5	3.7

ب– اختبر الفرض بأن $\varepsilon_{k(ij)}$ لها التباين نفسه σ^2 من أجل جميع العجنات.

استخدم اختبار هارتلي (فقرة ١٦-٢) بمستوى معنوية $\alpha = .01$.

أكتب البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.

(٢٦-٢٣) بالإشارة إلى **الاتساق الكيميائي** مسألة: (٢٦-٢٢) افترض أن نموذج

المعاينة الجزئية ثلاثي المراحل هو النموذج المناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب- اختبر ماإذا كانت هناك تغيرات أم لا في متوسط القوة بين العجنات. استخدم $\alpha = .01$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة ماهي القيمة-P للاختبار؟.

جـ- اختبر ما إذا كانت هناك تغيرات أم لا في متوسط القوة بين البراميل ضمن العجنات، استخدم $\alpha = .01$. أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة، ماهي القيمة-P للاختبار؟.

د - أوجد 99 بالمائة فترة ثقة للمتوسط الإجمالي لقوة المنتج الكيميائي.

هـ - أوجد تقديرا نقطيا لـ σ^2، σ_τ^2 و σ_η^2. أي مركبات التباين تبدو الأكثر أهمية في التباين الكلي σ_Y^2.

تمارين

(٢٦-٢٤) استنبط (26.23) بتربيع (26.12) ثم الجمع فوق جميع المشاهدات.

(٢٦-٢٥) استنبط (26.16b) من (26.13b).

(٢٦-٢٦) استنبط (26.17) لتصميم حاضن متوازن ثنائي العامل.

(٢٦-٢٧) اعتبر تصميما حاضنا متزنا ثنائي العامل ، حيث للعامل A تأثيرات مثبتة وللعامل B (محضن ضمن العامل A) تأثيرات عشوائية.

أ - استنبط $\sigma^2\{\bar{Y}_{i..}\}$ و $\sigma^2\{\bar{Y}_{...}\}$.

ب- أوجد مقدرا نقطيا غير منحاز لـ σ_B^2.

(٢٦-٢٨) استنبط تباين (26.41) لنموذج المعاينة الجزئية (26.35) بتأثيرات معالجات مثبتة.

(٢٦-٢٩) (في حاجة لحساب التفاضل والتكامل) استنبط الحجوم المثلى للعينات في (26.43) (توضيح : انظر التعليق 2 في صفحة).

(٢٦-٣٠) استنبط التباين (26.41) لنموذج المعاينة الجزئية ثلاثي المراحل مستخدما توقع متوسط المربعات في الجدول (٢٦-١٠). بيّن أن التباين المقدَّر (26.46) هو مقدَّر غير منحاز للتباين في (26.45).

مشاريع

(٢٦-٣١) بالإشارة إلى مجموعة بيانات **تجربة تأثير دواء**، اعتبر، فقط، الجزء ١ من الدراسة والمستوى ٤ للجرعة بمعنى، خذ فقط المشاهدات التي يكون المتغير ٢ فيها مساويا 1، والمتغير 0 فيها مساويا 4. افترض أن معدل الضغط الابتدائي للرافعة (عامل A) له تأثيرات مثبتة وأن الفئران تشكل العامل الثاني (عامل D) وله تأثيرات عشوائية.

أ - أكتب النموذج الملائم لهذه لدراسة المحضنة ثنائية العامل.

ب- أوجد الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية، قم، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج؟.

(٢٦-٣٢) بالإشارة إلى مجموعة بيانات **تجربة تأثير دواء** وإلى المشروع (٢٦-٣١) افترض أن نموذج التصميم الحاضن (26.8) ، حيث $\beta_{j(i)}$ و $\varepsilon_{k(ij)}$ عشوائيان، هو النموذج المناسب.

أ - أكتب جدول تحليل التباين.

ب- اختبر ما إذا كان متوسط معدل ضغط الرافعة يختلف باختلاف فئات المعدل الابتدائي الثلاث أم لا، استخدم $\alpha = .05$، اكتب البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة ماهي القيمة P- للاختبار.

جـ - اختبر ما إذا كان متوسط معدل ضغط الرافعة مختلفا للفئران ضمن فئات المعدل الابتدائي، استخدم $\alpha = .05$. أكتب البدائل قاعدة القرار والنتيجة ماهي القيمة P- للاختبار؟ ماذا تتضمن استنتاجاتك حول الفئران الأربع في فئة المعدل الابتدائي البطيء؟

د- قم بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات معدل ضغط الرافعة لفئات المعدل الابتدائي الثلاث، استخدم طريقة توكي - بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة.

هـ - أوجد تقديرا نقطيا لتباين مابين الفئران.

(٢٦-٣٣) بالإشارة الى مجموعة بيانات **تجربة تأثير دواء**. اعتبر، فقط، الجزء ٢ من الدراسة والمستوى 3 للجرعة، بمعنى، خذ نقط المشاهدات التي يكون

المتغير ٢ فيها مساويا 2 والمتغير ٥ فيها مساويا 3. افترض أن فئات معدل ضغط الرافعة الابتدائـي هـي المعالجـات بتأثيرات مثبتـة، وأن الفـئران هـي الوحدات التجريبية بمشاهدتين من كل وحدة تجريبية.

أ - أكتب النموذج المناسب لهذه الدراسة أحادية العامل بمعاينة جزئية.

ب- أوجد الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. قم، أيضا، بإعداد رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج؟

جـ- اختبر الفـرض أن $\varepsilon_{j(i)}$ لهـا التبـاين نفسـه σ^2، وذلـك مـن أجـل جميـع معـدلات ضغـط الرافعـة. استخدم اختبـار هـارتلي (فقـرة ١٦-٢) بمستوى معنوية $\alpha = .01$، أكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

(٢٦-٣٤) بالإشارة إلى مجموع بيانات **تجربة تأثير دواء** والمشروع (٢٦-٣٣) افترض أن نموذج المعاينة الجزئية أحادية العـامل (26.23) بتأثيرات معالجـات مثبتـة هو النموذج المناسب.

أ - أكتب جدول تحليل التباين.

ب- اختبر ما إذا كان متوسط معدل ضغط الرافعة مختلفا في فئـات المعـدل الابتدائي الثلاث أم لا، استخدم $\alpha = .01$. أكتـب البدائـل، قـاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة-P للاختبار؟

جـ- اختبر ما إذا كانت هناك فروق أم لا في متوسط معدل ضغط الرافعة بـين الفـئران استخدم $\alpha = .01$. أكتـب البدائـل، قـاعدة القـرار والنتيجة. ماهي القيمة-P للاختبار؟

د - قم بجميع المقارنات الثنائية بـين متوسـطات معـدلات ضغـط الرافعـة لفئات المعدل الابتدائي الثلاث - استخدم طريقة توكـي بمعـامل ثقـة عائلي 95 بالمائة. لخص نتائجك.

هـ - أوجد تقديرات نقطية لـ σ^2 و σ_η^2.

قواعد تطوير نماذج تباين وجداول للتصاميم المتوازنة

نقدم ونوضح في هـذا الفصـل قواعـد تطويـر نمـاذج للتصـاميم العامليـة الحاضنـة و/أو المتصالبة، وقواعد إيجاد مجـاميع المربعـات اللازمـة ودرجـات الحريـة لمتوسـط المربعـات الموافق، وقواعد إيجاد القيم المتوقعة لمتوسط المربعات. وتنطبق هذه القواعد علـى جميـع التصاميم المتوازنة بتكرارين أو أكـثر مـع عـدم وجـود تفـاعلات، أي مـع افـتراض أن تأثيرات التفاعلات مساوية للصفر.

وكما لوحظ سابقا ، يكون التصميم متوازنا في الحالة الحاضنة عندمـا(١) يبقـى عدد مستويات العامل المحضون نفسـه مـن أجـل كـل مسـتوى مـن مسـتويات العـامل الحاضن(2) يكـون عـدد التكـرارات ثابتـا للـتراكيب المختلفـة مـن العوامـل. ويكـون التصميم متوازنا في الحالة المتصالبة عندما يكون عدد التكرارات ثابتا لجميع تراكيـب العوامل. ويتطلب الاتزان مع تصميم معاينة فرعية أن تبقى حجوم العينات الفرعية عند كل مرحلة معاينة ثابتة.

وسنبين في الفقرة ٢٧ ـ ٦ أن تعديلا طفيفا للقواعـد يجعلهـا قابلـة للتطبيـق في تصاميم متوازنة بدون تكرارات و/أو مع افتراض بعض حدود التفاعل مساوية للصفر.

(٢٧ ـ ١) قاعدة لتطوير نموذج

نبدأ بتقديم قاعدة لتطوير نموذج تصميم عـاملي حـاضن و/أو متصـالب، وهـذه القاعدة قابلـة للتطبيـق عندمـا لانفـترض أيـة تفـاعلات مسـاوية للصفـر. وسنسـتخدم كتوضيح مثال مدرسة التدريب في الجدول (٢٦ـ١)، حيث تمت دراسة تأثيرات ثلاث

مدارس. (عامل A) وتأثيرات مدربين اثنين ضمن المدرسة (عامل B) مع أخذ تكرارين في كل حالة.

قاعدة (٢٧ - ١)

خطوة ١: *ضع ثابتا إجماليا وحدّ تأثير رئيس لكل عامل آخذا في الاعتبار حالة تحضين عامل ضمن عامل آخر.*

مثال. لمثال مدرسة التدريب نضع في النموذج:

$$\mu_{..} \qquad \alpha_i \qquad \beta_{j(i)} \tag{27.1}$$

لاحظ أن العامل B محضن ضمن العامل A.

خطوة ٢: *ضع جميع حدود التفاعل ماعدا تلك التي تتضمن كلا من العامل الحاضن والعامل المحضون.*

مثال. بما أن العامل B محضن ضمن العامل A ، فلا يشمل النموذج التفاعل AB (حد التفاعل الممكن الوحيد هنا).

خطوة ٣: *التفاعلات بين عامل محضن وعامل آخر متصالب معه تكون بدورها محضنة دائما .*

مثال. لاتظهر هذه الحالة في مثال مدرسة التدريب.

خطوة ٤: *ضع حد الخطأ وهو محضن ضمن جميع العوامل.*

مثال. لمثال مدرسة التدريب، يكون حد الخطأ $\varepsilon_{k(ij)}$ ويكون النموذج المناسب هو النموذج التالي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)} \tag{27.2}$$
$$i = 1,2,3;\ j = 1,2;\ k = 1,2$$

(٢٧ - ٢) قاعدة إيجاد مجاميع المربعات ودرجة الحرية

بما أن العوامل المحضنة وتصاميم المعاينة الفرعية قد تتطلب مجاميع مربعات لم نناقشها حتى الآن، فسنعتبر الآن قاعدة لإيجاد مجاميع المربعات ودرجات الحرية المصاحبة لها. *وهذه القاعدة قابلة للتطبيق في جميع التصاميم المتوازنة بتكرارين أو أكثر، مع عدم وجود حدود تفاعل نفترضها مساوية للصفر.*

توضيح

وأحسن طريقة لشرح قاعدة إيجاد مجاميع المربعات ودرجات الحرية المصاحبة لها هي شرحها بمثال. وسنستمر في اعتبار مثال مدرسة التدريب، حيث العامل B محضن ضمن العامل A. ولايهم في هذه القاعدة ما إذا كانت تأثيرات العوامل مثبتة أو عشوائية.

قاعدة (٢٧ - ٣) خاصة بالصيغ التعريفية لمجاميع المربعات

خطوة ١. *اكتب معادلة النموذج.*

مثال. أعطيت معادلة النموذج لمثال مدرسة التدريب سابقا ـ سنبين هذا النموذج الآن وصيغته العامة حيث يوجد a مستوى للعامل A، وb مستوى للعامل B و n تكرارا.

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \mu_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)}$$

$$i = 1,\ldots, a; j = 1,\ldots, b; k = 1,\ldots,n$$

خطوة ٢. *اكتب لكل حد من حدود النموذج رمز ss المصاحب فيما عدا الحد العام الثابت.*

مثال. نقوم بهذه الخطوة لمثال مدرسة التدريب في العمودين 2,1 من الجدول (٢٧ـ١) لكل من α_i، $\beta_{j(i)}$، $\varepsilon_{k(ij)}$، ولن يكتمل السطر المتعلق بالمجموع حتى الخطوة ٩.

خطوة ٣. سيكون *لكل مجموع مقابل لحد معين في النموذج معامل يساوي جداء القيم العليا للأدلة التي لاتظهر في هذا الحد المعني. ويصبح المعامل ١ لو ظهرت جميع الأدلة في حد النموذج.*

مثال. يبين العمود 3 من الجدول (٢٧ـ١) المعاملات في مثالنا ، وعلى سبيل المثال α_i لايحتوي k, j، والقيم العليا لهذين الدليلين هما b و n على الترتيب. ولذا يكون bn معامل SSA. وبما أن حد النموذج $\varepsilon_{k(ij)}$ يحتوي على جميع الأدلة، فالمعامل هنا يؤخذ مساويا للواحد.

خطوة ٤. *نجمع كل مجموع مربعات فوق جميع الأدلة الواردة في حد النموذج، سواء كانت الأدلة ضمن أقواس أم لا.*

مثال. يبين العمود 4 إشارات الجمع لمثالنا. وعلى سبيل المثال، جمعنا حد مجموع المربعات الموافق لـ α_i فوق قيم i، وهو الدليل الوحيد في حد النموذج هذا.

جدول (٢٧-١) استنباط الصيغ التعريفية لمجاميع المربعات في تجربة حاضنة ثنائية العامل (B محضن ضمن A)

(1) حد النموذج	(2) SS	(3) معامل	(4) Σ	(5) جداء رمزي	(6) حد ينبغي تربيعه	(7) مجموع مربعات	(8) درجات حرية
α_i	SSA	bn	$\sum_i$	$i=1$	$\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{...}$	$bn\sum_i(\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{...})^2$	$a-1$
$\beta_{j(i)}$	$SSB(A)$	n	$\sum_i\sum_j$	$i(j-1)=ij-1$	$\bar{Y}_{ij.}-\bar{Y}_{i..}$	$n\sum_i\sum_j(\bar{Y}_{ij.}-\bar{Y}_{i..})^2$	$a(b-1)$
$\varepsilon_{k(ij)}$	SSE	1	$\sum_i\sum_j\sum_k$	$(k-1)_{ij}=ijk-ij$	$Y_{ijk}-\bar{Y}_{ij.}$	$\sum_i\sum_j\sum_k(Y_{ijk}-\bar{Y}_{ij.})^2$	$ab(n-1)$
المجموع	$SSTO$				$Y_{ijk}-\bar{Y}_{...}$	$\sum_i\sum_j\sum_k(Y_{ijk}-\bar{Y}_{...})^2$	$abn-1$

وبالمثل جمعنا حد مجموع المربعات الموافق لـ $\varepsilon_{k(ij)}$ فوق جميع قيم i، j، k حيث تظهر هذه الأدلة كلها في حد النموذج.

خطوة ٥. *شكّل جداء رمزيا من أدلة حد النموذج مستخدما الدليل نفسه إذا كان ضمن قوسين ومستخدما الدليل ناقصا 1 إذا لم يكن الدليل ضمن قوسين وانشر الجداء الذي حصلت عليه.*

مثال. يبين العمود 5 الجداء في مثالنا. وعلى سبيل المثال، فإن الجداء الرمزي لـ α_i هو $i - 1$، والجداء الرمزي لِـ $\beta_{j(i)}$ و $ij - ij = ijk - ij$ (k -1) هو الجداء الرمزي لـ $\varepsilon_{k(ij)}$.

خطوة ٦. *يقابل كل حد في مفكوك الجداء الرمزي متوسط للمشاهدات تلحقه الأدلة الواردة في ذلك الحد ونقطة عن كل دليل غير وارد فيه. ويقابل الواحد المتوسط الإجمالي. أما إشارة كل متوسط، فهي إشارة الحد المقابل له في الجداء الرمزي. والعبارة الناتجة في المتوسطات هي الحد التقليدي الذي سنربعه.*

مثال. يبين العمود 6 الحدود المراد تربيعها في مثالنا. لاحظ أن الجداء الرمزي لـ α_i هو $i - 1$ والحد التقليدي المراد تربيعه هو:

$$\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$$

والجداء الرمزي لـ $\beta_{j(i)}$ $ij - i$ وبالتالي فإن الحد التقليدي المراد تربيعه هو:

$$\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..}$$

وبالمثل فإن الجداء الرمزي لـ $\varepsilon_{k(ij)}$، هو $ijk - ij$ ولذا يكون الحد المراد تربيعه:

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.}$$

لاحظ أننا كتبنا الحد الأول Y_{ijk} باعتباره لم يُجمع فوق أي دليل.

خطوة ٧. *نحصل على مجاميع المربعات الملائمة بعد ضم خطوات التربيع والتجميع ثم الضرب في المعامل المناسب.*

مثال. يبين العمود 7 مجاميع المربعات لمثالنا.

خطوة ٨. *نحصل على درجات الحرية بأن نضع في الجداء الرمزي كبديل عن كل دليل أكبر قيمة ممكنة لهذا الدليل.*

مثال. يبين العمود 8 درجات الحرية لمثالنا. وعلى سبيل المثال فالجداء الرمزي لـ: α_i هو $i - 1$ وبالتالي يكون $df = a - 1$. وبالمثال، نجد من أجل $\varepsilon_{k(ij)}$ أن الجداء الرمزي $ijk - ij$ وبالتالي يكون $df = abn - ab = ab(n-1)$.

خطوة ٩. *يُعرّف مجموع المربعات الكلي عادة بأنه المجموع فوق جميع المشاهدات لمربع انحراف المشاهدة عن المتوسط الإجمالي. ونعرف العدد الكلي لدرجات الحرية بأنه يساوي دائما العدد الكلي للمشاهدات مطروحا منه الواحد.*

والنتائج في الجدول (٢٧-١) هي بالطبع النتائج نفسها التي أعطيت سابقا في الجدول (٢٦-٤).

قاعدة (٢٧ - ٣أ) الخاصة بالصيغ الحسابية لمجاميع المربعات.

إذا رغبنا بالصيغ الحسابية لمجاميع المربعات، فتُعدّل الطريقة كما يلي:

خطوة ١أ. *احصل على الجداءات الرمزية كما سبق.*

خطوة ٢أ. *يقابل كل حد من حدود الجداء الرمزي مجموع للمشاهدات تلحقه الأدلة الواردة في ذلك الحد ونقطة عن كل دليل غير وارد فيه. ويقابل 1 المجموع الكلي للمشاهدات.*

خطوة ٣أ. *يربع كل مجموع ويُجمع المربع الناتج فوق جميع الأدلة الملحقة فيه.*

خطوة ٤أ. *للمجموع نفس إشارة الحد المقابل له في الجداء الرمزي ويقسم على جداء القيم العليا للأدلة غير الملحقة فيه.*

خطوة ٥أ. *SSTO يساوي دائما مجموع مربعات المشاهدات مطروحا منه مربع مجموع كل المشاهدات بعد قسمته على العدد الكلي للمشاهدات.*

ونحصل على درجات الحرية كما سبق.

جدول (٢٧-٢) استنباط الصيغ الحسابية لمجاميع المربعات لتجربة حاضنة ذات عاملين (B محضّن ضمن A).

حد النموذج	الجداء الرمزي	مجموع المربعات	درجات الحرية
α_i	$i - 1$	$SSA = \frac{\sum_i Y_{i..}^2}{bn} - \frac{Y_{...}^2}{abn}$	$a - 1$
$\beta_{j(i)}$	$(j-1)i = ij - i$	$SSB(A) = \frac{\sum_i \sum_j Y_{ji..}^2}{n} - \frac{\sum_i Y_{i..}^2}{bn}$	$(b-1)a = ab - a$
$\varepsilon_{k(ij)}$	$(k-1)ij = ijk - ij$	$SSE = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{n}$	$abn - 1$
المجموع		$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{abn}$	$abn - 1$

مثال. يحتوي جدول (٢٧-٢) على استنباط الصيغ الحسابية لمثالنا الحاضن ثنائي العامل. ولتوضيح ذلك اعتبر حد النموذج $\beta_{j(i)}$، فالجداء الرمزي لهذا الحد هو $ij - i$. وبالتالي نجد:

$$\frac{\sum_i \sum_j Y^2_{ij.}}{n} - \frac{\sum_i Y_{i..}^2}{bn}$$

والنتائج في الجدول (٢٧-٢) هي نفسها كتلك المعطاة سابقا في (١٦- ٢٦) أو مكافئة لها.

(٢٧ - ٣) قاعدة لإيجاد توقع متوسط المربعات

ستمكننا قاعدة إيجاد توقع متوسط المربعات التي سنقدمها الآن من تحاشي الاشتقاقات الصعبة. وتنطبق القاعدة على كل من العوامل المحضنة والعوامل المتصالبة. *وتكون القاعدة قابلة للتطبيق في جميع التصاميم المتوازنة بتكرارين أو أكثر، ومع عدم وجود حدود تفاعل نفترضه مساويا للصفر.*

توضيح

سنستخدم مثال مدرسة التدريب جدول (٢٦-١) مرة أخرى. ولدينا هنا العامل A (المدرسة) والعامل B (المدرس) كلاهما مثبتان، والعامل B محضن ضمن العامل A، وللعامل B، عدد من المستويات يساوي b ضمن كل مستوى من مستويات العامل A، ومستويات العامل A عددها a ويوجد n تكرارا .

قاعدة ٢٧ - ٤

قد تبدو قاعدة إيجاد توقع متوسط المربعات التي سنقدمها معقدة قليلا . عند قراءتها للمرة الأولى, ومع ذلك، يمكن الحصول على توقع متوسط المربعات المرغوب بسرعة وبسهولة بعد قليل من التدريب.

خطوة ١. *اكتب معادلة النموذج.*

مثال. معادلة النموذج هي تلك المذكورة في (27.2a).

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)}$$

خطوة ٢. *اكتب حد تباين التأثيرات العشوائية المصاحب، وذلك لكل حد من حدود النموذج، ماعدا الثابت الاجمالي.*

مثال.

$$\begin{matrix} \alpha_i & \beta_{j(i)} & \varepsilon_{k(ij)} \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\beta^2 & \sigma^2 \end{matrix}$$

إذا كانت تأثيرات العوامل مثبتة ـ كما في هذا المثال ـ فسنستبدل، في النهاية، بحدود التباين بمجموع مربعات التأثيرات مقسوما على درجات الحرية. وهكذا، سنستبدل σ_α^2 في مثال مدرسة التدريب، $\sum \alpha_{.}^2 / (a-1)$ بالحد، وبالمثل، سنستبدل بالحد σ_β^2 القيمة $\Sigma\Sigma\beta_{j(i)}^2 / a(b-1)$. وعلى أي حال، فمن الأسهل مؤقتا كتابة حد التباين بدلا من مجموع مربعات التأثير مقسوما على درجات الحرية.

خطوة ٣. *ضع جدولا تشكل صفوفه عناصر النموذج، فيما عدا الثابت العام.*

مثال.

α_i

$\beta_{j(i)}$

$\varepsilon_{k(ij)}$

خطوة ٤. *عناوين الأعمدة في الجدول هي مجموعة الأدلة في النموذج وتحت كل عنوان اكتب F إذا كان العامل المرمز بها الدليل مثبتا ، واكتب R إذا كان العامل عشوائيا . اكتب، أيضا، عدد المستويات لكل عامل.*

مثال:

	i	j	k
	F	F	R
	a	b	n
α_i			
$\beta_{j(i)}$			
$\varepsilon_{k(ij)}$			

وعلى سبيل المثال، ترمز (i) للمدرسة، وهي عامل مثبت له a من المستويات. لاحظ أن الدليل k يرمز للتكرارات، وهي «عامل» عشوائي له n من المستويات.

خطوة ٥. *في كل صف يتضمن دليلا أو أكثر ضمن قوسين، ضع 1 في العمود (الأعمدة) المقابل للدليل (الأدلة) ضمن قوسين.*

مثال:

	i	j	k
	F	F	R
	a	b	n
α_i			
$\beta_{j(i)}$	1		
$\varepsilon_{k(ij)}$	1	1	

وهكذا، ففي الصف $\beta_{j(i)}$ سنضع 1 في العمود i وهلم جرا.

خطوة ٦. *في كل صف حيث يوجد دليل أو أكثر غير محاط بقوسين ضع في العمود (الأعمدة) المقابل لهذا الدليل (الأدلة) غير المحاط بقوسين 1 إذا كان الدليل يرمز إلى عامل عشوائي و 0 إذا كان يرمز لعامل مثبت.*

وهكذا، ففي الصف $\beta_{j(i)}$ نجد j دليلا غير محاط بقوسين، ويشير إلى عامل مثبت B. ولذا نضع صفرا في العمود j.

مثال:

	i	j	k
	F	F	R
	a	b	n
α_i	0		
$\beta_{j(i)}$	1	0	
$\varepsilon_{k(ij)}$	1	1	1

خطوة ٧. *إملأ جميع الخلايا الفارغة بعدد المستويات الذي يظهر في رأس العمود.*

مثال.

	i	j	k
	F	F	R
	a	b	n
α_i	0	b	n
$\beta_{j(i)}$	1	0	n
$\varepsilon_{k(ij)}$	1	1	1

يتألف كل $E(MS)$ من تركيب خطي في حـدود التبـاين الـتي وردت في الخطـوة ٢. وبمعاملات نحصل عليها من الخطوات الإضافية التي أتممناها لتونا في الجـدول. وقـد تكون بعـض المعـاملات صفـرا ، وهـذا يعـني أن حـد التبـاين المقـابل غـير موجـود في $E(MS)$.

خطوة ٨. *ضع على يمين كل صـف في الجـدول الـذي تم حتـى الخطـوة ٧ حـد تباين الخطأ الموافق للتأثير في ذلك الصف. وأضف عمودا لكل توقع متوسط مربعـات نريد إيجاده. وتحت كل توقع متوسط مربعات ضع جميع الأدلة (بما في ذلـك الأقـواس) الموافقة لحد النموذج المقابل.*

لاحظ أن جميع الأدلة الموافقة لحد النموذج المقابل سواء كانت ضمـن قوسـين أم لا، تظهر تحت توقع متوسط المربعات. وعلى سبيل المثال يتوافق حد النموذج $\beta_{j(i)}$ مـع $E\{MSB(A)\}$، وبالتـالي نظهـر الأدلـة (i)، j. وبـالمثل يتوافـق حـد النمـوذج $\varepsilon_{k(ij)}$ مـع $E(MSE)$ وبالتالي تظهر الأدلة (ij) و k.

مثال.

	i	j	k				
	F	F	R	تباين	$E\{MSA\}$	$E\{MSB(A)\}$	$E\{MSE\}$
	a	b	n		i	$(i)j$	$(ij)k$
α_i	0	b	n	σ^2_α			
$\beta_{j(i)}$	1	0	n	σ^2_β			
$\varepsilon_{k(ij)}$	1	1	1	σ^2			

خطوة ٩. *لكل عمود من أعمدة توقع متوسط المربعات، يكون معامل حد التباين صفرا ، إذا كانت أدلة حد النموذج في ذلك الصف (سواء كانت ضمن قوسين أم لا) لاتشتمل على جميع الأدلة الموجودة في رأس ذلك العمود $E(MS)$ (سواء كانت ضمن قوسين أم لا).*

مثال.

	i	j	k				
	F	F	R	تباين	$E\{MSA\}$	$E\{MSB(A)\}$	$E\{MSE\}$
	a	b	n		i	$(i)j$	$(ij)k$
α_i	0	b	n	σ^2_α		0	0
$\beta_{j(i)}$	1	0	n	σ^2_β			0
$\varepsilon_{k(ij)}$	1	1	1	σ^2			

وفي حالة العمود $E\{MSA\}$. نلاحظ أن حدود النموذج في جميع الصفوف تتضمن الدليل i وبالتالي لايكون معامل أي من التباينات صفرا كما تقتضي هذه الخطوة.

ومن أجل العمود $E\{MSB(A)\}$. نلاحظ أن الصف الأول فيه حد نموذج لايحتوي كلا من i و j. ولذلك، فإن معامل σ^2_α يكون صفرا في العمود $E\{MSB(A)\}$. وأخيرا من أجل العمود $E\{MSE\}$. نجد في الصف الأول والثاني حدود نموذج لاتحتوي على الأدلة الثلاثة i، j، k، ولذلك، فإن معامل كل من σ^2 و σ^2_β يكون صفرا في العمود $E\{MSE\}$.

خطوة ١٠. ويمكن إيجاد معاملات حدود التباين التي لم يكن معاملها صفرا وفقا للخطوة ٩ كما يلي:

أ ـ لكل عمود توقع متوسط مربعات، احذف (بمعنى احجب أو غطّي) العمود (الأعمدة) على اليسار الموافقة لأدلة المتغير التي ليست داخل الأقواس في رأس العمود $E(MS)$.

ب ـ أوجد حاصل ضرب مدخلات الأعمدة المتبقية (على اليسار) لكل صف مدروس.

خطوة ١١. توقع متوسط مربعات يساوي مجموع جداءات كل معامل في حد التباين الموافق له، مع وضع مجموع مربعات التأثيرات مقسوما على درجات حريته بدلا من حدود التباين، وذلك في حالة التأثيرات المثبتة.

مثال.

$E\{MSE\}$ $(ij)k$	$E\{MSB(A)\}$ $(i)j$	$E\{MSA\}$ i	تباين	k R n	j F b	i F a	
0(خطوة ٩)	0(خطوة ٩)	bn	σ_α^2	n	b	0	α_i
0(خطوة ٩)	n	0	σ_β^2	n	0	1	$\beta_{j(i)}$
1	1	1	σ^2	1	1	1	$\varepsilon_{k(ij)}$

ولإيجاد المعاملات للعمود $E(MSA)$ على سبيل المثال، لاحظنا سابقا أن تخصيص معاملات غير الصفر كان نتيجة للخطوة٩. ويستدعي تطبيق الخطوة ١٠(أ) حذف العمود i على اليسار وبالتالي نحصل بضرب الحدود في العمودين k,j على:

$E\{MSB(A)\}$ $(i)j$	تباين	k R n	i F a	
0(خطوة ٩)	σ_α^2	n	0	α_i
n	σ_β^2	n	1	$\beta_{j(i)}$
1	σ^2	1	1	$\varepsilon_{k(ij)}$

وهكذا نجد:

$$E\{MSA\} = bn\sigma_\alpha^2 + (0)\sigma_\beta^2 + (1)\sigma^2 = bn\sigma_\alpha^2 + \sigma^2$$

وبما أن للعامل A تأثيرات مثبتة، فإننا نحصل في النهاية على:

$$E\{MSA\} = bn\frac{\sum \alpha_i^2}{a-1} + \sigma^2$$

ونحصل على المعاملات المتبقية لـ$E\{MSB(A)\}$ بطريقة مماثلة. نحذف العمود j على اليسار، وهو الدليل غير الموجود بين قوسين، فنحصل على:

	F	R	تباين	$E\{MSB(A)\}$
	i	k		
	a	n		$(i)j$
α_i	0	n	σ_α^2	0(خطوة ٩)
$\beta_{j(i)}$	1	n	σ_β^2	n
$\varepsilon_{k(ij)}$	1	1	σ^2	1

وهكذا نجد:

$$E\{MSB(A)\} = (0)\sigma_\alpha^2 + n\sigma_\beta^2 + (1)\sigma^2 = n\sigma_\beta^2 + \sigma^2$$

وبما أن للعامل B تأثيرات مثبتة، فإننا نحصل في النهاية على:

$$E\{MSB(A)\} = n\frac{\Sigma\Sigma\beta_{j(i)}^2}{a(b-1)} + \sigma^2$$

ولإيجاد المعاملات المتبقية في العمود $E\{MSE\}$ نحذف العمود k ويكون الجداء للسطر الخاص بـ σ^2 هو 1×1 وهكذا نجد:

$$E\{MSE\} = (0)\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + (1)\sigma^2 = \sigma^2$$

وبتجميع النتائج نجد:

$$E\{MSA\} = bn\frac{\Sigma\alpha_i^2}{a-1} + \sigma^2 \qquad (27.5a)$$

$$E\{MSB(A)\} = n\frac{\Sigma\Sigma\beta_{j(i)}^2}{a(b-1)} + \sigma^2 \qquad (27.5b)$$

$$E\{MSE\} = \sigma^2 \qquad (27.5c)$$

وهذه النتائج مطابقة بالطبع للنتائج التي أعطيت سابقا في الجدول (٢٦-٤).

ملاحظة: تعطى بعض حزم الحاسب توقع متوسط المربعات في مسألة تحاين. ويوضح الشكل (٢٨-٣) مثالا على ذلك.

(٢٧-٤) دراسة متصالبة ثنائية العامل - تأثيرات عوامل مختلطة

قدمنا في الفقرات السابقة من هذا الفصل قواعد تطوير النموذج وإيجاد مجاميع المربعات ودرجات الحرية وتوقع متوسط المربعات. والآن سنقدم في هذه الفقرة والفقرات اللاحقة توضيحات إضافية لاستخدام تلك القواعد في تصاميم تنطوي على عوامل متصالبة وحاضنة.

سنعتبر في هذه الفقرة حالة تجربة ثنائية العامل في تصميم تام (التعشية) حيث يتصالب العاملان B, A، وللعامل A تأثيرات مثبتة، بينما تأثيرات العامل B عشوائية، ولدينا n تكرارا لكل تركيبه من العوامل. وتكون معادلة النموذج هي تلك المبينة في (21.26):

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{k(ij)}$$

باستثناء أننا نتعرف الآن على تحضين حد الخطأ ε.

ويحتوي الجدول (٢٧-٣) على استنباط لمجاميع المربعات كما وردت في التعاريف ويحتوي الجدول (٢٧-٤)أ على الجدولة الأولية لإيجاد توقع متوسط المربعات، بينما يوضح الجدول (٢٧-٤)ب نتائج الخطوات ٩ و ١٠ للقاعدة (٢٧ - ٤). وتكون حدود تباين التأثيرات العشوائية المقابلة لحدود النموذج كمايلي:

α_i	β_j	$(\alpha\beta)_{ij}$	$\varepsilon_{k(ij)}$
σ^2_α	σ^2_β	$\sigma^2_{\alpha\beta}$	σ^2

والتأثيرات المثبتة هنا هي التأثيرات α_i ، فقط. وبالتالي سنحتاج في النهاية إلى استبدال مجموع مربعات التأثيرات مقسوما على درجات الحرية (بـ σ^2_α لاحظ في الجدول (٢٧-٤)ب أن معامل σ^2_β في $E\{MSA\}$ هو الصفر وذلك كنتيجة للخطوة ٩. إذ أن الأدلة في حد النموذج β_j لاتحتوي على الدليل i في العمود $E\{MSA\}$. وفي الخطوة ١٠، لإيجاد المعاملات في العمود $E\{MSA\}$، حذفنا العمود i حيث أنه الدليل الوحيد في رأس العمود الذي لايوجد بين قوسين، ويتم الحصول على معاملات توقع متوسط المربعات الأخرى بالطريقة نفسها ولكل توقع متوسط مربعات، يشير الجدول (٢٧-٤)ب إلى ما إذا كان قد تم الحصول على المعاملات صفر من الخطوة ٩، وأي الأعمدة تم حذفها، أيضا. وفي النتيجة تتطابق بالطبع توقعات المربعات المقدمة في الجدول (٢٧-٤)جـ مع تلك المبينة في الجدول (٢١-٤).

جدول (٢٧-٣) استنباط صيغ مجاميع المربعات التعريفية لتجربة متصالبة ثنائية العامل في تصميم تام التعشية

(١) حد النموذج	(٢) SS	(٣) معامل	(٤) Σ	(٥) الجداء الرمزي	(٦) الحد المراد تربيعه	(٧) مجموع مربعات	(٨) درجات الحرية
α_i	SSA	bn	$\sum_i$	$i-1$	$\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{...}$	$bn\sum_i(\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{...})^2$	$a-1$
β_j	SSB	an	$\sum_j$	$j-1$	$\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y}_{...}$	$an\sum_j(\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y}_{...})^2$	$b-1$
$(\alpha\beta)_{ij}$	$SSAB$	n	$\sum_i\sum_j$	$(i-1)(j-1)$ $=ij-i-j+1$	$\bar{Y}_{ij.}-\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{.j.}+\bar{Y}_{...}$	$n\sum_i\sum_j(\bar{Y}_{ij.}-\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{.j.}+\bar{Y}_{...})^2$	$(a-1)(b-1)$
$\varepsilon_{k(ij)}$	SSE	1	$\sum_i\sum_j\sum_k$	$(k-1)ij$ $=ijk-ij$	$Y_{ijk}-\bar{Y}_{ij.}$	$\sum_i\sum_j\sum_k(Y_{ijk}-\bar{Y}_{ij.})^2$	$ab(n-1)$
المجموع	$SSTO$				$Y_{ijk}-\bar{Y}_{...}$	$\sum_i\sum_j\sum_k(Y_{ijk}-\bar{Y}_{...})^2$	$abn-1$

جدول (٢٧-٤) استنباط $E\{MS\}$ لتجربة متصالبة ثنائية العامل (A مثبت، B عشوائي)

(أ) جدول

k	j	i	
R	R	F	
n	b	a	
n	b	0	α_i
n	1	a	β_j
n	1	0	$(\alpha\beta)_{ij}$
1	1	1	$\varepsilon_{k(ij)}$

(ب) معاملات

$E\{MSE\}$ $(ij)k$	$E\{MSAB\}$ ij	$E\{MSE\}$ j	$E\{MSA\}$ i	تباين
0 (خطوة ٩)	0 (خطوة ٩)	0 (خطوة ٩)	b - n	σ_α^2
0 (خطوة ٩)	0 (خطوة ٩)	an	(خطوة ٩) 0	σ_β^2
0 (خطوة ٩)	n	$0.n$	$1.n$	$\sigma_{\alpha\beta}^2$
1.1	1	1.1	1.1	σ^2
العمود k محذوف	العمودان j, i محذوفان	العمود j محذوف	العمود i محذوف	

(جـ) $E\{MS\}$

$$E\{MSA\}=bn(\Sigma\alpha_i^2)/(a-1)+n\sigma_{\alpha\beta}^2+\sigma^2$$

$$E\{MSB\}=an\alpha_\beta^2+\sigma^2$$

$$E\{MSAB\}=n\sigma_{\alpha\beta}^2+\sigma^2$$

$$E\{MSE\}=\sigma^2$$

(٢٧-٥) دراسة متصالبة حاضنة ثلاثية العامل - تأثيرات عامل مختلطة

سنعتبر هنا الحالة التي تكون فيها بعض العوامل، وليست جميعها عوامل حاضنة. وتسمى مثل تلك التصاميم تصاميم حاضنة جزئيا، أو تصاميم هرمية جزئيا، أو تصاميم متصالبة - حاضنة.

درست إحدى التجارب تأثير الخلفية الثقافية على صناعة القرار جماعيا . تشكيل فرق من الطلاب كما تم تخصيص مهمة لكل فرقة، وكان أحد المتغيرات التابعة عدد الأسئلة المثارة قبل القرار الجماعي النهائي. تكونت بعض الفرق من طلاب أجانب والأخرى من طلاب من الولايات المتحدة. ويتألف نصف الفرق من ثمانية أعضاء، والنصف الآخر من أربعة أعضاء. وقد تم استخدام اثنين من المراقبين الأجانب للفرق الأجنبية. واثنين من المراقبين الأمريكيين للفرق الأمريكية. وهكذا يمكن تقديم التصميم كمايلي:

	فرق أمريكية (A_1)		فرق أجنبية (A_2)	
	مراقب١ (C_1)	مراقب٢ (C_2)	مراقب٣ (C_1)	مراقب٤ (C_2)
فريق صغير B_1	تكرار 1 تكرار 2	تكرار 1 تكرار 2	تكرار 1 تكرار 2	تكرار 1 تكرار 2
فريق كبير B_2	تكرار 1 تكرار 2	تكرار 1 تكرار 2	تكرار 1 تكرار 2	تكرار 1 تكرار 2

وسنفترض للتبسيط أننا استخدمنا تكرارين (فريقين) ، فقط، لكل خلية.

تطوير نموذج

لنعتبر قومية الفريق العامل A وحجم الفريق العامل B والمراقب العامل C. لاحظ أن العامل C محضن ضمن العامل A حيث أن المراقبين للفرق الأمريكية مختلفان عن مراقبي الفرق الأجنبية. ولاحظ، أيضا، أن العاملين B, A متصالبان حيث يظهر كل مستوى من العامل A مع كل مستوى من مستويات العامل B وبالعكس. وبالمثل نجد أن العاملين C, B متصالبان. وفي هذا المثال اعتُبرت العوامل B, A ذات تأثيرات مثبتة، بينما اعتبرت تأثيرات العامل C (المراقب) عشوائية. ولتطوير نموذج مناسب باستخدام القاعدة (٢٧ـ١) ، ينبغي طبقا للخطوة ٢، استبعاد التفاعلات AB، ABC من النموذج، لأن العامل C محضن داخل A. وأكثر من ذلك، تبين الخطوة ٣ أن التفاعل

BC محضن ضمن العامل A ، حيث أن العامل C محضن ضمن العـامل A. ولـذا يكـون التفاعل BC هو التفاعل $BC(A)$ وبالتالي، فإن النموذج الملائم:

$$Y_{ijkm} = \mu_{...} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{k(i)} + (\alpha\beta)_{ij} + (\beta\gamma)_{jk(i)} + \varepsilon_{m(ijk)} \qquad (27.6)$$

حيث:

$\mu_{...}$ ثابت عام

α_i تأثيرات مثبتة للقومية.

β_j تأثيرات مثبتة لحجم الفريق.

$\gamma_{k(i)}$ تأثيرات المراقب العشوائية (ضمن القومية)

$(\alpha\beta)_{ij}$ التأثيرات المثبتة لتفاعل القومية ـ حجم الفريق

$(\beta\gamma)_{jk(i)}$ تأثيرات تفاعل حجم الفريق ـ المراقب العشوائية

$\varepsilon_{m(ijk)}$ حدود الخطأ العشوائي

$i = 1,..., a; j = 1,..., b; k = 1,..., c; m = 1,..., n$

سنفترض كالمعتاد أن $\gamma_{k(i)}, (\beta\gamma)_{jk(i)}$ و $\varepsilon_{m(ijk)}$.

تتوزع توزيعا طبيعيا بتوقعات 0 وتباينات ثابتة، وأن أي فئتين من الفئات الثلاث من المتغيرات العشوائية مستقلتان، إلا أن تأثيرات التفاعل لأي مراقب هي تأثيرات مرتبطة، كما نرى من القيود التالية على النموذج:

$$\sum_i \alpha_i = 0 \qquad \sum_j \beta_j = 0 \qquad \sum_i (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \text{مهما يكن } j \qquad (27.6a)$$

$$\sum_j (\alpha\beta)_{ij} = 0 \quad \text{مهما يكن } i \qquad \sum_j (\beta\gamma)_{jk(i)} = 0 \quad \text{مهما يكن } k(i)$$

تحليل التباين

يحتوي الجدول (٢٧ـ٥) تطوير مجاميع المربعات الحسابية ودرجات الحرية لنموذج تحليل التباين (27.6) ،ويحتوي الجدول (٢٧ـ٦) تطوير متوسط المربعات. وفي حالة التأثيرات المثبتة وضعنا، كالمعتاد، في الجدول (٢٧ـ٢٦)ب مجاميع مربعات التأثيرات مقسومة على درجات الحرية بدلا من حدود التباين. ويشير الجدول (٢٧ـ ٦)ب مباشرة إلى كيفية تكوين إحصاة اختبار لمجموعة من الاختبارات المختلفة.

جدول (٢٧-٥) استنباط صيغ حسابية لمجاميع المربعات في حالة النموذج المتصالب - المحضّن (27.6)

حد النموذج	الجداء الرمزي	مجموع مربعات	درجات الحرية
α_i	$i-1$	$SSA=\frac{\sum_i Y_{i...}^2}{bcn}-\frac{Y_{....}^2}{abcn}$	$a-1$
β_j	$j-1$	$SSB=\frac{\sum_j Y_{.j..}^2}{acn}-\frac{Y_{....}^2}{abcn}$	$b-1$
$\gamma_{k(i)}$	$(k-1)i$ $=ki-i$	$SSC(A)=\frac{\sum_j\sum_k Y_{i.k.}^2}{bn}-\frac{\sum_i Y_{i...}^2}{bcn}$	$a(c-1)$
$(\alpha\beta)_{ij}$	$(i-1)(j-1)$ $=ij-i-j+1$	$SSAB=\frac{\sum_i\sum_j Y_{ij..}^2}{cn}-\frac{\sum_i Y_{i...}^2}{bcn}-\frac{\sum_j Y_{.j..}^2}{acn}+\frac{Y_{....}^2}{abcn}$	$(a-1)(b-1)$
$(\beta\gamma)_{jk(i)}$	$(j-1)(j-1)$ $=ij-i-j+1$	$SSBC(A)=\frac{\sum_i\sum_j\sum_k Y_{ijk.}^2}{n}-\frac{\sum_i\sum_j Y_{ij..}^2}{cn}-\frac{\sum_i\sum_k Y_{i.k.}^2}{bn}+\frac{\sum_i Y_{i...}^2}{bcn}$	$a(b-1)(c-1)$
$\varepsilon_{m(ijk)}$	$(m-1)ijk$ $=ijkm-ijk$	$SSE=\sum_i\sum_j\sum_k\sum_m Y_{ijkm}^2-\frac{\sum_i\sum_j\sum_k Y_{ijk.}^2}{n}$	$abc(n-1)$
المجموع		$SSTO=\sum_i\sum_j\sum_k\sum_m Y_{ijkm}^2-\frac{Y_{....}^2}{abcn}$	$abcn-1$

جدول (٢٧-٦) استنباط توقع متوسط مربعات للنموذج المتصالب الحاضن (6 - 27)

(أ) جدول

	i	j	k	m	تباين	توقع متوسط مربعات A	B	$C(A)$	AB	$BC(A)$	E
	F	F	R	R							
	a	b	c	n		i	j	$(i)k$	ij	$(i)ik$	$(ijk)m$
α_i	0	b	c	n	σ_α^2	bcn	0	0	0	0	0
β_i	a	0	c	n	σ_β^2	0	acn	0	0	0	0
$\gamma_{k(i)}$	1	b	1	n	σ_γ^2	bn	0	bn	0	0	0
$(\alpha\beta)_{ij}$	0	0	c	n	$\sigma_{\alpha\beta}^2$	0	0	0	cn	0	0
$(\beta\gamma)_{jk(i)}$	1	0	1	n	$\sigma_{\beta\gamma}^2$	0	n	0	n	n	0
$\varepsilon_{m(ijk)}$	1	1	1	1	σ^2	1	1	1	1	1	1

(ب) توقع متوسط المربعات

$$E\{MSA\} = bcn\frac{\Sigma\alpha_i^2}{a-1} + bn\sigma_\gamma^2 + \sigma^2$$

$$E\{MSB\} = acn\frac{\Sigma\beta_{j(i)}^2}{b-1} + n\sigma_{\beta\gamma}^2 + \sigma^2$$

$$E\{MSC(A)\} = bn\sigma_\gamma^2 + \sigma^2$$

$$E\{MSAB\} = cn\frac{\Sigma\Sigma(\alpha\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)} + n\sigma_{\beta\gamma}^2 + \sigma^2$$

$$E\{MSBC(A)\} = n\sigma_{\beta\gamma}^2 + \sigma^2$$

$$E\{MSE\} = \sigma^2$$

مثال.

يحتوي جدول (٢٧-٧) نتائج تجربة اتخاذ قرار جماعي، الموصوفة سابقا على أساس $n = 2$ تكرارا . وتم الحصول على تحليل التباين بواسطة برنامج حاسب وهو معروض في الجدول (٢٧-٨).

والبدائل لاختبار تأثيرات القومية: ليس كلا من α_i مساو للصفر

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \tag{27.7a}$$
H_a: ليس كل α_i تساوي الصفر

ويشير الجدول (٢٧-٦)ب إلى أن إحصاءة الاختبار الملائمة هي:

$$F^* = \frac{MSA}{MSC(A)} \tag{27.7b}$$

وفي مثالنا هنا نجد:

$$F^* = \frac{420.25}{.25} = 1,681$$

جدول (٢٧-٧) بيانات دراسة متصالبة - حاضنة ثلاثية العامل - مثال اتخاذ قرار جماعي فرق الولايات المتحدة

	فُرق (U.S) $(i = 1)$		فرق أجنبية $(i = 2)$	
حجم الفريق	مراقب ١ $(k = 1)$	مراقب ٢ $(k = 2)$	مراقب ٣ $(k = 1)$	مراقب ٤ $(k = 2)$
٤ أعضاء	16	14	7	4
$(j = 1)$	20	19	5	9
٨ أعضاء	21	28	11	12
$(j = 2)$	25	19	17	15

$Y_{111.} = 36$ $\quad Y_{112.} = 33$ $\quad Y_{211.} = 12$ $\quad Y_{212.} = 13$

$Y_{121.} = 46$ $\quad Y_{121.} = 47$ $\quad Y_{221.} = 28$ $\quad Y_{222.} = 27$

$Y11.. = 3$ $\quad Y1.1. = 82$ $\quad Y21.. = 25$ $\quad Y2.1. = 40$

$Y12.. = 93$ $\quad Y1.2. = 80$ $\quad Y22.. = 55$ $\quad Y2.2. = 40$

$Y1... = 162$ $\quad Y2... = 80$

$Y.1.. = 94$ $\quad Y.2.. = 148$

$Y... = 242$

ولمستوى معنوية 05. = α نحتاج 18.5 = $F(.95;1,2)$ وبما أن $F^* = 1,68\ 1 > 18.5$ نستنتج H_a أي أن للقومية تأثير على سلوك المجموعة. والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0006. ويمكن إجراء الاختبارات الأخرى بالطريقة نفسها.

ويمكن وضع فترات ثقة لمتضادات في التأثيرات الرئيسة للعوامل بالطريقة المعتادة وذلك عندما تكون التأثيرات مثبتة. وعلى سبيل المثال، لتقدير الفرق بين متوسط عدد الأسئلة التي أثيرت قبل القرار للفرق الأمريكية والفرق الأجنبية، فإننا نحتاج إلى $MSC(A)$ باعتبارها متوسط المربعات في مقام إحصاءة الاختبار لدراسة تأثيرات القومية. وبالتحديد، فإن حدي الثقة لـ $D = \mu_{1..} - \mu_{2..}$ هما:

جدول (٢٧- ٨) جدول تباين لدراسة متصالبة - حاضنة ثلاثية العامل - مثال انجاز قرار جماعي

	مصدر التغير	SS	df	MS
A	القومية	420.25	1	420.25
B	حجم الفريق	182.25	1	182.25
C(A)	المراقب (ضمن القومية)	.50	2	.25
AB	تفاعلات القومية - حجم الفريق	2.25	1	2.25
BC(A)	تفاعلات حجم الفريق - المراقب (ضمن القومية)	2.50	2	1.25
E	الخطأ	106.00	8	13.25
	المجموع	713.75	15	

$$\hat{D} \pm t[1-\alpha/2;(c-1)a]s\{\hat{D}\} \quad (27.8)$$

حيث:

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2MSC(A)}{nbc} \quad (27.8a)$$

وفي مثالنا نجد:

$$\bar{Y}_{1..} = \frac{162}{8} 20.25 \quad \bar{Y}_{2..} = \frac{80}{8} = 10.00 \quad \hat{D} = 20.25 - 10.00 = 10.25$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2(.25)}{8} = .063 \quad s\{\hat{D}\} = .25$$

ولمعامل ثقة .95 نحتاج إلى $t(.975;2) = 4.303$، ولذا يكون حدا الثقة $10.25 \pm 4.303(.25)$ وتكون الـ 95% فترة ثقة المرغوبة لـ D هي:

$$9.2 \leq D \leq 11.3$$

تعليقات

١ ـ مجاميع المربعات *SSA*، *SSB*، *SSAB* في الجدول (٢٧ـ٥) لتحليل تصميم تجربة متصالبة ـ حاضنة هي مجاميع المربعات المعتادة للتأثيرات الرئيسة للعامل *A*، التأثيرات الرئيسة للعامل *B*، والتفاعلات *AB*، أما *SSC(A)* ، فهو مجموع مربعات تقليدي محضن لتأثيرات العامل *C*. ويمكن رؤية ذلك بكتابة مجموع المربعات بالصيغة التعريفية من الجداء الرمزي *ki - I*.

$$\sum_i \sum_k (\overline{Y}_{i.k.} - \overline{Y}_{i...})^2 \; SSC(A) = bn \qquad (27.9)$$

وهكذا يقيس *SSC(A)* ببساطة تشتت المتوسطات المقدَّرة لمستوى عامل *C* وذلك من أجل أي مستوى معطى للعامل *A*، ثم تجميع تلك المجاميع فوق مستويات العامل *A*.

ويمكن الحصول على صيغة *SSBC(A)* التعريفية من الجداء الرمزي *ijk - ij - ik + i*:

$$\sum\sum\sum(\overline{Y}_{ijk.} - \overline{Y}_{ij..} - \overline{Y}_{i.k.} + \overline{Y}_{i...})^2 \; SSC(A) = bn \qquad (27.10)$$

وهكذا يحتوي *SSBC(A)* مجموع مربعات التفاعل *BC* المعتاد لأي مستوى معطى من مستويات العامل *A*، ثم تجميع مجاميع المربعات هذه فوق مستويات العامل *A*.

٢ ـ إذا كان برنامج الحاسب المتاح يمدنا، فقط بمجاميع مربعات للعوامل المتصالبة، فيمكن الحصول على مجموعي المربعات المحضنين باستخدام العلاقات التالية وذلك حيثما يكون التصميم متوازنا :

$$SSC(A) = SSC + SSAC \qquad (27.11a)$$

$$SSBC(A) = SSBC + SSABC \qquad (27.11b)$$

ويمكن تعميم هذه العلاقات بصورة مباشرة. على سبيل المثال، إذا كان *B* محضنا ضمن *A* وكان *C* محضنا ضمن *B* فلدينا:

$$SSB(A) = SSB + SSB + SSAB \qquad (27.12a)$$

$$SSC(AB) = SSC + SSAC + SSBC + SSABC \qquad (27.12b)$$

٣ ـ إذا كانت التفاعلات AB موجودة وجودا مهما ، فيتركز التحليل عادة على المتوسطات μ_{ij} بدلا من متوسطات مستويات العامل $\mu_{i..}$ و $\mu_{.j.}$ وذلك عندما تكون تأثيرات العوامل مثبتة. ويمكن تبيان أن التباين المقدر لمقارنة بين حجمي الفريقين لأي قومية معينة هو:

$$s^2\{\bar{Y}_{i1..}-\bar{Y}_{i2..}\}=\frac{2MSBC(A)}{cn} \qquad (27.13)$$

يترافق مع هذا التباين $(c-1)\ (b-1)\ a$ درجة حرية، كما هو واضح من الجدول (٢٧ـ٥).

لا توجد فترة ثقة مضبوطة لمقارنة القوميتين لأي حجم معطى للفريق، ويمكن استخدام تقدير غير منحاز للتباين وهو:

$$s^2\{\bar{Y}_{i1..}-\bar{Y}_{i2..}\}=\frac{2}{cn}\left[MSBC(A)+\frac{MSC(A)-MSE}{b}\right] \qquad (27.14)$$

كما يمكن الحصول على العدد التقريبي لدرجات الحرية المصاحبة لهذا التباين من (22.61).

وسبب الاختلاف بين التباينات في (27.13) , (27.14) أن المراقبين هما نفساهما في حالة مقارنة حجمي الفريقين لأي قومية معطاة، بينما يختلف المراقبون في حال مقارنة القوميات لأي حجم فريق معطى.

(٢٧ـ٦) عدم وجود تكرارات و/أو بعض التفاعلات مساوية للصفر

تعديل القواعد

عندما لايشمل التصميم المتوازن أية تكرارات و/أو يفترض أن بعض التفاعلات مساوية للصفر ـ كما هي الحال، مثلا ، في تصميم قطاع تام عشوائي مع تأثيرات مثبتة للقطاع ـ يمكن تعديل القواعد (٢٧ـ ١) و (٢٧ ـ ٣) تعديلا طفيفا، بحيث تنطبق تحت هذه الشروط، أيضا، ولاتحتاج القاعدة (٢٧ ـ ٤) إلى أية تعديلات.ويكون التعديل للقاعدة (٢٧ ـ ١) طفيفا جدا، إذ تصبح الخطوة ٢ الآن:

(27.15) *تعديل القاعدة (٢٧ ـ ١) خطوة ٢. ضع كل حدود التفاعل ماعدا الحدود التي افترض أنها مساوية للصفر والحدود التي تحتوي عاملا محضنا والعامل الذي يحضنه كلاهما.*

وتكون تعديلات القاعدة (٢٧ـ٣) بسيطة، أيضا، وهي:

(27.16): *تعديل القاعدة (27.3): لاتنطبق الخطوات ٢ إلى ٨ على حد خطأ النموذج ε. وبدلا من ذلك، نحصل على مجموع المربعات المصاحب لحد خطأ النموذج كباقٍ من مجموع المربعات الكلي. وبالمثل نحصل على درجات الحرية المصاحبة لمجموع المربعات الباقي هذا كباقٍ من العدد الكلي لدرجات الحرية.*

وسنرمز لمجموع المربعات الموافق لحد خطأ النموذج ε في التصاميم المتوازنة، عندما لايكون هناك تكرارات و/أو عندما يُفترض أن بعض التفاعلات مساوية للصفر بالرمز *SSRem*، والتي تعبر عن مجموع المربعات الباقي. وكثيرا مانجد مجموع المربعات الباقي كمجموع مربعات حد التفاعل الذي افتُرض أنه صفر. وسنرمز لمتوسط المربعات الباقي ـ بالرمز *MSRem*.وسنوضح استخدام القواعد المعدلة هذه في المعاينة الجزئية في تصميم قطاع عشوائي مع عدم وجود تكرارات.

المعاينة الجزئية في تصميم قطاع عشوائي

النموذج المستخدم في تصميم قطاع عشوائي بمشاهدة واحدة، فقط، لكل وحدة تجريبية هو نموذج تحليل التباين (24.2) حيث تأثيرات المعالجة وتأثيرات القطاع مثبتة:

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \rho_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \qquad (27.17)$$

ونعلم من الفصل ٢٤ أن مجموع مربعات الخطأ *SSE* تساوي دائما الصفر في هذا النموذج وذلك لعدم وجود تكرارات لأي تركيب قطاع ـ معالجة. وعلى أي حال وباعتبار أن النموذج (27.17) يفترض أن جميع تفاعلات القطاع ـ المعالجة مساوية للصفر، فيكون متوسط مربعات التفاعل *MSBL .TR* مقدرا غير منحاز لتباين الخطأ التجريبي σ^2 ويُستخدم كمقام لإحصاءة الاختبار F^* عند اختبار تأثيرات

المعالجات، وذلك في حالة تأثيرات مثبتة للمعالجات وللقطاعات.وسنبين الآن أن التعديل (27.16) للقاعدة (27.3) يؤدي إلى متوسط مربعات الباقي *MSRem* الذي يساوي *MSBL .TR*. وعلى أي حال، فسنوضح استخدام التعديل (27.16) لحالة تبدو أكثر تعقيدا بقليل. ونعني الحالة التي نستخدم فيها المعاينة الجزئية في تصميم قطاع عشوائي ـ أي عندما تتوفر أكثر من مشاهدة من كل وحدة تجريبية. اعتبر على سبيل المثال، تجربة لدراسة كيفية تأثير ثلاثة من الحوافز التشجيعية المختلفة على طول الفترة التي يستخدمها شخص لانجاز مهمة ما.وقد قسم الأشخاص الذي تشملهم الدراسة وفقا لأعمارهم إلى قطاعات من ثلاثة أشخاص وتمّ تخصيص حافز تشجيعي من الحوافز الثلاثة عشوائيا لكل شخص. وتمّ أخذ ثلاث مشاهدات للزمن المطلوب لاستكمال المهمة، أي طلب من الشخص أن ينجز المهمة ثلاث مرات.

وفي حالة من هذا النوع نضيف ببساطة مركبة خطأ مشاهدة عشوائي إلى نموذج التحاين (27.17)، ونفترض أن تأثيرات المعالجات والقطاعات (الحوافز التشجيعية وفئات العمر في مثالنا) هي تأثيرات مثبتة، ويكون النموذج المناسب كمايلي:

$$Y_{ij} = \mu_{..} + \rho_i + \tau_j + \varepsilon_{(ij)} + \eta_{k(ij)} \qquad (27.18)$$

حيث:

$$\sum \rho_i = 0 \qquad \sum \tau_j = 0$$

وحيث $\varepsilon_{(ij)}$ ، $\gamma_{k(ij)}$ متغيرات عشوائية مستقلة طبيعية بتوقع o وتباينات σ^2، σ^2 على الترتيب.

$$i = 1,\dots, n;\ j = 1,\dots,r;\ k = 1,\dots,m$$

ويمثل ρ_i هنا تأثير القطاع ، τ_j تأثير المعالجة، $\varepsilon_{(ij)}$ التأثير العشوائي الموافق للوحدة التجريبية و $\eta_{k(ij)}$ التأثير العشوائي للمشاهدة k من الوحدة التجريبية. لاحظ أن الخطأ التجريبي ε محضن ضمن تركيبة القطاع ـ المعالجة (ij)، وليس هناك دليل متغير إضافي، وخصصت وحدة تجريبية واحدة، فقط، لكل معالجة ضمن القطاع. وهكذا لاتوجد تكرارات للوحدة التجريبية. لاحظ، أيضا، أن خطأ المشاهدة $\eta_{k(ij)}$ محضن ضمن تركيبة القطاع ـ المعالجة (ij).

ويحتوي الجدول (٢٧-٩) على استنباط لمجاميع المربعات الحسابية لنموذج التحاين (27.18) ،ويحتوي الجدول (٢٧-١٠) على استنباط لتوقع متوسط المربعات. لاحظ أننا نحصل على مجموع المربعات للواحدات التجريبية كباقٍ في الجدول (٢٧-٩) وذلك بسبب تخصيص وحدة تجريبية واحدة، فقط ، للمعالجة ضمن قطاع، وكما هو متوقع فقد اتضح أن *SSRem* هو مجموع مربعات تفاعل القطاع ـ المعالجة، وذلك كما في تصميم قطاع عشوائي بدون معاينة جزئية. ويشير الجدول (٢٧-١٠)ب إلى أن إحصاءة الاختبار لاختبار وجود تأثير للمعالجات هي $F^* = MSTR / MSRem$ وذلك لنموذج التحاين (27.18) مع تأثيرات مثبتة للمعالجات والقطاعات. وهي الحالة نفسها عندما لاتوجد معاينة جزئية في تصميم قطاع عشوائي تام، انظر (24.76). تذكر أن *MSRem* هو هنا ببساطة متوسط مربعات التفاعل *MSBL.TR*.

جدول (٢٧-٩) استنباط الصيغ الحسابية لمجاميع المربعات لتصميم قطاع عشوائي بمعاينة جزئية، نموذج التحاين (27.18)

حد النموذج	الجداء الرمزي	مجموع المربعات	درجة حرية
ρ_i	$i - 1$	$SSBL = \frac{\sum_i Y_{i..}^2}{rm} - \frac{Y_{...}^2}{nrm}$	$n - 1$
τ_j	$j - 1$	$SSTR = \frac{\sum_j Y_{.j.}^2}{nm} - \frac{Y_{...}^2}{nrm}$	$r - 1$
$\varepsilon_{(ij)}$		$SSRem = SSBL.TR = \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{m} - \frac{\sum_i Y_{i..}^2}{rm} - \frac{\sum_j Y_{.j.}^2}{nm} + \frac{Y_{...}^2}{nrm}$	الباقي = $(n - 1)(r - 1)$
$\eta_{k(ij)}$	$(k - 1)ij = ijk - ij$	$SSOE = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{\sum_i \sum_j Y_{ij.}^2}{m}$	$nr(m - 1)$
المجموع		$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{nrm}$	$nrm - 1$

جدول (٢٧ـ١٠) استنباط توقيع متوسط المربعات لتصميم قطاع عشوائي بمعاينة جزئية ـ نموذج التحاين (27.18)

الجدول (أ)

	i	j	k	تباين	توقع متوسط مربعات لِـ BL	TR	Rem	OE
	F	F	R					
	n	r	m		i	j	(ij)	$(ij)k$
ρ_i	0	r	m	σ_ρ^2	rm	0	0	0
τ_i	n	0	m	σ_τ^2	0	nm	0	0
$\varepsilon_{(ij)}$	1	1	m	σ^2	m	m	m	0
$\eta_{k(ij)}$	1	1	1	σ_η^2	1	1	1	1

(ب) متوسط المربعات المتوقع

$$E\{MSBL\} = rm\frac{\Sigma\rho_i^2}{n-1} + m\sigma^2 + \sigma_\eta^2$$

$$E\{MSTR\} = nm\frac{\Sigma\tau_i^2}{r-1} + m\sigma^2 + \sigma_\eta^2$$

$$E\{MSR.em\} = m\sigma^2 + \sigma_\eta^2$$

$$E\{MSOE\} = \sigma_\eta^2$$

مسائل

(٢٧ـ١) بالإشارة إلى نموذج التحاين (21.25) في صفحة استخدم القاعدة (٢٧ـ ٤) للحصول على توقع متوسط المربعات في الجدول ٢١ ـ ٤ لهذا النموذج.

(٢٧ـ٢) بالإشارة إلى نموذج التحاين (22.56) في صفحة

أ ـ استخدم القاعدة (٢٧ـ٣) للحصول على صيغ المربعـات التعريفيـة في (22.21) ودرجات الحرية المصاحبة لها.

ب ـ استخدم القاعدة (٢٧ ـ ٤) للحصول على توقع متوسط المربعـات في الجدول (٢٢ـ٧).

(٢٧ - ٣) بالإشارة إلى نموذج التحاين (22.58) في الصفحة ٤٥٩.

أ - استخدم القاعدة (٢٧-٣أ) للحصول على صيغ مجاميع المربعات الحسابية في (22.23) و (22.26) ودرجات الحرية المصاحبة لها.

ب - استخدم القاعدة (٢٧-٤) للحصول على توقع متوسط المربعات في الجدول (٢٢- ٨).

(٢٧-٤) بالإشارة إلى نموذج التصميم الحاضن (26.8) في الصفحة ٦٣٥ ولكن مفترضا أن العامل A محضن ضمن العامل B، وأن تأثيرات العامل A عشوائية وتأثيرات العامل B مثبتة. (انظر، أيضا، الفقرة «تأثيرات عشوائية للعامل» في الصفحة

أ - استخدم القاعدة (٢٧ - ٣أ) للحصول على صيغ مجاميع المربعات الحسابية ودرجات الحرية المصاحبة لها.

ب - استخدم القاعدة (٢٧-٤) للحصول توقع متوسط المربعات.

جـ - ماهو متوسط المربعات المناسب الذي يمكن استخدامه لوضع فترة ثقة لـ μ_{j}؟

(٢٧-٥). بالإشارة إلى نموذج قطاع عشوائي (24.2) صفحة

أ - استخدم القاعدة (٢٧ - ٣) والتعديل (27.16) للحصول على صيغ مجاميع المربعات التعريفية في (24.6) ودرجات الحرية المصاحبة لها.

ب - استخدم القاعدة (٢٧ - ٤) للحصول على توقع متوسط المربعات في الجدول (٢٤-٣) لهذا النموذج.

(٢٧ - ٦) بالإشارة إلى نموذج قطاع عشوائي (24.2) صفحة ٥٥٥ ولكن افترض أن تأثير المعالجات عشوائي (انظر، أيضا، تعليق ٢ صفحة ٥٥٥).

أ - استخدم القاعدة (٢٧ - ٣)أ والتعديل (27.16) للحصول على صيغ مجاميع المربعات الحسابية في (24.6) ودرجات الحرية المصاحبة لها.

ب - استخدم القاعدة (٢٧ - ٤) للحصول على توقع متوسط المربعات في الجدول (٢٤-٣) لهذا النموذج.

(٢٧ ـ ٧) بالإشارة إلى نموذج القطاع العشوائي (25.12) صفحة ٦٠٥.

أ ـ استخدم القاعدة (٢٧ـ٣) والتعديل (27.16) للحصول على صيغ مجاميع المربعات التعريفية (24.6) ودرجات الحرية المصاحبة لها.

ب ـ استخدم القاعدة (27.4) للحصول على توقع متوسط المربعات في الجدول (٢٥ـ٦) لهذا النموذج.

(٢٧ ـ ٨) بالإشارة إلى نموذج القطاع العشوائي (27.18) ولكن مفترضا أن تأثيرات القطاع عشوائية.

أ ـ استخدم القاعدة (٢٧ ـ ٣) والتعديل (27.16) للحصول على صيغ مجاميع المربعات التعريفية ودرجات الحرية المصاحبة لها.

ب ـ استخدم قاعدة (٢٧ ـ ٤) للحصول على توقع متوسط المربعات.

(٢٧ ـ ٩) في دراسة متوازنة ثلاثية العامل، كان العاملان A ، C متصالبين والعامل B محضن ضمن العامل C. تأثيرات العامل A مثبتة وتأثيرات العاملين B و C عشوائية. وهناك n تكرارا لكل معالجة.

أ ـ استخدم القاعدة (٢٧ ـ٣)أ للحصول على صيغ مجاميع المربعات الحسابية ودرجات الحرية المصاحبة لها.

ب ـ استخدم القاعدة (٢٧ ـ ٤) للحصول على توقع متوسط المربعات.

جـ ـ ماهو متوسط المربعات المناسب كمقام لاختبار التأثيرات الرئيسة للعامل A.

(٢٧ـ١٠) **حوافز السبّاح.** درس أحد أندية السباحة الكبيرة للشباب تأثيرات ثلاثة حوافز تشجيعية على الأداء وكانت الحوافز الثلاثة هي:(١) تقديم جائزة تقديرية (٢) منح امتيازات قائد فريق و (٣) الإعلان في صحيفة النادي.وبما أنه من المعروف أن للعمر علاقة بالأداء، فقد تم تجميع السباحين التسعة المشتركين في الدراسة وفقا لأعمارهم، في ثلاثة قطاعات كل منها يتضمن ثلاثة سباحين. وضمن كل قطاع تم تخصيص

السباحين عشوائيا واحد لكل معالجة تشجيع وبعد قدر مناسب من التدريب تم قياس الزمن الذي يستغرقه كل سباح لسباحة مسافة مثبتة وذلك في ثلاث مناسبات. وفيما يلي البيانات المرمزة عن الوقت المنصرم في كل من المحاولات الثلاث.

قطاع	مشاهدة	المعالجة التشجيعية $j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
		جائزة تقديرية	قيادة	إعلان
$i = 1$	$k = 1$	28	26	27
(8 - 7) سنوات	$k = 2$	32	24	29
	$k = 3$	31	27	30
$i = 2$	$k = 1$	24	22	20
(10 - 9) سنوات	$k = 2$	26	19	21
	$k = 3$	23	18	22
$i = 3$	$k = 1$	18	13	17
(11-12) سنوات	$k = 2$	21	16	19
	$k = 3$	20	15	19

أوجد الرواسب لنموذج القطاع العشوائي (27.18) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهي استنتاجاتك حول صلاحية النموذج (27.18)؟.

(٢٧-١١) بالإشارة إلى مسألة **حوافز السباح** (٢٧-١٠) افترض أن نموذج القطاع العشوائي (27.18) بتأثيرات مثبتة للقطاعات والمعالجات هو نموذج مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - اختبر ما إذا كانت متوسطات الفترات الثلاث هي نفسها للحوافز التشجيعية أم لا استخدم $\alpha = .05$ اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P للاختبار.؟

جـ ـ قم بجميع المقارنات الثنائية بين المتوسطات الثلاثة للمعالجات، استخدم طريقة توكي بمعامل ثقة عائلي 90%. اعرض نتائجك.

د ـ أوجد تقديرا نقطيا لكل من σ^2، σ_γ^2 هل يبدو أحد التباينات أكبر من الآخر؟ ناقش.

تمارين

(٢٧-١٢) استنبط (27.11a) لدراسة متوازنة ثلاثية العامل.

(٢٧-١٣) استخدم (27.14) وحقيقة أن التباين المقدر غير منحاز لإيجاد $\sigma^2\left\{\bar{Y}_{1j..}-\bar{Y}_{2j..}\right\}$ لنموذج التحاين (27.6). ماهو العدد التقريبي لدرجات الحرية المصاحبة للتباين المقدَّر؟

الفصل الثامن والعشرون

القياسات المتكررة والتصاميم ذات الصلة

ستتابع في هذا الفصل تصاميم القياسات المتكررة وهي تصاميم تُستخدم بكثره في العلوم السلوكية وعلوم الحياة. وسنبدأ بدراسة بعض العناصر الأساسية لتصاميم القياسات المتكررة. ثم نقدم تصاميم القياسات المتكرره أحادية العامل وبعدها نناقش التجارب ثنائية العامل بقياسات متكرره لكل من العاملين ولعامل واحد، فقط. ونختتم هذا الفصل بتقديم تصاميم القطع المنشقه والتي يمكن النظر إليها على أنها حاله خاصة من تصاميم القياسات المتكرره.

(٢٨-١) عناصر تصاميم القياسات المتكرره

وصف التصاميم

تستخدم تصاميم القياسات المتكرره العنصر نفسه (شخص، محل، نبات، سوق، اختبار،.. الخ) لكل من المعالجات تحت الدراسة، وهكذا يخدم العنصر المدروس كقطاع، ويمكن النظر إلى الوحدات التجريبية داخل القطاع على انها المناسبات المختلفة التي تُطبق فيها المعالجة على العنصر. وقد يشمل دراسة القياسات المتكررة عدة معالجات أو معالجة واحدة يجرى تقويمها في أوقات مختلفه. وتشمل العناصر المستخدمة في دراسة القياسات المتكرره في العلوم السلوكيه وعلوم الحياة، اشخاصا ، أُسرا ، مراقبين وحيوانات تجريبية. وسنشير إلى جميع الوحدات المدروسه في تصاميم القياسات المتكررة كعناصر.

وفيما يلي ثلاثة أمثلة لتصاميم القياسات المتكرره:

١ ـ يراد استخدام خمسة عشر سوق اختبار لدراسة حملتين دعائيتين مختلفتين. وفي كل سوق اختبار نقوم بتعشيه ترتيب الحملتين مع فاصل زمني كاف يفصل بين الحملتين وبحيث لاتُرَحّل تأثيرات الحملة الأولى إلى الحملة الثانية والعناصر في هذه الدراسة هي أسواق الاختبار.

٢ـ يُراد إعطاء مائتي شخص يعانون باستمرار من الشقيقه دواءين مختلفين ودواء وهميا ، كل منهما لمدة اسبوعين مع تعشية ترتيب الأدوية بالنسبة لكل شخص. والعناصر في الدراسة هم الأشخاص الذين يعانون من الشقيقة.

٣ـ في دراسة لتخفيف الوزن، يُراد تطبيق الحميه نفسها على مائة من الأشخاص المتصفين بالسمنه وتُقاس أوزانهم في نهاية كل اسبوع لمدة 12 أسبوعا وذلك لتقدير الخسارة في الوزن مع مضي الزمن. والعناصر هنا هم الأشخاص السّمان الذين روقبوا بصورة متكرره للحصول على معلومات حول تأثيرات معالجة وحيدة فوق الزمن.

وتشير كل هذه الدراسات إلى تصميم قياسات متكرره لأن القياس أعيد على الشخص نفسه أكثر من مرة. وهذه هي الخاصة الرئيسة التي تميز هذا النوع من التصميم عن التصاميم التي ناقشناها سابقا .

المزايا والمساوئ

أحد المزايا الرئيسة لتصاميم القياسات المتكرره انها تعطي دقة جيدة لمقارنة المعالجات، وذلك بسبب استبعاد جميع مصادر التغير بين العناصر من الخطأ التجريبي. ولايدخل في الخطأ التجريبي إلا التغير ضمن العناصر، حيث يمكن مباشرة مقارنة أي معالجتين وذلك من أجل كل عنصر. وهكذا يمكن النظر إلى العناصر على أنها تخدم كضوابط لذاتها. ومن المزايا الأخرى لتصميم القياسات المتكررة أنها إقتصادية من حيث الحاجة إلى عناصر للدراسة. ويكون هذا مهما على وجه الخصوص عندما تتوافر عناصر قليلة، فقط، (مثلا محلات تجارية، نباتات، اسواق اختبار) مما يمكن استخدامه في التجربة. وكذلك عندما نهتم بتغير تأثيرات معالجة مع الزمن، كأن نهتم

بشكل منحني التعلم لسير عملية جديدة، فيكون من المستحسن مشاهدة العنصر نفسه في أوقات مختلفة بدلا من مشاهدة عناصر تختلف باختلاف هذه الأوقات.

ومع ذلك، فلتصاميم القياسات المتكرره مساوئ محتملة خطرة، ونعني أنه قد تكون هناك عدة أنواع من التداخل. ويتصل أحد أنواع التداخل هذه بالترتيب الذي تحتله المعالجه. وعلى سبيل المثال، عند تقويم خمسة اعلانات مختلفة، قد تنحو العناصر لمنح رتبه تصنيف أعلى (أقل) للاعلانات المقدمة في نهاية السلسلة مما تمنحه للاعلانات المقدمه في البداية. ويتعلق نوع آخر من التداخل بالمعالجة أو المعالجات السابقه. وعلى سبيل المثال، عند تقويم خمسة وصفات مختلفة لإعداد الحساء، فقد تحصل وصفة حساء غير مرّتبة على رتبة تصنيف أعلى (أقل) عندما تسبقها وصفة كثيرة البهارات مما لو كانت مسبوقة بوصفة ألطف من حيث محتواها من البهارات، ويسمى هذا النوع من التداخل التأثير المحمول.

ويمكن اتخاذ تدابير مختلفة لجعل خطورة التداخل أقل مايمكن، فتعشية ترتيب المعالجات لكل عنصر بصورة مستقلة عن أي عنصر آخر ستجعل تحليل البيانات، كما لو كانت حدود الخطأ مستقلة، تحليلا أكثر معقولية. كما يشكل السماح بوقت كاف بين المعالجات، غالبا ، وسيلة فعالة لتقليل التأثيرات المحمولة. وقد يكون من المستحسن إقامة توازن في ترتيب تقديم المعالجات، وأحيانا يكون من المستحسن إقامة توازن حتى في عدد المرات التي تكون فيها المعالجة مسبوقه بأي معالجة أخرى. ومما يفيد في هذا المنحى تصاميم المربع اللاتيني وتصاميم التحميل المتوازن (ستناقش في الفصل ٢٩).

كيفية التعشية:

تعشيه ترتيب المعالجات المخصصة لعنصر هي عملية سهلة. فمن أجل كل عنصر، نستخدم متبادلة عشوائية لتعريف ترتيب المعالجة متبعين الأسلوب المذكور في الفقرة (4-2). ثم نختار تباديل مستقله للعناصر المختلفة.

ملاحظة

ينبغي عدم الخلط بين تصاميم القياسات المتكررة التي نوقشت هنا والتصاميم ذات المشاهدات المتكررة التي نوقشت في الفقرة (٢٦ـ٧)، ففي تصاميم القياسات المتكررة، يتم تطبيق عدة معالجات أو جميعها على العنصر نفسه. أما التصاميم ذات المشاهدات المتكررة، فهي تصاميم تتم فيها عدة مشاهدات للمتغير التابع من أجل معالجة معينة نطبقها على وحدة تجريبية. ومن الممكن تطوير تصميم قياسات متكررة بمشاهدات متكررة، كأن نُخضع عنصرا معطى لكل معالجة من المعالجات قيد الدراسة، وعند تطبيق كل معالجة نحصل على عدد من المشاهدات لهذه المعالجة بالذات.

(٢٨ـ ٢) تجارب أحادية العامل مع قياسات متكررة لجميع المعالجات

سنعتبر أولا تصاميم القياسات المتكررة عندما تكون المعالجات على أساس عامل بمفرده، كما في أمثلة الفقرة (٢٨ ـ ١) ويُنظر، بصفة دائمة تقريبا ، إلى العناصر (أشخاص، محلات، أسواق اختبار، حيوانات تجريبية) على أنها عينة عشوائية من مجتمع ما، وبالتالي، فسننظر إلى تأثيرات العناصر على أنها عشوائية في كافة نماذج تصاميم القياسات المتكررة المقدمة في هذا الفصل.

يحتوي الجدول (٢٨ـ١) على مخطط تجربة أحادية العامل بقياسات متكررة لجميع المعالجات. ولدينا هنا خمس عناصر وأربع معالجات، مع تعشيه ترتيب المعالجات تعشيه مستقلة من أجل كل عنصر من العناصر. لاحظ أن هذا المخطط يقابل المخطط المذكور في الجدول (٢٤ ـ١) من اجل تصميم قطاع عشوائي. وفي الحقيقة، وكما سنرى الآن، فإن نماذج تصميم قياسات متكررة أحادي العامل هي رسميا تصاميم القطاع العشوائي بالذات، مع اعتبار العناصر الآن كقطاعات.

النموذج

يكون النموذج التجميعي التالي مناسبا ، في الغالب، لتصميم قياسات متكررة احادي العامل مع تأثيرات مثبتة للمعالجات.

$$Y_{ij} = \mu.. + \rho_i + \tau_j + \varepsilon_{(ij)} \tag{28.1}$$

حيث: $\mu..$ ثابت

ρ_i مستقله و $N(0,\ \sigma_p^2\ )$

τ_j ثوابت خاضعة للقيد $\sum\tau_j = 0$

ε_{ij} مستقلة و $N(0,\sigma^2)$

ρ_i و $\varepsilon_{(ij)}$ مستقلة

$i=1, ..,n\ , j = 1, ..\ ,r$

جدول (٢٨-١) مخطط لتصميم قياسات متكررة أحادية العامل $(n = s\ , r = 4)$

	ترتيب المعالجة			
	1	2	3	4
العنصر 1	T_4	T_3	T_2	T_1
2	T_3	T_4	T_1	T_2
3	T_4	T_3	T_1	T_2
4	T_2	T_1	T_4	T_3
5	T_1	T_2	T_4	T_3

لاحظ أن نموذج القياسات المتكررة (28.1) يتطابق مع نموذج القطاع العشوائي (25.12) مع تأثيرات عشوائية للقطاع، فيما عـدا أننـا نستخدم الآن الرمز ϵ_{ij} لنبـين عدم وجود تكررات في هذا التصميم.

وبالتالي نعرف من الفقرة (٢٥ ــ ٤) أن نموذج القياسات المتكررة (28.1) يفترض مايلي حول المشاهدات Y_{ij}:

$$E\{Y_{ij}\} = \mu.. + \tau_j \tag{28.2a}$$

$$\sigma^2\{Y_{ij}\} = \sigma_Y^2 = \sigma_\rho^2 + \sigma^2 \tag{28.2b}$$

$$\sigma\{Y_{ij}, Y_{ij'}\} = \sigma_\rho^2 + \omega\,\sigma_Y^2 \tag{28.2c}$$

حيث ω معامل الارتباط بين أي مشاهدتين للعنصر نفسه:

$$\omega = \frac{\sigma_\rho^2}{\sigma_Y^2} \tag{28.2d}$$

ولذلك، يفترض نموذج القياسات المتكررة (2-28) أنه وقبل أية محاولات عشوائية (أي قبل اجراء التجربة) يرتبط أي زوج Y_{ij} من مشاهدات المعالجة، من أجل عنصر معطى، بالطريقة نفسها، وذلك من أجل جميع العناصر. ويتضمن هذا الفرض الرئيس، كما رأينا في (25.17)، أن مصفوفه التباين ـ التغاير للمشاهدات Y_{ij} تتصف بالتناظر المركب من أجل أي عنصر معطى. وقبل أية محاولات عشوائية، وطبقا للنموذج (1-28)، تكون أية مشاهدتين من عنصرين مختلفين مستلقتان.

وعلى القدر نفسه من الأهمية، تعلم من الفصل٢٥ أن نموذج القياسات المتكررة (28.1) يفترض أنه، حالما يتم اختيار العناصر، تكون أية مشاهدتين من عنصر معطى مستقلتين. ولهذا يفترض النموذج (28.1) أنه ليست هناك تأثيرات تداخل في دراسة القياسات المتكررة، مثل تأثيرات الترتيب أو التأثيرات المحمولة من معالجة إلى المعالجة التي تليها.

ملاحظة

إذا وُجدت تأثيرات تفاعل بين العناصر والمعالجات، فيمكن استخدام النموذج (25-20) ،وكما لاحظنا في الفصل ٢٥، يؤدي كل من نموذجي التفاعل واللاتفاعل إلى طرق الاستقراء نفسها حول تأثيرات المعالجات.

تحليل التباين والاختبارات

بما أن نموذج القياسات المتكررة (28.1) هو نفسه نموذج القطاع العشوائي (25.12) ، فسيبقى تحليل التباين واختبار تأثيرات المعالجات كما كان في السابق تماما .

تحليل التباين: مجاميع مربعات التحاين لنموذج القياسات المتكررة (28.1) معطاة في (24.6)، ولكن تتغير عادة تسمية مجموعين من مجاميع المربعات الخاصة بتطبيقات القياسات المتكره. فالآن سيُسمى مجموع مربعات القطاعات في (24. 6a) مجموع مربعات العناصر، وسيسمى مجموع مربعات التفاعل بين القطاعات والمعالجات

في (24-6c) مجموع مربعات التفاعل بين المعالجات والعنـاصر. وسيتم ترميز مجموعي المربعات هذين بالرمزين $SSTR.S$ و SSS ، علـى الـترتيب. وسـيكون تفكيـك تحليـل التباين لنموذج قياسات متكررة أحادي العامل (28-2) كما يلي:

$$SSTO = SSS + SSTR + SSTR.S \qquad (28.3)$$

$$SSTO = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 \qquad (28.3a)$$

$$SSS = r\sum_i (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 \qquad (28.3b)$$

$$SSTR = n\sum_j (\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \qquad (28.3c)$$

$$SSTR.S = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 \qquad (28.3d)$$

لاحظ أنه لايوجد مجموع مربعات خطأ وذلك لعدم وجود تكرارات هنا.

يحتوي الجدول (٢٨-٢) على جدول تحليل التباين لنموذج القياسـات المتكـررة (28,1). وهو جدول التحاين نفسه في الجـدول (٢٥-٦) لنمـوذج القطـاع العشـوائي التجميعي (25.12) ماعدا التغير في الرموز.

لاحظ مـرة أخـرى، أنـه في غيـاب التفـاعل بـين المعالجـات والعنـاصر، يكـون متوسط مربع التفاعل $MSTR.S$ مقدرا غير منحاز لتباين الخطأ σ^2.

جدول (٢٨-٢) جدول تحاين لتصميم قياسـات متكـررة أحـادي العـامل نموذج تحـاين (28.1) بتأثيرات عشوائية للعناصر وتأثيرات مثبتة للمعالجات.

مصدر التغير	SS	df	MS	$E\{MS\}$
العناصر	SSS	$n - 1$	MSS	$\sigma^2 + r\sigma_\rho^2$
المعالجات	$SSTR$	$r - 1$	$MSTR$	$\sigma^2 + \frac{n}{r-1}\sum \tau_j^2$
الخطأ	$SSTR.S$	$(r-1)(n-1)$	$MSTR.S$	σ^2
المجموع	$SSTO$	$nr - 1$		

ملاحظة

في دراسات القياسات المتكررة، نقوم أحيانا بدمج $SSTR$ و $SSTR.S$ لتشـكل مجموع مربعات ماضمن العناصر SSW:

$$SSW = SSTR + SSTR.S \qquad (28.4)$$

والتي يمكن أن تبيان أنها تساوي:

$$SSW = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}) \qquad (28.4a)$$

وبالتالي يمكن التعبير عن تفكيك التحاين في (28.3) كما يلي:

$$SSTO = \underset{\text{تشتت ما بين العناصر}}{SSS} + \underset{\text{تشتت ما ضمن العناصر}}{SSW} \qquad (28.5)$$

اختبار تأثيرات المعالجات: كما يشير العمود $E\{MS\}$ في الجدول (٢٨-٢) فإن الإحصاءة المناسبة لاختبار تأثيرات المعالجات:

$$H_0: \text{كل } \tau_j \text{ يساوي الصفر} \qquad (28.6a)$$
$$H_a: \text{ليس كل } \tau_j \text{ مساوٍ للصفر}$$

$$F^* = \frac{MSTR}{MSTR.S} \qquad (28.6b)$$

وتحت H_0 تتبع F^* التوزيع F، كما سبق، وقاعدة القرار لضبط الخطأ من النوع الأول عند α هي:

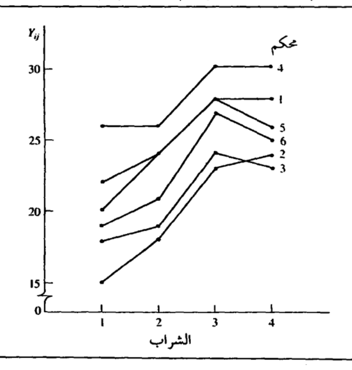
$$\text{إذا كانت } F^* \le F[1-\alpha; r-1, (r-1)(n-1)] \text{ استنتج } H_0 \qquad (28.6c)$$
$$\text{إذا كانت } F^* > F[1-\alpha; r-1, (r-1)(n-1)] \text{ استنتج } H_a$$

مثال. في احدى مسابقات الحكم على جودة شراب معين، تم الحكم على أربعة زجاجات من الشراب من انتاج السنة نفسها من قبل ستة من المحكمين. تذوّق كل محكّم الشراب دون معرفة هويته. وقد تم بصورة مستقلة تعشية ترتيب تقديم الشراب لكل محكّم. ولتخفيض التأثيرات المحمولة وتأثيرات التداخلات الأخرى، لم يبتلع المحكمون ماتذوقوه من الشراب، كما قام المحكمون لغسل أفواههم غسلا شاملا بالماء بين تذوّقين. وتم إعطاء كل زجاجة درجة على سلّم بين 0 و 40 وكلما كانت الدرجة أكبر، كلما كانت زجاجة الشراب أفضل. ويوضح الجدول (٢٨-٣) بيانات تلك المسابقه. ويبين الشكل (٢٨-١) رسما لدرجات الشراب من أجل كل محكم.

جدول (٢٨-٣) بيانات مثال الحكم على شراب

محكم i	الشراب (j) 1	2	3	4	$\bar{Y}_{i.}$
1	20	24	28	28	25
2	15	18	23	24	20
3	18	19	24	23	21
4	26	26	30	30	28
5	22	24	28	26	25
6	19	21	27	25	23
$\bar{Y}_{.j}$	20.00	22.00	26.67	26.00	$\bar{Y}_{..}=23.67$

شكل (٢٨-١) رسم لدرجات الشراب لكل محكَم - مثال الحكم على جودة شراب



وقد اعُتبر المحكمون الستة عينة عشوائية من مجتمع كافة المحكمين، بينما كان الاهتمام بزجاجات الشراب الأربع لذاتها، وبالتالي يكون نموذج القياسات المتكررة أحادي العامل (28-1) مناسبا ، مع اعتبار تأثيرات العناصر (المحكمين) عشوائية وتأثيرات المعالجات (زجاجات الشراب) مثبتة. وكما سنرى فيما بعد، يشير التحليل

التشخيصي إلى أن نموذج التحاين (28.1) هو نموذج مناسب للبيانات.

ويحتوي الجدول (٢٨ـ٤) على تحليل التباين لبيانات الحكم على شراب الواردة في الجدول (٢٨ـ٣). والحسابات، لاصعوبة فيهـا، وقـد تم الحصـول عليهـا باستخدام حزمة حاسب. ولاختبار تأثيرات المعالجات:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$$

Ha : ليس كل τ_j يساوي صفر

تُستخدم النتائج في الجدول (٢٨ـ٤):

$$F^* = \frac{MSTR}{MSTR.S} = \frac{61.333}{1.067} = 57.5$$

ونحتاج إلى $F(.99; 3, 15) = 5.42$ من أجل مستوى معنويـه $\alpha = .01$ ،وبمـا أن $F^* = 57.5 > 5.42$ نسـتنتج H_a، أي أن متوسـطات رتـب التصنيـف لأنـواع الشـراب الأربعة تختلف بعضها عن بعض، والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0^+.

تعليقات

١ــ كمـا لاحظنـا في الفصـل٢٥ (في التعليـق ٢ صفحـة)، إذا لم يتحقـق فـرض التناظر المركب في نموذج القياسات المتكررة (28.1) ،فيجب استخدام اختبـار متحفـظ لتأثيرات المعالجات. (بمعنى أنه مـن أجـل أي عنصـر معطـى لم يـبق تبـاين المشـاهدات لمعالجات مختلفة نفسه في جميع العناصر. أو إذا لم يبق الارتباط نفسه بين أي مشاهدتين من معالجتين مختلفتين لعنصر معطى، وذلك من أجل جميع أزواج المعالجات، ومن أجل جميـع العنـاصر) وعلـى سـبيل المثـال، ستُنتهك فرضيـة التنـاظر المركـب إذا كـانت الاستجابات المتكررة مع الزمن مرتبطة ارتباطا أعلى للمشاهدات المتقاربة من بعضهـا زمنيا مما هو للمشاهدات المتباعده زمنيا .

٢ـ تبقى إحصاءة الاختبار (28.6b) وقاعدة الاختبار (28.6c) مناسبتان لاختبـار تأثيرات المعالجات عندما تكون هذه التأثيرات عشوائية.

جدول (٢٨-٤) جدول تباين لتصميم قياسات متكررة أحادي العامل مثال الحكم على جودة الشراب.

مصدر التغير	SS	df	MS
الحكام	173.333	5	34.667
الشراب	184.000	3	61.333
الخطأ	16.000	15	1.067
المجموع	373.333	23	

٣- يمكن قياس فعالية تصميم القياسات المتكررة في مثال جودة الشراب بالنسبة إلى التصميم تام التعشية، حيث يُستخدم كل محكم لتذوق زجاجة شراب واحدة بواسطة (24.14) وباستخدام نتائج الجدول (٢٨-٤) نحصل على:

$$\hat{E}=\frac{(n-1)MSS+n(r-1)MSTR.S}{(nr-1)MSTR.S}=\frac{5(34.667)+6(3)(1.067)}{23(1.0067)}$$

ولذلك، فإننا سنحتاج تقريبا إلى ثمانية أضعاف التكرارات لكل معالجة في حالة استخدام تصميم تام التعشيه، حيث يعطي كل محكم رتبة تصنيف لزجاجة شراب واحدة، كي نبلغ، عند تقدير متضادة، الدقة نفسها التي يقدمها استخدام تصميم القياسات المتكررة.

٤- عندما يتضمن تصميم قياسات متكررة أحادي العامل $r=2$ معالجة، تكون الإحصاءة F^* في (28.6b) مكافئة لاختبار t ذي الجانبين الخاص بأزواج من المشاهدات، وهو الاختبار المبني على إحصاءة الاختبار (1.6b).

٥ - من وقت لآخر، نرغب في اختبار رسمي لتأثيرات العناصر.

$$H_0:\sigma_\rho^2=0$$
$$H_a:\sigma_\rho^2\succ 0$$

ويشير الجدول (٢٨-٢) إلى أن إحصاءة الاختبار المناسبة في نموذج القياسات المتكررة (28.1) هي $F^*=MSS\setminus MSTR\text{-}S$.

تقويم مصداقية نموذج القياسات المتكررة

تبقى مناقشاتنا السابقة حول التشخيصات الخاصة لنماذج قطاع عشوائية قابلة للتطبيق تماما هنا لأن نموذج القياسات المتكررة (28.1) مكافئ لنموذج القطاع العشوائي (25.12). وعلى وجه الخصوص، فإن رسم الاستجابات Y_j في مقابل العناصر، كما في الشكل (٢٨-١)، يمكن استخدامه للكشف عن مؤشرات قصور خطير في التوازي، مما يقترح أن النموذج التجميعي (28.1) قد لايكون مناسبا .

كما أن رسما متسلسلا للرواسب من أجل كل عنصر قد يكون نافعا لدراسة ثبات تباين الخطأ، ولوجود تأثيرات تداخل والرواسب في حالة نماذج القياسات المتكررة (28.1) معطاه في (24.5).

$$e_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{.j} + \overline{Y}_{..} \tag{28.7}$$

ورسم الاحتمال الطبيعي للتأثيرات الرئيسة المقدّرة للعناصر $\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}$ يمكن أن يكون مفيدا في تقويم ما إذا كانت التأثيرات الرئيسة للعناصر ρ_i تتوزع توزيعا طبيعيا بتباين ثابت.

وبالإضافة إلى هذه التشخيصات البيانية، يمكن استخدام المصفوفات المقدرة للارتباط والتباين ــ التغاير ضمن العناصر Y_{ij} لتقويم مصداقية نموذج القياسات المتكررة. والعنصر النموذجي في مصفوفه التباين ــ التغاير هو التغاير المقدّر، ضمن العناصر، لمشاهدات خاصة بالمعالجتين j, j':

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_{ij} - \overline{Y}_{.j})(Y_{ij} - \overline{Y}_{.j})}{n-1} \tag{28.8}$$

وينبغي أن تُظهر مصفوفة التباين ـ التغاير المقدَّرة ضمن العناصر تباينات من المرتبة نفسها من حيث الحجم، كما ينبغي أن تكون حجوم التغايرات جميعها من مراتب متماثله في الحجم، وبالطبع تنحو التباينات والتغايرات المقدَّرة إلى أن تكون عرضة لأخطاء المعاينة، ما لم تكن حجوم العينات كبيرة جدا . وبالتالي ينبغي النظر إلى الإختلافات المعتدلة في التباينات والتغايرات على أنها، في الغالب، نتيجة لأخطاء المعاينة.

وينبغي أن تُظهر مصفوفة الارتباط المقدَّرة معاملات ارتباط متماثلة تقريبا بين أزواج من مشاهدات المعالجة ضمن عنصر.

وفي النهاية يمكن القيام باختبار توكي الموصوف في فقرة (٢١ـ٢)لاختبار

صلاحية النموذج التجميعي. وسينبغي تفسير هذا الاختبار على أنه مشروط هنا بالعناصر المستخدمة فعلا في دراسة القياسات المتكررة.

مثال. في مثال جودة الشراب، تم الحصول على الرواسب من (28.7) وعُرضت في الشكل (٢٨-٢) رسوم نقطية مصطفة لكل زجاجة شراب. وتؤيد تلك الرسوم فرضية ثبات تباين الخطأ. ويوضح الشكل (٢٨-٢)ب رسما متسلسلا للرواسب من أجل كل محكم، حيث رُسمت الرواسب وفقا للترتيب الذي جرى فيه تذوّق الشراب بواسطة كل محكم. ولاتُعطي تلك الرسوم أية مؤشرات على وجود ارتباطات لحدود الخطأ ضمن محكم، مما يقترح عدم وجود تأثيرات تداخل. وفي النهاية يبين الشكل (٢٨-٢)حـ رسم احتمال طبيعي للرواسب. ويقدم هذا الشكل دليلا على تأثير الطبيعة التقريبية للبيانات، ولكنه لايقترح وجود أي حيدان رئيس عن الطبيعية. ومعامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية هو 993. مما يقترح، أيضا، أن النقص في الطبيعية ليس مشكلة هنا.

ويقدم الجدول (٢٨-٥) المصفوفات المقدرة للتباين - التغاير وللارتباط ضمن العناصر. والاختلافات الملحوظة هناك يمكن أن تنشأ بسهولة عن أخطاء المعاينة.

جدول (٢٨-٥) مصفوفات تباين - تغاير وارتباط بين مشاهدات المعالجات مثال الحكم على جودة شراب

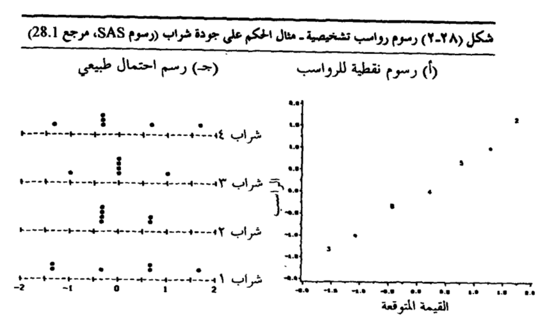
(أ) مصفوفة التباين والتغاير

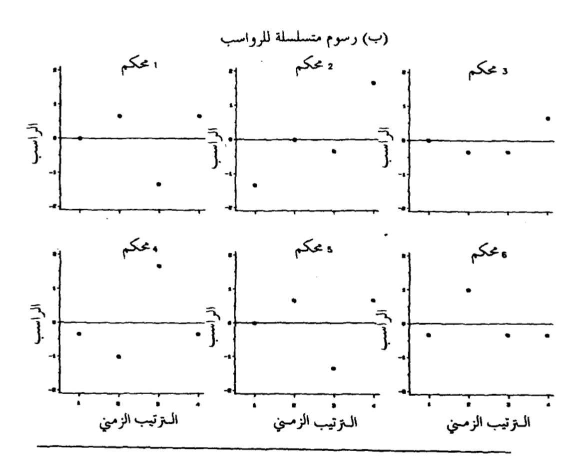
j \ j'	1	2	3	4
1	14.000	11.000	9.200	8.200
2		10.000	8.200	7.600
3			7.067	6.200
4				6.800

(ب) مصفوف الارتباط

j \ j'	1	2	3	4
1	1	.930	.925	.840
2		1	.957	.922
3			1	.894
4				1

شكل (٢٨-٢) رسوم رواسب تشخيصية ـ مثال الحكم على جودة شراب (رسوم SAS، مرجع 28.1)





وتؤيد رسوم الاستجابات لكل عنصر المبينة في شكل (٢٨ــ١) ، أيضــا، صلاحية النموذج (28.1) ، حيث تبدو درجة التوازي بين الرسوم الخاصة بالمحكمين مقبولة، وهكذا فليس هناك مايشير إلى وجود تفاعل بين العناصر والمعالجات. وبناء على ذلك وعلى التشخيصات الأخرى، استُنتج أن نموذج القياسات المتكررة (28.1) مناسب بصورة معقولة لبيانات مثال الحكم على جودة شراب.

تحليل تأثيرات المعالجات

يمضي تحليل تأثيرات المعالجات لنموذج القياسات المتكررة (28.1) بالطريقة نفسها تماما الموصوفة في الفقرة (٢٤ــ٧) لتصاميم قطاع عشوائي بتأثيرات مثبتة للمعالجات، وتبقى المضاعفات في (24-9) الخاصة بوضع حدود ثقة كما هي. ويظل متوسط مربعات التفاعل هو متوسط المربعات المستخدم لتقدير التباين للمتضادات المقدرة، ويُرمز له الآن بـ *MSTR.S*. وسنوضح أساليب التقدير بمثال.

مثال. في مثال الحكم على جودة شراب كان مرغوبا مقارنة متوسطات جميع أزواج المعالجات μ_j بمعامل ثقة عائلي 95% μ_j هو هنا متوسط رتب التصنيف للشراب فوق جميع المحكمين. وقد استُخدم أسلوب توكي لهذا الغرض. وباستخدام (15.25) ووضع *MSTR.S* بدلا من *MSE* والنتائج في الجدول (٢٨-٤)، نحصل على:

$$s^2\{\hat{D}\} = MSTR.S\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = 1.067\left(\frac{2}{6}\right) = .3557$$

وباستخدام (24.9b) وبمعامل ثقة عائلي 95% نجد:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}q(.95;4.15) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4.08) = 2.885$$

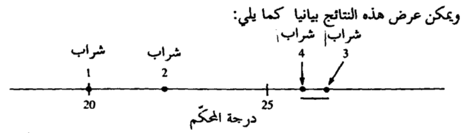
وبالتالي:

$$Ts\{\hat{D}\} = 2.885\sqrt{.3557} = 1.72$$

وهكذا نحصل على المقارنات الثنائية (أنظر الجدول ٢٨-٣ لقيم $\bar{Y}_j$):

$$-2.39 = (26.00-26.67) - 1.72 \le \mu_4 - \mu_3 \le (26.00-26.67) + 1.72 = 1.05$$
$$2.28 = (26.00-22.00) - 1.72 \le \mu_4 - \mu_2 \le (26.00-22.00) + 1.72 = 5.72$$
$$4.28 = (26.00-20.00) - 1.72 \le \mu_4 - \mu_1 \le (26.00-20.00) + 1.72 = 7.75$$
$$2.95 = (26.67-22.00) - 1.72 \le \mu_3 - \mu_2 \le (26.67-20.00) + 1.72 = 6.39$$
$$4.95 = (26.67-20.00) - 1.72 \le \mu_3 - \mu_1 \le (26.67-20.00) + 1.72 = 8.39$$
$$.28 = (22.00-20.00) - 1.72 \le \mu_2 - \mu_1 \le (22.00-20.00) + 1.72 = 3.72$$

ويمكن عرض هذه النتائج بيانيا كما يلي:



ونستنتج من هذه المقارنة الثنائية أن الشرابين 4,3 هما الأفضل، وأنهما لايختلفان معنويا بعضهما عن بعض. وقد صُنف الشرابان 2,1 على أنهما أقل جودة من 4,3 مع تخلف رتبة الشراب 1 عن رتبة الشراب2 ومعامل الثقة العائلي لجميع المقارنات هو 0.95.

البيانات المرتبة

كثيرا ماتكون المشاهدات في دراسات القياسات المتكررة رتبا كما لو طلبنا من عدد من الذواقه أن يرتب كل منهم وصفات طعام، أو عندما نطلب من مسئولي القبول في عدة جامعات ترتيب طلبات متقدمين للقبول. وعندما تكون البيانات في دراسة قياسات متكررة رتبا ، فيمكن استخدام اختبار فريدمان الموصوف في الفقرة (٢٥-٢)لاختبار ماإذا كانت متوسطات المعالجات متساوية. وحيث أنه ليست هناك أية مبادئ جديدة، فسنمضي مباشرة إلى مثال.

مثال. طُلب من كل من ستة أشخاص ترتيب خمسة من محلّيات القهوة وفقا لمذاقهم المفضل، بحيث تخصص الرتبة 5 إلى المحلّي الأكثر تفضيلا . ويوضح الجدول (٢٨-٦) البيانات وبعض النتائج الحسابية الأساسية وإحصاءة الاختبار (25.4) هي هنا:

$$X_F^2 = \left[\frac{12}{6(5)(6)}(1{,}836)\right] - 3(6)(6) = 14.4$$

ولمستوى معنوية $\alpha = .05$، نحتاج إلى $\chi^2(.95;4) = 9.49$ وبما أن $\chi_F^2 = 14.4 > 9.49$ ، نستنتج عدم تساوي درجات التفضيل للمحليات الخمسة. القيمة -P لهذا الاختبار هي 006.

ونرغب الآن في القيام بجميع الاختبارات الثنائية مستخدمين (25.5) وبمستوى معنوية عائلي 20. =α ومن أجل $r = 5$ تكون $g = 5(4)/2 = 10$. وبالتالي نجد من أجل $n = 6$:

$$B = z[1 - .20/2(10)] = z(.99) = 2.326$$

وهكذا يكون الحد الأيمن في (25.5):

$$B\left[\frac{r(r+1)}{6n}\right]^{1/2}=2.326\left[\frac{5(6)}{6(6)}\right]^{1/2}=2.12$$

جدول (٢٨ـ٦) البيانات المرتبة لمحلّيات القهوة في تصميم قياسات متكررة

العنصر i	مُحلّي (j)				
	A	B	C	D	E
1	5	1	2	4	3
2	4	2	1	5	3
3	3	2	1	4	5
4	5	2	3	4	1
5	4	1	2	3	5
6	4	1	3	5	2
$R_{.j}$	25	9	12	25	19
$\bar{R}_{.j}$	4.17	1.50	2.00	4.17	3.17

$$\Sigma R_{.j}^2=(25)^2+(9)^2+(12)^2+(25)^2+(19)^2=1,836$$

ونلاحظ من الجدول (٢٨ـ٦) أن أزواج متوسطات الرتب التي لاتزيد فروقها عن 2.12 هي (A,D) (A,E) ,(D,E) ، (C,E)، (B,E) و (B,C) وبالتالي يمكننا وضع مجموعتين لاتختلف متوسطات المعالجات ضمن كل منهما.

المجموعة ١		المجموعة ٢	
المُحلّي B	$\bar{R}_{.2}=1.50$	المُحلّي E	$\bar{R}_{.5}=3.17$
المُحلّي C	$\bar{R}_{.3}=2.00$	المُحلّي A	$\bar{R}_{.1}=4.17$
المُحلّي E	$\bar{R}_{.5}=3.17$	المُحلّي D	$\bar{R}_{.4}=4.17$

وهكذا، نستنتج وبمستوى معنوية عائلي 20. أن المحلّيين A و D مفضلان على B,C ،وليس واضحا ما إذا كان المحلّي E ضمن المجموعة المفضلة أو ضمن المجموعة الأخرى.

تعليقات

١ــ يمكن، أيضا، استخدام اختبار فريدمان لتصاميم قياسات متكررة بمشاهدات غير مرتبة، وذلك في حالة ابتعاد توزيع حدود الخطأ عن الطبيعية وتُخصص الرتب للمشاهدات Y_{ij} عندئذ ضمن كل عنصر، ثم يُنفَّذ اختبار فريدمان بالطريقة المعتادة.

٢ـ يتصل χ_F^2 بمعامل التوافق W لكاندل بالطريقة التالية:

$$W = \frac{X_F^2}{n(r-1)} \tag{28.9}$$

ومعامل التوافق W هو مقياس التوافق بين الترتيبات المقدمة من العناصر الـ n. ويكون مساويا 1 إذا كان التوافق تاما ، ومساويا للصفر إذا لم يكن هناك أي اتفاق. أي إذا كان لجميع المعالجات متوسط رتب التصنيف نفسه. ولمثال تحلية القهوة في الجدول (٢٨ـ٦) تكون W:

$$W = \frac{14.4}{6(4)} = .60$$

مما يشير إلى قدر مقبول من التوافق بين العناصر.

(٢٨ـ٣) تجارب ثنائية العامل مع قياسات متكررة لكل من العاملين

ناقشنا في الفقرة السابقة دراسات قياسات متكررة أحادية العامل ويمكن بسهولة توسيع النموذج الخاص بهذه التصاميم إلى حالات تتبع فيها المعالجات بناء عامليا . على سبيل المثال، اعتبر أن لدينا في دراسة أربع معالجات تمثل مستويين لكل عامل من عاملين. فالجدول (٢٨ـ٧) يوضح المخطط لمثل هذا التصميم حيث استُخدم أربعة عناصر في الدراسة. لاحظ تعشية ترتيب المعالجات ضمن كل عنصر. وعندما تمثل المعالجات بناء عامليا ، نستطيع كالعادة استكشاف تأثيرات التفاعل إلى جانب التأثيرات الرئيسة لكلا العاملين. ويقال عن التصميم في الجدول (٢٨ـ٧) أنه يمثل قياسات متكررة للعاملين كليهما ،لأن كل عنصر يتلقى جميع المعالجات التي يعرّفها البناء العاملي.

النموذج

عندما تكون تأثيرات العوامل مثبتة وتشكل العناصر عينة عشوائية، فكثيرا مايكون النموذج التالي، والذي يفترض، مثله مثل النموذج (28.1) ، عدم وجود تفاعل بين المعالجات والعناصر، النموذج المناسب للحالة التي توجد فيها قياسات متكررة لكل من العاملين.

جدول (٢٨-٧) مخطط لتصميم قياسات متكررة ثنائي العامل مع قياسات متكررة لكل من العاملين (b=2, a=2, n=4)

		ترتيب المعالجة			
		1	2	3	4
العنصر	1	A_1B_2	A_2B_2	A_1B_1	A_2B_1
	2	A_2B_1	A_1B_2	A_2B_2	A_1B_1
	3	A_2B_2	A_1B_1	A_2B_1	A_1B_2
	4	A_1B_1	A_2B_1	A_1B_2	A_2B_2

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{(ijk)} \quad (28.10)$$

حيث:

$\mu_{..}$ ثابت

ρ_iمستقلة و $N(0, \sigma_\rho^2)$

α_j ثوابت خاضعة للقيد $\Sigma\alpha_j = 0$

β_k ثوابت خاضعة للقيد $\Sigma\beta_j = 0$

$(\alpha\beta)_{jk}$ ثوابت خاضعة للقيود $\sum_j(\alpha\beta)_{ij}$ لجميع قيم k و $\sum_k(\alpha\beta)_{ij}$ لجميع قيم j .

ε_{ijk} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

ρ_i ، $\varepsilon_{(ijk)}$ مستقلة

$i = 1, .., n; j = 1, .., a; k = 1, .., b$

وللمشاهدات Y_{ijk} في نموذج القياسات المتكررة (28.10) الخواص التالية:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{...} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} \quad (28.11a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma_Y^2 + \sigma_\rho^2 = \sigma^2 \quad (28.11b)$$

(28.11c) $\sigma\{Y_{ijk}, Y_{ij'k'}\} = \sigma_\rho^2$ ليس $j = j'$ و $k = k'$ في الوقت نفسه.

ولهذا، يفترض نموذج القياسات المتكررة (28.10) أن للمشاهدات Y_{ijk} تباينا ثابتا ، وأن تغاير أي مشاهدات معالجة للعنصر نفسه هو قبل إجراء التجربـة، تغـاير ثـابت. ووفقا للنموذج (28.10) تكون أي مشاهدتين لعنصرين مختلفين، وقبل إجراء التجربة، مستقلتين. وفي النهاية نفترض أن جميع المشـاهدات تتبـع التوزيـع الطبيعي. والنمـوذج (28.10) هو مدّ مباشر لنموذج القياسات المتكررة أحادي العامل (28.1) حيث يجـري الآن تفكيك المعالجة τ_j إلى تأثيرات رئيسة للعـامل A، وللعـامل B وتأثـير تفـاعل AB. لاحظ مرة أخرى أن الرمز $\varepsilon_{(ijk)}$ قـد استُخدم بسـبب عـدم وجـود تكـرارات في هـذا التصميم.

وحالما يتم اختيار العناصر، يفترض نمـوذج القياسـات المتكـررة (28.10)، مثلـه مثل نموذج القياسات المتكررة السـابق (28.1) أن جميـع مشـاهدات المعالجـات لعنصـر معطى هي مشاهدات مستقله ـ بمعنى أنه ليس هناك تأثيرات تداخل.

تحليل التباين واختبارات

تحليل التباين. يمكن الحصول بسهولة على مجـاميع مربعـات التحـاين للنمـوذج (28.10) باتباع القاعدة (٢٧ ـ ٣) في صورتها المعدلة (27.16). ويجب الحصـول علـى مجموع المربعات المستخدمة لتقدير تباين الخطأ كباقي، حيث لايوجـد هنـا تكـرارات. ونجد في النتيجة أن هذا المجموع هو مجموع مربعات التفـاعل $SSTR.S$، الـذي يعكـس تفاعلا بين المعالجات والعناصر. ويقدم الجدول (٢٨ـ٨) تفكيـك التحـاين، ودرجـات الحرية، وتوقع متوسط المربعـات لنمـوذج القياسـات المتكـررة ثنـائي العـامل (28.10). ويمكن الحصول على توقع متوسط المربعات بسهولة باتباع القاعدة (٢٧ـ٤).

جدول (٢٨-٨) جدول تحاين ومجاميع المربعات لتصميم قياسات متكررة ثنائي العامل بقياسات متكررة لكل من العاملين - العناصر عشوائية، والعاملان A وB مثبتان.

(أ) جدول تحاين

مصدر التغير	SS	df	MS	$E\{MS\}$
عناصر	SSS	$n-1$	MSS	$\sigma^2+ab\sigma_\rho^2$
عامل A	SSA	$a-1$	MSA	$\sigma^2+\frac{nb}{a-1}\sum\alpha_j^2$
عامل B	SSB	$b-1$	MSB	$\sigma^2+\frac{na}{b-1}\sum\beta_k^2$
التفاعلات AB	$SSAB$	$(a-1)(b-1)$	$MSAB$	$\sigma^2+\frac{n}{(a-1)(b-1)}\sum\sum\beta_k^2$
خطأ	$SSTR.S$	$(n-1)(ab-1)$	$MSTR.S$	σ^2
مجموع	$SSTO$	$abn-1$		

(ب) مجاميع مربعات

$$SSS=ab\sum_i(\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{...})^2$$

$$SSA=nb\sum_j(\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y}_{...})^2$$

$$SSB=na\sum_k(\bar{Y}_{..k}-\bar{Y}_{...})^2$$

$$SSAB=n\sum_j\sum_k(\bar{Y}_{.jk}-\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y}_{..k}-\bar{Y}_{...})^2$$

$$SS\,\mathrm{Re}m=SSTR.S=\sum_i\sum_j\sum_k(\bar{Y}_{ijk}-\bar{Y}_{i..}-\bar{Y}_{.jk}-\bar{Y}_{...})^2$$

اختبارات تأثيرات العوامل

يتضح من عمود توقع متوسط المربعات في الجدول (٢٨-٨) إمكانية استخدام اختبار تأثيرات التفاعل AB التالي:

H_0: جميع $(\alpha\beta)_{jk}$ مساوية للصفر

H_a: ليست جميع $(\alpha\beta)_{jk}$ مساوية للصفر (28.12 a)

إحصاءة الاختبار:

$$F^*=\frac{MSAB}{MSTR.S} \qquad (28.12b)$$

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند α هي:

(28.12c)

إذا كان $F^* \leq F[1 - \alpha; (a - 1)(b - 1), (n - 1)(ab - 1)]$ استنتج H_0

إذا كان $F^* < F[1 - \alpha; (a - 1)(b - 1), (n - 1)(ab - 1)]$ استنتج H_a

واختبار التأثير الرئيس للعامل A:

(28.13a)

H_0: جميع α_j مساوية للصفر

H_a: ليست جميع α_j تساوي الصفر

يستخدم إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{MSA}{MSTR.S} \quad (28.13b)$$

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند α هي:

(28.13c)

إذا كان $F^* \leq F[1 - \alpha; (a - 1)(b - 1), (n - 1)(ab - 1)]$ استنتج H_0

إذا كان $F^* < F[1 - \alpha; (a - 1)(b - 1), (n - 1)(ab - 1)]$ استنتج H_a

وبالمثل، فإن اختبار التأثير الرئيس للعامل B:

(28.14a)

H_0: جميع β_k مساوية للصفر

H_a: ليست جميع β_k تساوي الصفر

يستخدم احصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{MSB}{MSTR.S} \quad (28.14b)$$

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند α هي:

(28.14c)

إذا كان $F^* \leq F[1 - \alpha; (a - 1)(b - 1), (n - 1)(ab - 1)]$ استنتج H_0

إذا كان $F^* < F[1 - \alpha; (a - 1)(b - 1), (n - 1)(ab - 1)]$ استنتج H_a

تعليقات

١ ـ عندما تكون تأثيرات أي من العاملين A و B عشوائية، فيمكن إيجاد توقع متوسط المربعات بتطبيق القاعدة (٢٧ ــ ٤). وفي المقابل سيحدد توقع متوسط المربعات إحصاءة الاختبار المناسبة.

٢ - ينبغي استخدام اختبار F المتحفظ الموصوف في الفصل ٢٥ عندما لايتحقق فرض التناظر المركب في نموذج القياسات المتكررة (28.10).

٣ - يفترض نموذج القياسات المتكررة (28.10) عدم تفاعل المعالجات والعناصر ويمكن تخفيف هذا الفرض لأن مجموع مربعات التفاعل بين المعالجات والعناصر مؤلف من ثلاث مركبات:

$$SSTR.S = SSAS + SSBS + SSABS$$

حيث $SSAS$ مجموع مربعات التفاعل بين العامل A والعناصر، والحدود الأخرى معرفة بصورة مشابهة. وهكذا يمكن ان نسمح بوجود تفاعلات من المرتبة الأولى بين العامل A والعناصر، وبين العامل B والعناصر، ونفترض، فقط، أن تفاعلات المرتبه الثانية بين العامل A والعناصر وبين العامل B والعناصر تساوي الصفر. ويصبح تحليل تأثيرات العوامل أكثر تعقيدا ، إلى حد ما، عندما نسمح في نموذج القياسات المتكررة ببعض التفاعلات بين المعالجات والعناصر.

تقويم مصداقية نموذج القياسات المتكررة

تنطبق هنا، أيضا، مناقشاتنا السابقه حول مصداقية نموذج القياسات المتكررة (28.1). وعلى وجه الخصوص ينبغي إعداد سلسلة رسوم الرواسب لكل عنصر وذلك لفحص ماإذا كانت توجد تأثيرات تداخل، ومـاإذا كان تباين الخطأ ثابتا . وينبغي استخدام رسوم المشاهدات لكل عنصر لرؤية ما إذا كان افتراض عدم وجود تفاعل بين المعالجات والعناصر مناسبا .

تحليل تأثيرات العوامل

في حالة وجود تفاعل قوي بين A و B لايمكن التخلص منه بتحويل بسيط، فينبغي القيام بتحليل تأثيرات العوامل بدلالة متوسط المعالجات μ_{k}، وهي متوسطات فوق العناصر. ويمضي هذا التحليل بصورة مماثلة لما وجدناه من أجل دراسة أحادية العامل، حيث μ_{jk} يقابلها هناك متوسط المعالجة μ_{j} وسيُستخدم متوسط المربعات $MSTR.S$ هنا، أيضا، في تقدير تباين أي متضادة مقدّرة لمتوسطات المعالجات. وإذا لم يكن هناك تفاعل بين العاملين A و B ، أو أنهما يتفاعلان تفاعلا غير ذي بال،

فسيمضي تحليل التأثيرات الرئيسة للعامل A، وللعامل B كالمعتاد. ولتحليل التأثيرات الرئيسه لأي من العامل A أو العامل B، سنستخدم $MSTR.S$ في التباين المقدَّر لمتضادّة مقدّرة باعتباره يشكل مقام، احصاءة الاختبار F^* لاختيار التأثيرات الرئيسة للعامل A أو للعامل B.

وتكون مضاعفات الإنحراف المعياري المقدَّر لمتضادة مقدّرة بين متوسطات مستويات العامل A أو العامل B كما يلي:

	تأثير A الرئيس	تأثير B الرئيس
	مقارنة بمفردها	
(28.15a)	$t[1-\alpha/2; (n-1)(ab-1)]$	$t[1-\alpha/2; (n-1)(ab-1)]$
	طريقة توكي للمقارنات الثنائية	
(28.15b)	$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1-\alpha; b, (n\ 1)(ab-1)]$	$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q[1-\alpha; a, (n-1)(ab-1)]$
	طريقة شيفّيه	
(28.15c)	$S^2 = (b-1)F[1-\alpha; b-1, (n-1)(ab-1)]$	$S^2 = (a-1)F[1-\alpha; a-1, (n-1)(ab-1)]$
	طريقة بونفيرني	
(28.15d)	$B = t[1-\alpha/2g; (n-1)(ab-1)]$	$B = t[1-\alpha/2g; (n-1)(ab-1)]$

مثال:

درس أحد الأطباء تأثيرات عقارين، يُستخدمان معا أو منفردين على تدفق الدم في عناصر بشرية، اشترك في الدراسة اثني عشر من الذكور من متوسطي العمر واعتبروا على أنهم عينة عشوائية من مجتمع مناسب من الذكور متوسطي العمر. وقد تمَّ تعريف المعالجات الأربع المستخدمة في الدراسة كما يلي:

بلاسيبو (لايوجد أي من العقارين)	A_1B_1
عقار B فقط	A_1B_2
عقار A فقط	A_2B_1
عقار A وعقار B	A_2B_2

تلقى كل من الـ 12 شخصا المعالجات الأربع وفق ترتيب عشوائي مستقل والمتغير التابع هو الزيادة في تدفق الدم من قُبيل تطبيق المعالجة إلى مابعد تطبيقها بقليل. وتم إعطاء المعالجات في أيام متتالية. وقد حال هذا دون وجود أية تأثيرات محمولة نظرا لقصر فترة تأثير العقار.

تم اجراء التجربة بطريقة مضاعفة التعمية، أي لايعرف أي من الطبيب أو العنصر المعالجة المطبقة عند قياس التغير في تدفق الدم. ويحتوي الجدول (٢٨ـ٩) على بيانات هذه الدراسة، وتعبّر القيمة السالبة عن تراجع في تدفق الدم. وقد استُخدمت حزمة الحاسب *MINITAB* (مرجع 28.2) لتوفيق نموذج القياسات المتكررة (28.10) ويحتوي الشكل (٢٨ـ٣) على مطبوعة المخرجات. وتشمل هذه المطبوعة توقع متوسط المربعات لنموذج التحابن المذكور. ويمثل كل حد من توقع متوسط المربعات رمزيا برمز (بين هلالين) لتباين حد النموذج، والرقم السابق هو المضاعف الرقمي. وعندما يكون حد النموذج مثبتا ، يُستخدم الحرف Q في مطبوعةُ المخرجات ليبيّن أن التباين حل محله بمجموع مربعات التأثير مقسوما على درجات الحرية. على سبيل المثال، وكما هو موضح في شكل (٢٨ـ٣)، تكون القيمه المتوقعة لِ MSA:

$$(5)+24Q[2]=\sigma^2+24\frac{\Sigma\alpha_j^2}{a-1}$$

وهي تقابل بالطبع توقع متوسط المربعات المبين في الجدول (٢٨ـ٨).

وقد استخدمت تشخيصات مختلفة لرؤية ما إذا كان نموذج القياسات المتكررة (28.10) مناسبا لبيانات الجدول (٢٩ـ٩). وقد أيّدت النتائج (غير معروضة هنا) صلاحية هذا النموذج. توقع الطبيب أن يتفاعل العقاران في زيادة تدفق الدم، ولاختبار تأثيرات التفاعل:

H_0: جميع $(\alpha\beta)_{jk}$ مساوية للصفر

H_a : ليس جميع $(\alpha\beta)_{jk}$ مساوية للصفر:

نستخدم إحصاءة الاختبار (28.12b) ،والنتائج من الشكل (٢٨ـ٣) هي:

$$F^*=\frac{MSAB}{MSTR.S}=\frac{147.000}{2.35}=62.6$$

ونحتاج إلى $F(0.99;1,33)=7.47$ لمستوى معنوية $\alpha=.01$، وبما أن $F^*=62.6>7.47$، نستنتج وجود تأثيرات تفاعل. والقيمة ـ P لهذا الاختبار هي 0^+.

جدول (٢٨-٩) بيانات مثال تدفق الدم.

العنصر i	معالجة A_1B_1	A_1B_2	A_2B_1	A_2B_2
1	2	10	9	25
2	-1	8	6	21
3	0	11	8	24
4	3	15	11	31
5	1	5	6	20
6	2	12	9	27
7	-2	10	8	22
8	4	16	12	30
9	-2	7	7	24
10	-2	10	10	28
11	2	8	10	25
12	-1	8	6	23

شكل (٢٨-٣) مُخرجات حاسب لتحاين بيانات مثال تدفق الدم (مينيتاب، مرجع [28.2])

```
Factor   Type    Levels                       Values
S        random    12      1    2    3    4    5    6    7    8
                                                9   10   11   12
A        fixed      2      1    2
B        fixed      2      1    2

Analysis of Variance for Y

Source     DF        SS         MS        F       P
S          11    258.50      23.50    10.01   0.000
A           1   1587.00    1587.00   675.75   0.000
B           1   2028.00    2028.00   863.54   0.000
A*B         1    147.00     147.00    62.59   0.000
Error      33     77.50       2.35
Total      47   4098.00      87.19

Source      Variance   Error   Expected Mean Square
            component  term    (using restricted model)
 1 S          5.288      5     (5) + 4(1)
 2 A                     5     (5) + 24Q[2]
 3 B                     5     (5) + 24Q[3]
 4 A*B                   5     (5) + 12Q[4]
 5 Error      2.348            (5)

   MEANS

  A   B    N         Y
  1   1   12     0.500
  1   2   12    10.000
  2   1   12     8.500
  2   2   12    25.000
```

ويحتوي الشكل (٢٨-٤) رسماً للمتوسطات المقدرة للمعالجات $\bar{Y}_{.jk}$ وهو معطى في الشكل (٢٨-٣). ويتضح وجود تأثيرات تفاعل قوية. ولدراسة طبيعة

تأثيرات التفاعل، رغب الطبيب في مقارنة بين استخدام العقارين معا وبين استخدام كل عقار على حده مقارنة العقار A مع العقار B، ثم مقارنة بين كل عقار والبلاسيبو. ولذا تقرّر القيام بالمقارنات الثنائية التالية:

$$D_1 = \mu_{22} - \mu_{21} \qquad D_4 = \mu_{21} - \mu_{11}$$
$$D_2 = \mu_{22} - \mu_{12} \qquad D_5 = \mu_{12} - \mu_{11}$$
$$D_3 = \mu_{21} - \mu_{21}$$

والتقديرات النقطية لهذه المقارنات الثنائية (قيم $\bar{Y}_{jk}$ موجودة في الشكل (٢٨-٣)).

$$\hat{D}_1 = 25.0 - 8.5 = 16.5 \qquad \hat{D}_4 = 8.5 - .5 = 8.0$$
$$\hat{D}_2 = 25.0 - 10.0 = 15.0 \qquad \hat{D}_5 = 10.0 - .5 = 9.5$$
$$\hat{D}_3 = 8.5 - 10.0 = -1.5$$

والتباين المقدَّر لكل $\hat{D}$ معطى في (13-15) ومتوسط المربعات المناسبة هنا هو $MSTR.S$ وبالتالي لدينا:

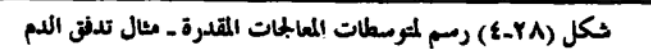
$$s^2\{\hat{D}\} = MSTR.S\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = 2.348\left(\frac{2}{12}\right) = .3913$$

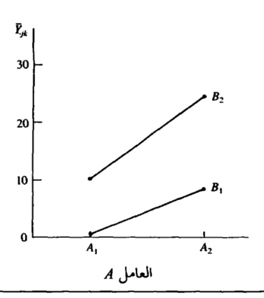
$s\{\hat{D}\} = .626$ ، وباستخدام أسلوب بونفيروني وبمعامل ثقة عائلي 95% نحتاج إلى $B = t[1-(.05)/2(5);33] = t(0.995;33) = 2.733$.

وبالتالي $t(.995)s\{\hat{D}\} = 2.733(.626) = 1.71$ وفترات الثقة المطلوبة بمعامل ثقة عائلي 95% هي:

$$6.3 \le \mu_{21} - \mu_{11} \le 9.7 \qquad 14.8 \le \mu_{22} - \mu_{21} \le 18.2$$
$$7.8 \le \mu_{12} - \mu_{11} \le 11.2 \qquad 16.3 \le \mu_{22} - \mu_{12} \le 16.7$$
$$-3.2 \le \mu_{21} - \mu_{12} \le .2$$

ويتضح من هذه النتائج أن العقار A وحده أو العقار B وحده يؤدي إلى زيادة تدفق الدم، وتؤدي تركيبة العقارين إلى زيادة إضافية كبيرة في تدفق الدم بالمقارنة مع استخدام أي من العقارين بمفرده. وأخيرا لايوجد فرق معنوي بين متوسطي التأثيرات لكل من العقارين على حده.


شكل (٢٨-٤) رسم لمتوسطات المعالجات المقدرة ـ مثال تدفق الدم



(٢٨-٤) تجارب ثنائية العامل مع قياسات متكرره على عامل واحد

وصف التصميم

في كثير من الدراسات ثنائية العامل، يمكن القيام بالقياسات المتكررة على أحد العاملين فقط. اعتبر، على سبيل المثال، رغبة أحد الباحثين في دراسة تأثيرات نوعين من الحوافز (عامل A) على قدرة الشخص على حل المشاكل. أراد، أيضا، ان يدرس نوعين من المشاكل (عامل B) ـ مشاكل مجرده ومشاكل محسوسة. ويستطيع أن يطلب من كل عنصر تجريبي القيام بكل من نوعي المشاكل، ولكنه لايستطيع تطبيق إلا نوع واحد من الحوافز التشجيعية على عنصر بسبب تأثيرات التداخل. وهكذا يمكن تمثيل مخطط التصميم الذي استخدمه الباحث كما هو مبين في الجدول (٢٨-١٠).

يتم استخدام تعشيتين، بصورة عامة، في تجربة ثنائية العامل مع قياسات متكررة على عامل واحد. فأولا، نحتاج إلى تخصيص مستويات العامل غير المتكرر (A في الجدول ٢٨-١٠) عشوائيا إلى العناصر. وثانيا، نحتاج إلى تعشية ترتيب مستويات العامل المتكرر (B في الجدول ٢٨-١٠) بصورة مستقلة من أجل كل عنصر. وحيث أنه تم تخصيص الحافز التشجيعي A_1 عشوائيا لـ n من العناصر، وتخصيص الحافز

التشجيعي A_2 عشوائيا لـ n من العناصر، فتكون التجربة للعامل A تجربة تامة التعشية. وفي المقابل، وبالنسبة للعامل B (نوع المشكلة) يشكل كل عنصر قطاعا.

وهكذا تكون التجربة بالنسبة للعامل B، تصميم قطاع عشوائي مع تأثيرات عشوائية للقطاع، ويسمى هذا التصميم التجريبي تجربة ثنائية العامل مع قياسات متكررة على العامل B. وتنطوي المقارنات بين متوسطات مستويات العامل A، في التجربة الموصوفة في الجدول (١٠-٢٨)، على اختلافات بين مجموعات من العناصر، بالإضافة إلى الإختلافات المتعلقة بمستوى العامل A. ولكن المقارنات بين متوسطات مستويات العامل B عند المستوى نفسه للعامل A، مبنية على العنصر نفسه، وبالتالي فهي تنطوي، فقط، على اختلافات متعلقة بمستويي العامل B. ولهذا يخدم كل عنصر كضابط لنفسه في هذه المقارنات. ولذلك، يقال إن التأثيرات الرئيسة للعامل A قد اختلطت مع الاختلافات بين مجموعتي العناصر، بينما بقيت التأثيرات الرئيسة للعامل B حرة من ذلك الإختلاط. ولهذا السبب تكون الاختبارات لتأثيرات العامل B الرئيسة أكثر حساسية بصفة عامة من اختبارات التأثيرات الرئيسة للعامل A.

جدول(١٠-٢٨) مخطط تصميم ثنائي العامل مع تخصيص عشوائي لمستويات العامل A إلى العناصر وقياسات متكررة على العامل B.

حافز تشجيع	عنصر	ترتيب المعالجة 1	ترتيب المعالجة 2
	1	A_1B_1	A_1B_2
	.	.	
A_1	.	.	
	.	.	
		A_1B_1	A_1B_2
	$n+1$	A_2B_2	A_2B_1
	.		
A_2	.		
	.		
	$2n$	A_2B_1	A_2B_2

تعليقات

١ ـ يمكن النظر إلى تجربة ثنائية العامل بقياسات متكررة على عامل واحد على أنها تصميم قطاع غير تام. وبالإشارة إلى تصميم القياسات المتكررة في الجدول (٢٨ــ١٠) هناك أربعة معالجات (A_2B_2, A_2B_1, A_1B_2, A_1B_1) ونصف القطاعات (العناصر) يحتوي المعالجات A_1B_2 و A_1B_1، بينما يحتوي النصف الآخر من القطاعات المعالجات A_2B_1 و A_2B_2.

٢ ـ عندما يكون الزمن هو العامل الذي أُخذت عليه القياسات المتكررة، لانحتاج إلى تعشية مستويات هذا العامل. اعتبر على سبيل المثال، دراسة حملتين من الحملات الدعائية المختلفة والتي يتم قياس تأثيرها على المبيعات في 10 أسواق اختبار خلال أربعة أشهر متتابعة، فالتعشية المطلوبة هنا هي تخصيص الحملات الدعائية لأسواق الاختبار، وبالمثل ، لايكون هناك تعشية للعامل، إذا كان ذلك العامل، غير المتكرر قياسه، صفة من صفات العناصر، كعمر الشخص مثلا .

النموذج

إن تطوير النموذج لتجربة ثنائية العامل مع قياسات متكررة على أحد العوامل، فقط، هو أكثر تعقيدا من الحالات السابقة. وكما سبق سنطور النموذج في حالة تأثيرات عشوائية للعناصر وتأثيرات مثبتة للعامل A وللعامل B.

لنرمز ، كالمعتاد ، بـ αi و β_k للتأثير الرئيس للعامل A وللعامل B ، على الترتيب، ولنرمز بـ ρ للتأثير الرئيس للعنصر (القطاع). ويبقى أن ندرك هنا أن تأثير العنصر في هذا التصميم محضّن العامل A، ولذلك سنرمز لهذا التأثير بالرمز $\rho_{i(j)}$ وسنفترض، كما سبق عدم وجود تفاعلات بين المعالجات والعناصر، مع أن هذا الشرط لايشكل شرطا أساسيا هنا. والنموذج الذي يستوعب المواصفات السابقة هو النموذج التالي:

$$Y_{ijk} = \mu... + \rho_{i(j)} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{(ijk)} \qquad (28.16)$$

حيث:

μ... ثابت

$\rho_{i(j)}$ مستقلة و $N(0,\ \sigma_p^2)$

α_i ثوابت خاضعة للقيد $\Sigma\alpha_i = 0$

β_k ثوابت خاضعة للقيد $\Sigma\beta_k = 0$

$(\alpha\beta)_{jk}$ ثوابت خاضعة للقيود $\sum_j(\alpha\beta)_{jk}$ لجميع قيم k و $\sum_k(\alpha\beta)_{jk}$ لجميع قيم j .

ε_{ijk} مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$i = 1,.., n\ ; j = 1,..\ a\ ; k = 1,..,b$

وللمشاهدات Y_{ijk} لنموذج القياسات المتكررة (28.16) الخواص التالية:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} \qquad (28.17a)$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma_Y^2 = \sigma_\rho^2 + \sigma^2 \qquad (28.17b)$$

$$\sigma\{Y_{ijk}, Y_{ijk'}\} = \sigma_\rho^2 \quad k \neq k' \qquad (28.17c)$$

وهكذا يكون للمشاهدات Y_{ijk} تباين ثـابت. وبالإضافة إلى ذلـك، وقبـل اجـراء التجربة، يكون لأي مشاهدتين من مستويات مختلفة من العامل B علـى العنصـر نفسـه تغاير ثابت، وذلك من أجل جميع العناصر، بينما تكون المشاهدات على عناصر مختلفـة مستقلة، ونفترض ، أيضا، أن كل المشاهدات تتوزع توزيعا طبيعيا.

وحالما يجري اختبار العناصر، يفترض نموذج القياسات المتكررة (28.16) استقلال أية مشاهدتين على العنصر نفسه، أي أنه ليس هناك تأثيرات تداخل.

تحليل التباين والاختبارات

تحليل التباين. يمكن الحصول على مجـاميع مربعـات التحـاين لنمـوذج القياسـات المتكررة (28.16) كالمعتاد باستخدام القاعدة (٢٧ - ٣) في صورتهـا المعدلـة (27-16)، وذلك بسبب عدم وجود تكرارات في هذا التصميم. ويصبح مجمـوع مربعـات البـاقي المستخدم في تقدير تبـاين الخطأ هـو مجمـوع مربعـات التفـاعل $SSB.S\ (A)$ ، ويبـين الجدول (٢٨-١١) مجاميع مربعـات التحـاين، كمـا يبـين الجـدول (٢٨-١١)، أيضـا، درجات الحرية لكل مجموع مربعات.

اختبارات تأثيرات العوامل. يقدم الجدول (٢٨ـ١٢) توقع متوسط المربعات لتحليل التباين في الجدول (٢٨ـ١١). ويمكن الحصول على توقعات متوسطات المربعات هذه باستخدام القاعدة (٢٧ ـ ٤).

جدول (٢٨ـ١١) تحليل التباين لتجربة ثنائية العامل بقياسات متكرره على العامل B ـ نموذج (28-16)

مصدر التغير	SS	df
العامل A	$SSA = bn\sum_j(\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})$	$a - 1$
العامل B	$SSB = an\sum_k(\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})^2$	$b - 1$
التفاعلات AB	$SSAB = n\sum_j\sum_k(\bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + \bar{Y}_{...})^2$	$(a-1)(b-1)$
العناصر (ضمن العامل A)	$SSS(A) = b\sum_i\sum_j(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{.j.})^2$	$a(n-1)$
خطأ	$SSRem =$ $SSB.S(A) = \sum_i\sum_j\sum_k(\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{ij.} + \bar{Y}_{.j.})^2$	الباقي = $a(n-1)(b-1)$
المجموع	$SSTO = \sum_i\sum_j\sum_k(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2$	$abn - 1$

ويتضح من توقع متوسطات المربعات في الجدول (٢٨ـ١٢) أن الاختبار لتأثيرات التفاعل AB:

$$H_0: \text{جميع } (\alpha\beta)_{jk} \text{ مساوية للصفر} \qquad H_a: \text{ليس جميع } (\alpha\beta)_{jk} \text{ مساوية للصفر} \tag{28.18a}$$

يستخدم إحصاءة الاختبار:

$$F^* = \frac{MSAB}{MSB.S(A)} \tag{28.18b}$$

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند α هي:

$$\text{إذا كان } F^* \le F[1 - \alpha; (a - 1)(b - 1), (n - 1)(b - 1)] \text{ استنتج } H_0$$
$$\text{إذا كان } F^* < F[1 - \alpha; (a - 1)(b - 1), (n - 1)(b - 1)] \text{ استنتج } H_a \tag{28.18c}$$

والاختبار لتأثيرات العامل A الرئيسة:

$$H_0: \text{جميع } \alpha_j \text{ مساوية للصفر} \qquad H_a: \text{ليست جميع } \alpha_j \text{ تساوي الصفر} \tag{28.19a}$$

يستخدم إحصاءة الاختبار:

$$F^{*} = \frac{MSA}{MSS(A)} \qquad (28.19b)$$

جدول (٢٨-١٢) توقع متوسط المربعات لتجربة ثنائية العامل بقياسات متكررة على العامل B ــ نموذج (28.16)، (A، B مثبتان والعناصر عشوائية)

مصدر التغير	MS	$E\{EM\}$
العامل A	MSA	$\sigma^2 + b\sigma_\rho^2 + bn\dfrac{\Sigma\alpha_j^2}{(a-1)}$
العامل B	MSB	$\sigma^2 + an\dfrac{\Sigma\beta_j^2}{(b-1)}$
التفاعلات AB	$MSAB$	$\sigma^2 + n\dfrac{\Sigma\Sigma(\alpha\beta)_j^2}{(a-1)(b-1)}$
العناصر (ضمن العامل A)	$MSS(A)$	$\sigma^2 + b\sigma_\rho^2$
الخطأ	$MSB.S(A)$	σ^2

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند α هي:

(28.19c)

إذا كان $F^{*} \le F[1 - \alpha, a - 1, a(n - 1)]$ استنتج H_0

إذا كان $F^{*} < F[1 - \alpha, a - 1, a(n - 1)]$ استنتج H_a

وأخيرا ، الاختبار لتأثيرات العامل B الرئيسة:

(28.20a)

H_0: جميع β_k مساوية للصفر

H_a: ليست جميع β_k تساوي الصفر

يستخدم إحصاءة الاختبار:

$$F^{*} = \frac{MSB}{MSB.S(A)} \qquad (28.20b)$$

وقاعدة القرار التي تضبط الخطأ من النوع الأول عند α هي:

(28.20c)

إذا كان $F^{*} \le F[1 - \alpha, b - 1, (n - 1)(b - 1)]$ استنتج H_0

إذا كان $F^{*} < F[1 - \alpha, b - 1, (n - 1)(b - 1)]$ استنتج H_a

تعليقات

١ ـ إذا لم يتوفر شرط التناظر المركّب في نموذج القياسات المتكررة (28.16)، فينبغي استخدام الاختبار المتحفظ الموصوف في الفصل ٢٥.

٢ ـ إذا لم يكن عدد العناصر ضمن كل مستوى من مستويات عامل A هو نفسه، تظهر مشاكل مشابهة لتلك الموجودة في دراسات ثنائية العامل غير متوازنة في تصميم تام التعشية. ومالم تعكس حجوم العينات أهمية المعالجات، فينبغي عادة تركيز الاهتمام على تحليلات تعطي متوسطات الخلايا أوزانا متساوية. وبينما تعالج كثير من الحزم الإحصائية الجاهزة البيانات غير المتوازنة، فلابد للمستخدم من أن يتأكد من أن الاختبارات التي تقدمها الحزمة تختبر الفروض التي يهتم بها المستخدِم.

تقويم مصداقية نموذج قياسات متكررة

تنطبق مناقشاتنا السابقه حول تقويم مصداقية نموذج قياسات متكررة هنا، أيضا، ، وتكون الرواسب لنموذج القياسات المتكررة (28.16).

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \overline{Y}_{.jk} - \overline{Y}_{ij.} + \overline{Y}_{.j.} \qquad (28.21)$$

وإحدى السمات الخاصة بنموذج القياسات المتكررة (16-28) جديرة بالاهتمام، إذ يتطلب هذا النموذج أن يبقى التباين بين العناصر σ_ρ^2 ثابتا لكل مستويات العامل A. ويمكن فحص هذا الافتراض برسوم نقطية للتأثيرات المقدَّرة للعناصر $\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{.j.}$ لكل مستوى من مستويات العامل A. ويمكننا، أيضا، القيام باختبار رسمي لتساوي تباينات مابين العناصر بملاحظة أنه يمكن تفكيك تباين مابين العناصر ضمن العامل A ، $SSS(A)$ إلى مركبات لكل مستوى من مستويات عامل A:

$$SSS(A) = SSS(A_1) + SSS(A_2) + \ldots + SSS(A_a) \qquad (28.22)$$

حيث:

$$SSS(A_j) = b\sum_i (\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{.j.})^2 \qquad (28.22a)$$

ويصاحب كل مركبة مجموع مربعات n-1 درجة حرية. ولذلك، يمكننا القيام

باختبار تساوي مابين العناصر باستخدام إحصاءة اختبار هارتلي (16.13).

وبالمثل، يمكن تفكيك باقي التغير $SSB.S(A)$ إلى مركبات من أجل كل مستوى من مستويات العامل A:

$$SSB.S(A) = SSB.S(A_1) + SSB.S(A_2) + ... + SSB.S(A_a) \qquad (28.23)$$

حيث:

$$SSB.S(A_j) = \sum_i \sum_k (Y_{ijk} - \overline{Y}_{.jk} - \overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{.j.})^2 \qquad (28.23a)$$

ويصاحب كل مركبه $(n-1)(b-1)$ درجة حرية. ويمكن القيام باختبار هارتلي هنا، أيضا ، ولكن في هذه المرة لاختبار المساواة بين تباين الخطأ σ^2 لمستويات العامل A المختلفة.

ويفترض كل من اختباري هارتلي الطبيعية، وهما حساسان لهذا الافتراض. وبالتالي ينبغي أولا إرساء صلاحية فرض الطبيعية قبل إجراء اختبارات هارتلي. وإذا لم يتوفر شرط الطبيعية، فقد يكون اللجوء إلى تحويل البيانات مفيدا.

تحليل تأثيرات العوامل

عندما لايتفاعل العلامان، أو عندما تكون التفاعلات غير مهمة، يمكن تحليل التأثيرات الرئيسة بطريقة مباشرة. ومتوسط المربعات المناسب في التباين المقدَّر لمتضادة بين متوسطات مستويات العامل A لنموذج القياسات المتكررة (28.16) هو $MSS(A)$ وذلك بسبب أنه المقام لإحصاءة F^* الخاصة باختبارات تأثيرات العامل A الرئيسه. وبصورة مماثلة، فإن متوسط المربعات لتقدير متضادات من متوسطات مستويات العامل B هو $MSB.S(A)$.

وتحتاج المضاعفات في (28.15) إلى التعديل فيما يتعلق بدرجات الحرية المصاحبة لمتوسط المربعات المستخدم، فقط: $a(n-1)$ لتحليل تأثيرات العامل A، و$a(n-1)(b-1)$ لتحليل تأثيرات العامل B.

لاحظ من الجدول (٢٨-١٢) أنه يمكن اجراء تحليل تأثيرات العامل B بدقة أكبر من دقة تحليل تأثيرات العامل A. وسبب ذلك هو أن المقارنات بين مستويات العامل A تنطوي على التشتت بين العناصر بالإضافة إلى الخطأ التجريبي في حين أن

المقارنات بين مستويات العامل B تنطوي على الخطأ التجريبي، فقط.

ويصبح تحليل تأثيرات العوامل أكثر تعقيدا عندما توجد تفاعلات بين العاملين، أنظر، على سبيل المثال، مرجع (28.3) لمناقشة هذه الحالة.

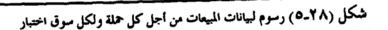
مثال

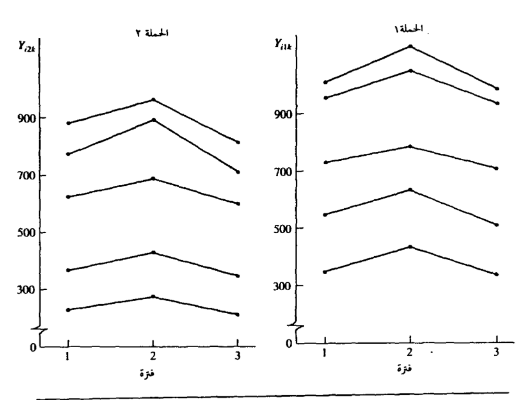
أرادت أحد سلاسل محلات التجزئه الأهلية دراسة تأثيرات حملتين دعائيتين (عامل A) على حجم مبيعات الأحذية الرياضية فوق فترة زمنية (عامل B)، وقد تمّ عشوائيا اختيار 10 أسواق اختبار (عناصر، S) للمشاركة في هذه الدراسة. وتشابهت الحملتان الدعائيتان (A_2, A_1) في كل شيء فيما عدا الاختلاف في استخدام شخصية رياضية معروفة على المستوى القومي في كل منها. تمّ جمع بيانات المبيعات لثلاث فترات كل منها أسبوعان (B_1 أسبوعان قبل الحملة، B_2 أسبوعان خلال الحملة، B_3 اسبوعان في ختام الحملة). وتمّ إجراء التجربة خلال فترة ستة أسابيع تكون فيها مبيعات الأحذية الرياضية مستقرة عادة.

ويقدم الجدول (٢٨-١٣) بيانات المبيعات (مرمّزة) وتمّ رسمها في الشكل (٢٨-٥) من أجل كل حملة دعائية، وذلك لكل سوق اختبار على حده. ليس هناك دليل في الشكل (٢٨-٥) على وجود تفاعلات بين أسواق الاختبار والمعالجات.

جدول (٢٨-١٣) بيانات مثال مبيعات أحذية رياضية.

حملة دعائية	سوق اختبار	فترة زمنية		
		$k=1$	$k=2$	$k=3$
$j=1$	$i=1$	958	1,047	933
	$i=2$	1,005	1,122	986
	$i=3$	351	436	339
	$i=4$	549	632	512
	$i=5$	730	784	707
$j=2$	$i=1$	780	897	718
	$i=2$	229	275	202
	$i=3$	883	964	817
	$i=4$	624	695	599
	$i=5$	375	436	351


شكل (٢٨-٥) رسوم لبيانات المبيعات من أجل كل حملة ولكل سوق اختبار



وبصورة عامة اتجهت المبيعات إلى الازدياد خلال كل حملة دعائية، ثم اتجهت إلى الانخفاض إلى المستويات السابقة للحملة الدعائية أو إلى أقل منها.

وبناء على الشكل (٢٨-٥) وتحليلات تشخيصية أخرى (غير مبينة هنا) تم استنتاج أن نموذج القياسات المتكررة (28-16) مناسب هنا. وبتشغيلة لحزمة حاسب خاصة لهذا النموذج، حصلنا على مطبوعة المخرجات المبينة في الشكل (٢٨-٦).

نرغب أولا في اختبار تأثيرات التفاعل بين الحملة والزمن.

H_0: كل $(\alpha\beta)_{jk}$ مساوية للصفر

H_a: ليست كل $(\alpha\beta)_{jk}$ مساوية للصفر

ونستخدم النتائج من الشكل (٢٨-٦) في إحصاءة الاختبار (28.18b).

$$F^* = \frac{MSAB}{MSB.S(A)} = \frac{196}{358} = 0.55$$

ونحتاج إلى $F(.95;\ 2,16)\ = 3.63$ مـن أجـل مستوى معنويـة α=.50 وبمـا أن $F^* = .55 \le 3.63$، فنستنتج H_0، أي ليـس هنـاك تأثـيرات تفـاعل مهمـة. والقيمـة ـ Pلهذا الاختبار هي 0.59.

نرغب بعد ذلك في اختيار التأثيرات الرئيسه للحملة الدعائية:

H_0: كل α_j يساوي الصفر

H_a: ليست كل α_j يساوي الصفر

شكل (٢٨ـ٦) مخرجات الحاسب لتحاين بيانات مثال مبيعات الأحذية الرياضية (هيني تاب ـ مرجع [28.2])

Factor	Type	Levels	Values				
A	fixed	2	1	2			
S(A)	random	5	1	2	3	4	5
B	fixed	3	1	2	3		

Analysis of Variance for Y

Source	DF	SS	MS	F	P
A	1	168151	168151	0.73	0.417
S(A)	8	1833681	229210	640.31	0.000
B	2	67073	33537	93.69	0.000
A*B	2	391	196	0.55	0.589
Error	16	5727	358		
Total	29	2075023	71553		

Source	Variance component	Error term	Expected Mean Square (using restricted model)
1 A		2	(5) + 3(2) + 15Q[1]
2 S(A)	76284.0	5	(5) + 3(2)
3 B		5	(5) + 10Q[3]
4 A*B		5	(5) + 5Q[4]
5 Error	358.0		(5)

MEANS

A	N	Y
1	15	739.40
2	15	589.67

B	N	Y
1	10	648.40
2	10	728.80
3	10	616.40

ونستخدم النتائج من الشكل (٢٨ـ٦) في إحصاءة الاختبار (28.19b):

$$F^* = \frac{MSA}{MSS(A)} = \frac{168,151}{229,210} = .73$$

ونحتاج إلى $F(.95; 1,8) = 5.32$ من أجل مستوى معنويـه $\alpha = .05$ وحيـث أن $F^* = .73<5.32$، فنستنتج H_0، أي أنه لاتوجد تأثيرات رئيسة للحملة الدعائيـة. والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0.42. وهكذا يكـون لكـل مـن الشخصيتين الرياضيتين تأثيرات متعادلة في الحملة الدعائية.

ونرغب في النهاية في اختبار تأثيرات الفترة الزمنية

H_0: كل β_k يساوي الصفر

H_a: ليس كل β_k يساوي الصفر

باستخدام النتائج من الشكل (٢٨-٦) في إحصاءه الاختبار (28.20b) نحصل على:

$$F^* = \frac{MSB}{MSB.S(A)} = \frac{33{,}537}{358} = 93.7$$

نحتاج إلى $F(.95; 2,16) = 3.63$ من أجل مستوى معنويـة $\alpha = .05$ وحيـث أن $F^* = 93.7> 3.63$، فنستنتج H_a، أي وجود تأثيرات رئيسة للفترة الزمنية. والقيمـة -P لهذا الاختبار هي 0^+.

ولاختبار طبيعة تأثيرات فترة الزمن، سنُجري مقارنات ثنائية لمتوسطات المبيعـات في الفترات الثلاث.

$$D = \mu_{..k} - \mu_{..k'}$$

وسنستخدم أسلوب توكي بمعامل ثقة عائلي 99% ونحتاج إلى:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} q(.99;3,16) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4.78) = 3.38$$

$$s^2\{\hat{D}\} = \frac{2\,MSB.S(A)}{an} = \frac{2(358)}{2(5)} = 71.60$$

وبالتالي يكون $Ts\{\hat{D}\} = 3.38\sqrt{71.60} = 28.6$

وتقديرات النقطة للتغيرات في متوسط المبيعات، بناء على متوسطات مستويات العـامل B المقدَّرة $\overline{Y}_k$ كما وردت في الشكل (٢٨-٦) هي:

$$\hat{D}_1 = \overline{Y}_{..2} - \overline{Y}_{..1} = 728.8 - 648.4 = 80.4$$

$$\hat{D}_2 = \overline{Y}_{..3} - \overline{Y}_{..1} = 616.4 - 648.4 = -32.0$$

$$\hat{D}_3 = \overline{Y}_{..3} - \overline{Y}_{..2} = 616.4 - 728.8 = -112.4$$

وتكون فترات الثقة المرغوبة بالتالي هي:

$$52 \le \mu_{.2} - \mu_{.1} \le 109$$
$$-61 \le \mu_{.2} - \mu_{.1} \le -3$$
$$-141 \le \mu_{.3} - \mu_{.2} \le -84$$

ونستطيع أن نستنتج بمعامل ثقة عائلي 0.99، أن الحملتين الدعائيتين أدتا إلى زيادة فورية في متوسط المبيعات تتراوح بين 52 و 109 (8% إلى 17%)، وانخفضت متوسطات المبيعات في الفترة التالية عما كانت عليه في الفترة السابقة للحملتين بما يتراوح بين 3 و 61 (0.5% إلى 9%).

(٢٨-٥) تصاميم القطعة المنشقة لدراسات ثنائية العامل

وصف التصاميم

تُستخدم تصاميم القطعة المنشقة بكثرة في تجارب حقلية أو معملية أو صناعية وفي تجارب العلوم الاجتماعية. وسنناقش تصاميم القطعة المنشقة لدراسات ثنائية العامل ،فقط، ولكن يمكن أن تتسع هذه التصاميم لتنطبق على دراسات بثلاثة عوامل أو أكثر.

ويمكن النظر إلى تصاميم القطعة المنشقة كحالة خاصة من تصاميم قياسات متكررة تتناول معالجات عاملية وذلك عندما يكون من الممكن تخصيص بعض المعالجات، فقط، لكل عنصر. وقد ناقشنا آنفا مثل هذه التصاميم في الفقرة ٢٨-٤، عندما درسنا تجربة ثنائية العامل بقياسات متكررة على أحد العوامل. وتصاميم القطع المنشقة هي تحسين لتلك التصاميم يستوعب فكرة تصنيف العناصر إلى قطاعات. وباستثناء مايتعلق بتصنيف العناصر إلى قطاعات، تنطبق هنا مناقشاتنا السابقه لتجارب ثنائية العامل مع قياسات متكررة على عامل واحد. وسنعطي ثلاثة أمثلة لتوضيح تصاميم القطعة المنشقة.

مثال ١. اعتبر مرة أخرى دراسة تأثيرات نوعين من الحوافز (عامل *A*) ونوعين من المشاكل (عامل *B*) على مقدرة الشخص في حل مشكلة. فقد تمّ في الجدول (٢٨-١٠) توضيح تصميم القياسات المتكررة من أجل هذه الدراسة مع قياسات

متكررة لنوع المشكلة (عامل B). وقد لاحظنا عند مناقشتنا لهذا التصميم أن تحليل تأثيرات نوع الحافز (عامل A) سوف لاتكون، عادة، في نفس دقة تحليل تأثيرات نوع المشكلة لأن هناك، بصورة عامة، تشتت بين العناصر أكبر بكثير من التشتت ضمن عنصر واحد، أو على أي حال لايمكن أخذ قياسات متكررة على الحافز هنا بسبب تأثيرات التداخل.

ولتحسين الدقة عند تحليل تأثيرات العامل A، يمكن تصنيف العناصر إلى قطاعات وفقا لخاصة (أو خواص) مناسبة بحيث تخفض التشتت بين العناصر ضمن قطاع واحد. ويوضح الجدول (٢٨ــ١٤) تصميم القطعة المنشقة في هذا المثال، فهناك n قطاعا يتألف كل منها من عنصرين متشابهين. وفي كل قطاع تخصص أحد العنصرين عشوائيا للمستوى A_1 من مستويات العامل A وتخصص العنصر الآخر للمستوى A_2.

وفي المرحلة الثانية من التعشية ،تخصص المشكلتين لكل عنصر وفق ترتيب عشوائي، وهكذا يكون الفرق الوحيد بين تصميم القطعة المنشقة في الجدول (٢٨ـ١٤) وتصميم القياسات المتكررة على عامل واحد في الجدول (٢٨ــ١٠) هو تصنيف العناصر إلى قطاعات بغية دراسة تأثيرات العامل A بدقة أكبر.

وعندما يكون من الممكن الاختيار بين العاملين، أيهما نطبق عليه القياسات المتكررة، فينبغي أن نختار للقياسات المتكررة (العامل B) ذلك العامل الذي نحتاج له تقديرات أكثر دقة. والسبب هو أنه حتى مع التصنيف إلى قطاعات، فإن التشتت مابين العناصر ضمن قطاع سيكون عادة أكبرمن التشتت ضمن عنصر واحد.

مثال ٢. تُستخدم تصاميم القطعة المنشقة بكثرة، أيضا، عندما نقوم بالقياسات المتكررة فوق الزمن. فقد أجريت تجربة لدراسة طريقتين لتجميع أحد المركبات (عامل A) ومعدل تعلّم عملية التجميع (عامل B). وتمّ تخصيص نصف العمال المستخدمين في الدراسة عشوائيا لكل من طريقتي التجميع (A_2, A_1)، وتم قياس إنتاجية كل عامل في إنجاز عملية التجميع بعد خمسة أيام (B_1) وبعد عشرة أيام (B_2). ويوضح الجدول (٢٨ـ١٤) تصميم القطعة المنشقة لهذا المثال وأيضا ، للمثال ١. وتم تصنيف العمال إلى قطاعات بناء على مقدار الخبرة.

جدول (٢٨-١٤) مخطط تصميم الوحدة المنشقة مع تخصيص عشوائي المستويات العامل A إلى العناصر وقياسات متكررة على العامل B.

		ترتيب المعالجة 1	ترتيب المعالجة 2
قطاع ١	عنصر ١	A_2B_1	A_2B_2
	عنصر ٢	A_1B_2	A_1B_1
قطاع ٢	عنصر ٣	A_1B_2	A_1B_1
	عنصر ٤	A_2B_2	A_2B_1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
قطاع n	عنصر $2n$-1	A_1B_1	A_1B_2
	عنصر $2n$	A_2B_2	A_2B_1

ونحتاج في هذه التجربة إلى إجراء تعشية واحدة (تخصيص العمال إلى عملية التجميع) حيث يتضمن العامل الثاني مشاهدات متكررة للعناصر عند نقطة زمنية مختلفة ولايوجد في هذه التجربة أساسا أي اختيار للعامل الذي تجري عليه القياسات المتكررة، إذ لايتوقع أن يؤدي العمال بكفاءة كلا من عمليتي التجميع خلال فترة الدراسة.

مثال ٣. تمّ تطوير تصاميم القطعة المنشقة، في الأصل للتجارب الزراعية. اعتبر تجربة لدراسة نوعين من القمح (عامل A) ونوعين من الأسمدة (عامل B) على الانتاج، مستخدمين حقولا مختلفة كقطاعات. وفي تصميم قطاع تام عشوائي ،تتم تعشية كل حقل إلى أربع وحدات جزئية، ويتم تخصيص المعالجات الأربع (A_1B_1، A_1B_2، A_2B_1، A_2B_2) عشوائيا إلى الوحدات الجزئية.

وتصميم القطعة المنشقة هو تصميم أكثر ملاءمة للواقع العملي هنا إذ تصعب زراعة الأنواع المختلفة من القمح في مساحات صغيرة. وفي تصميم قطعة منشقة، يتم

تقسيم كل حقل إلى جزئين، فقط، بـدلا من أربعـة (عـادة تسـمى قطعـا) ويُخصـص النوعان عشوائيا إلى القطعتين في كل حقل. وفي المقابل، يتم تقسيم كل قطعة من كل حقل إلى قطعتين ذات مساحات أصغر (عـادة تُسـمى قطعـا جزئيـة)، ويتـم تخصيـص نوعي السماد عشوائيا إلى القطع الجزئية لكل قطعة.

ويبين الجدول (٢٨-١٤)، أيضا، مخططا لتصميم القطعة المنشقة هـذا. لاحـظ أن التعشية مطلوبة هنا لتخصيص أنواع القمح إلى القطـع، وتخصيـص الأسمـدة إلى القطـع الجزئية ضمن كل قطعة ـــ لاحـظ، أيضـا، أن القطـع في كـل حقـل تقـابل العنـاصر، والقطع الجزئية تقابل القياسات المتكررة ضمن عنصر.

تعليقات

١ ـ حينما يمكن للعناصر أن تتلقى جميع المعالجات في دراسة ثنائية العامل بـدون تأثيرات تداخل، يكون من المفضل استخدام تصميم قياسـات بقياسـات متكـررة علـى العاملين كليهما، ذلك لأنه يمكن عندئذ، في العادة، تقدير تأثـيرات العوامـل لكـل مـن العاملين بدقة أكبر مما في حاله تصميم قطعة منشقة.

٢ ـ تكون تصاميم القطعة المنشقة مفيدة في التجارب الصناعية عندما يتطلب أحـد العوامل وحدات تجريبية أكبر مما يتطلبه الآخر. اعتبر، على سبيل المثـال، دراسـة تأثـيرات مادتين من المواد المضافة (عامل A) واثنين من الحاويات (عامل B) على إطالة عمـر أحـد منتجات الألبان (التي لاتحفظ في ثلاجات). فمن الأسهل صنع دفعـات كبـيرة مـن مُنتـج اللبن هنا بمادة مضافة معطاة، بينما يمكن استخدام الحاويات المختلفة لدفعات صغيرة.

٣ ـ يمكن النظر إلى تصاميم القطعة المنشقة كنوع من تصميم قطاع غير تـام مـع اعتبـار العنـاصر كقطاعـات، ويُعطـى كـل عنصـر بعضـا مـن المجموعـة الكاملـة مـــن المعالجات، فقط.

النماذج

سنعتبر نموذجين لتصاميم القطعة المنشـقة ثنائيـة العـامل ــ أحدهـا عندمـا تكـون تأثيرات القطاع مثبتة والآخر عندما تكـون هـذه التأثـيرات عشـوائية. وسـنفترض عـبر

المناقشة بكاملها، أن القياسات المتكررة مأخوذة على العامل B.

تأثيرات قطاع مثبته. عندما نؤسس القطاعات على خواص للعناصر مثل عمر الشخص أو حجم المحل، فيُنظر عادة لتأثيرات القطاع على أنها مثبتة. وسيفترض النموذج الذي سنقدمه أن كلا من تأثيرات العامل A وتأثيرات العامل B مثبتة، أيضا. وبالإضافة إلى ذلك، يفترض النموذج عدم وجود تفاعل بين القطاعات والمعالجات فيما عدا تفاعلات القطاع مع العامل A. ويُسمح غالبا بوجود هذا التفاعل الأخير للحصول، في حالة تأثيرات قطاع عشوائية، على بنية ارتباط معقولة لمشاهدات القطاع نفسه.

ولا يحتوي النموذج الذي سنقدمه الآن على تأثيرات رئيسة للعناصر ،لأن العناصر تخدم كوحدة تكرار ضمن كل قطاع لتقويم تأثيرات العامل A الرئيسة. وبصورة مكافئة، يمكن القول إن تأثيرات العناصر قد اختلطت مع تأثيرات العامل A الرئيسة.

وأخيرا، نرمز لحد الخطأ بالرمز ε_{ijk} كالعادة، بسبب عدم وجود تكرارات كاملة في تصميم القطعة المنشقه. ولذلك يكون نموذج القطعة المنشقة مع تأثيرات قطاع مثبتة ρ_i كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\rho\alpha)_{ij} + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{(ijk)} \qquad (28.24)$$

حيث:

$\mu_{...}$ ثابت

ρ_i ثوابت خاضعة للقيد $\sum \rho_i = 0$

α_j ثوابت خاضعة للقيد $\sum \alpha_j = 0$

β_k ثوابت خاضعة للقيد $\sum \beta_k = 0$

$(\rho\alpha)_{ij}$ ثوابت خاضعة للقيود $\sum_i (\rho\alpha)_{ij} = 0$ لكل قيم j، والقيمة $\sum_j (\rho\alpha)_{ij} = 0$ لكل قيم i،

$(\alpha\beta)_{jk}$ ثوابت خاضعة للقيود $\sum_j (\alpha\beta)_{jk} = 0$ لكل قيم k و $\sum_k (\alpha\beta)_{jk} = 0$ لكل قيم j.

$\varepsilon_{(ijk)}$ مستقلة و $N(0, \sigma^2)$

$k = 1,...,b$ ؛ $j = 1,...,a$ ؛ $i = 1,...,n$.

ويكون للمشاهدات Y_{ijk} في نموذج تصميم القطع المنشقة (28-24) الخواص التالية:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{...} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\rho\alpha)_{ij} + (\alpha\beta)_{jk} \tag{28.25a}$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma^2 \tag{28.25b}$$

وفضلا عن ذلك، تتوزع جميع المشاهدات توزيعا طبيعيا، وتكون أي مشاهدتين مختلفتين مستقلتان. وهكذا تكون جميع المشاهدات مستقلة وتباينها ثابت.

تأثيرات قطاع عشوائية. عندما تكون القطاعات وحدات مثل مدارس، دفعات، أو حقول زراعية، نعتبرها عادة عينة عشوائية من مجتمع مناسب، ويُعدّل نموذج تصميم قطعة منشقة في تلك الحالة كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\rho\alpha)_{ij} + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{(ijk)} \tag{28.26}$$

حيث:

$\mu_{...}$ ثابت

ρ_i مستقلة و $N(0,\sigma_\rho^2)$

α_j ثوابت خاضعة للقيد $\sum\alpha_j = 0$

β_k ثوابت خاضعة للقيد $\sum\beta_k = 0$

$(\rho\alpha)_{ij}$ مستقلة و $N(0,\frac{a-1}{a}\sigma_{\rho\alpha}^2)$ خاضعة للقيد $\sum_j(\rho\alpha)_{ij} = 0$ لكل قيم i.

$$\sigma\{(\rho\alpha)_{ij},(\rho\alpha)_{ij}\} = -\frac{1}{a}\sigma_{\rho\alpha}^2$$

$(\alpha\beta)_{jk}$ ثوابت خاضعة للقيود $\sum_j(\alpha\beta)_{jk} = 0$ لكل قيم k والقيود $\sum_j(\alpha\beta)_{jk} = 0$ لجميع قيم j.

$\varepsilon_{(ijk)}$ مستقلة و $N(0,\sigma^2)$

$\rho_i, (\rho\alpha)_{ij}, \varepsilon_{(ijk)}$ مستقلة مثنى مثنى.

$i = 1,\ldots,n$ ؛ $j = 1,\ldots,a$ ؛ $k = 1,\ldots,b$.

وتتصف المشاهدات Y_{ijk} لنموذج تصميم قطعة منشقة (28-26) بالخواص التالية:

$$E\{Y_{ijk}\} = \mu_{...} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{ij} \tag{28.27a}$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}\} = \sigma_Y^2 = \sigma_\rho^2 + \frac{a-1}{a}\sigma_{\rho\alpha}^2 + \sigma^2 \tag{28.27b}$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}, Y_{ijk'}\} = \sigma_\rho^2 + \frac{a-1}{a}\sigma_{\rho\alpha}^2 \quad k \neq k' \tag{28.27c}$$

$$\sigma^2\{Y_{ijk}, Y_{ij'k}\} = \sigma_\rho^2 - \frac{1}{a}\sigma_{\rho\alpha}^2 \qquad j \neq j'$$

وهكذا ،يظل لجميع المشاهدات Y_{ijk} في نموذج الوحدة المنشقة (28.26) تباين ثابت.ومع ذلك، وقبل إجراء التجربة ،تكون أية مشاهدتين من قطاع معطى مرتبطتين الآن. وإذا كانت المشاهدتان من العنصر نفسه، فيكون ارتباطهما أكبر مما لو كانتا من عنصرين مختلفين ضمن القطاع نفسه، ولهذه الخاصية مايبررها عادة. ويفترض نموذج الوحدة المنشقة (28.26) استقلالية المشاهدات من قطاعات مختلفة.

وحالما نختار القطاعات، يفترض نموذج القطعة المنشقة (28.26) أن جميع المشاهدات مستقلة. وهكذا، فالنموذج يفترض عدم وجود تأثيرات تداخل للقياسات المتكررة إذا ما اختيرت القطاعات.

تحليل التباين والاختبارات

يحتوي الجدول (٢٨ـ١٥) على تحليل التباين لنموذجي الوحدة المنشقة (28.24) و (28.26) ويمكن الحصول على مجاميع المربعات ودرجات الحرية من القاعدة (٢٧ـ ٣) مباشرة في صورتها المعدّلة (27.16) ،حيث لاتوجد هنا تكرارات. ويصبح مجموع مربعات الباقي الموافق لحد الخطأ.

$$SSRem = SSBL.B + SSBL.AB \qquad (28.28)$$

حيث $SSBL.B$ و $SSBL.AB$ معطيات بالصيغ المعروفة لدراسات ثلاثية العامل مع مشاهدة واحدة لكل خلية.

وقد أُعطي في الجدول (٢٨ـ١٦) توقع متوسط المربعات وإحصاءة الاختبار المناسبة لكل من نموذجي الوحدة المنشقة، ويمكن الحصول على توقع متوسط المربعات مباشرة باستخدام القاعدة (٢٧ ـ ٤).

تحليل تأثيرات العوامل

يمضي تحليل تأثيرات العوامل بطريقة مشابهة لتلك الخاصة بدراسات متكررة مع قياسات متكررة على أحد العوامل. وعندما لايكون التفاعل AB موجودا أو يكون غير مهم، يتضمن تحليل تأثيرات العوامل متوسطات مستويات العامل A، وهي $\mu_{.j.}$

ومتوسطات مستويات العامل B وهي $\mu_{..k}$ ،ويكون متوسط المربعات المناسب المستخدم في تقدير تباين أي متضادة مقدّرة هو متوسط المربعات الموجود في مقام إحصاءة الاختبار الموافقة F^*. ونحتاج طبقا لذلك إلى تعديل درجات الحرية في مضاعفات فترات الثقة في (28.15).

جدول (٢٨-١٥) جدول تباين لنموذجي تصميم القطعة المنشقة (28.24) و (28.26)

مصدر التغير	SS	df
قطاعات	$SSBL = ab\sum_i(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$	$n-1$
عامل A	$SSA = bn\sum_j(\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2$	$a-1$
تفاعلات $BL.A$	$SSBL.A = b\sum_i\sum_j(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2$	$(a-1)(n-1)$
عامل B	$SSB = an\sum_k(\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})^2$	$(b-1)$
تفاعلات AB	$SSAB = n\sum_j\sum_k(\bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})^2$	$(a-1)(b-1)$
خطأ	$SS\,\mathrm{Rem} = \sum_i\sum_j\sum_k(Y_{ijk} - \bar{Y}_{.jk} - \bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{.j.})^2$	$a(b-1)(n-1)$
المجموع	$SSTO = \sum_i\sum_j\sum_k(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2$	$abn-1$

وعندما تكون تأثيرات التفاعل موجودة، فسيُبنى تحليل متوسطات المعالجات $\mu_{.jk}$ على متوسطات المعالجات المقدرة $\bar{Y}_{.jk}$ ويكون متوسط المربعات المناسب، في حالة تأثيرات مثبتة للقطاع، هو $MSRem$. وعندما تكون التأثيرات عشوائية ،يصبح التحليل أكثر تعقيدا ، انظر، مثلا، المرجع [28.3].

بعض التعليقات الختامية

١ ـ يمكن بسهولة تطوير نماذج قطعة منشقة تتضمن، أيضا، حد تفاعل بين القطاع والعامل B، في حالة وجود هذه التفاعلات.

٢ ـ لقد تم تطوير، تشكيلة واسعة من تصاميم الوحدة المنشقة. ويقدم المرجعان [28.4] و [28.5] مزيدا من المعلومات حول هذه التصاميم.

جدول (٢٨-١٦) توقع متوسط المربعات وإحصاءة الاختبار لنموذجي الوحدة المنشقة (28.24) و (28.26)

مصدر التغير	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات نموذج (28.24)	توقع متوسط المربعات نموذج (28.26)
قطاعات	*MSBL*	$\sigma^2 + \frac{ab}{n-1}\Sigma\rho_i^2$	$\sigma^2 + ab\sigma_\rho^2$
عامل A	*MSA*	$\sigma^2 + \frac{nb}{n-1}\Sigma\alpha_i^2$	$\sigma^2 + b\sigma_{\rho\alpha}^2 + \frac{nb}{(a-1)}\Sigma\alpha_j^2$
تفاعلات BLA	*MSBL.A*	$\sigma^2 + \frac{b}{(n-1)(a-1)}\Sigma\Sigma(\alpha\rho)_{ij}^2$	$\sigma^2 + b\sigma_{\rho\alpha}^2$
عامل B	*MSB*	$\sigma^2 + \frac{na}{b-1}\Sigma\beta_k^2$	$\sigma^2 + \frac{na}{b-1}\Sigma\beta_k^2$
تفاعلات AB	*MSAB*	$\sigma^2 + \frac{n}{(a-1)(b-1)}\Sigma\Sigma(\alpha\beta)_{jk}^2$	$\sigma^2 + \frac{n}{(a-1)(b-1)}\Sigma\Sigma(\alpha\beta)_{jk}^2$
خطأ	*MSRem*		σ^2

اختبار	F^* نموذج (28.24)	F^* نموذج (28.26)
قطاعات	*MSBL/MSRem*	*MSBL/MSRem*
عامل *A*	*MSA/MSRem*	*MSA/MSBL.A*
تفاعلات *BL.A*	*MSBL.A/MSRem*	*MSBL.A/MSRem*
عامل *B*	*MSB/MSRem*	*MSB/MSRem*
تفاعلات *AB*	*MSAB/MSRem*	*MSAB/MSRem*

مراجع ورد ذكرها

[28.1] SAS Institute Inc. *SAS/GRAPH User's Gude*. Version 6 ed. Cary, N.C.: SAS Institute, 1988.

[28.2] *MINITAB Reference Manual, Release 7*. State College, Pa.: Minityab, Inc., 1989.

[28.3] Winer, B.J. *Statistical Principles in Experimental Design*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1971.

[28.4] Steel, R.G.D., and J.H. Torrie. *principles and Procedures of Statistics*. 2nd ed. NewYork: McGraw-Hill Book Co., 1980.

[28.5] Kock, G.G.; J.D. Elashoof; and I. A. Amara. "Repeated Mesurements -

Design and Analysis." *In Encyclopedia of Statistical* Sciences. vol. 8, ed. S.Kotz and N.L. Johson. NewYork: John Wiley & Sons, 1988, PP. 46-73.

مسائل

(٢٨-١) من المشاكل المحتملة الخطيرة لتصاميم القياسات المتكررة تلك المتعلقة بالتأثيرات المحمولة. صف بعض الخطوات التي يمكن اتخاذها لتخفيف تلك المشكلة.

(٢٨-٢) في تصميم دراسة قياسات متكررة ثنائية العامل مع قياسات متكررة على أحد العوامل، هل يهم أي العاملين اعتُبر عامل القياسات المتكررة؟ اشرح بالتفصيل.

(٢٨-٣) **ضغط الدم.** تمَّ دراسة العلاقة بين جرعة العقار التي تزيد ضغط الدم وكمية الزيادة الفعلية في متوسط ضغط الدم الانبساطي في تجربة معملية. وتمّ إعطاء ستة جرعات ذات مستويات مختلفة من العقار وفق ترتيب عشوائي إلى اثنى عشر أرنبا مع ترك فترة مناسبة بين كل جرعة وأخرى. استُخدمت الزيادة في ضغط الدم كمتغير تابع. وفيما يلي بيانات الزيادة في ضغط الدم:

أرنب i	الجرعة (j) .1	.3	.5	1.0	1.5	3.0
1	21	21	23	35	36	48
2	19	24	27	36	36	46
3	12	25	27	26	33	40
4	9	17	18	27	34	39
5	7	10	19	25	31	38
6	18	26	26	29	39	44
7	9	12	17	22	33	40
8	20	20	30	30	38	41
9	18	18	27	31	42	49
10	8	12	11	24	26	31
11	18	22	25	32	38	38
12	17	23	26	28	34	35

أ ـ احسب الرواسب لنموذج القياسات المتكررة (28.1) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهّز رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماذا تستنتج حول صلاحية النموذج (28.1)؟.

ب ـ جهّز رسوم رواسب نقطية مصطفة لكل مستوى جرعة. هل تؤيد هذه الرسوم افتراض ثبات تباين الخطأ؟ ناقش.

جـ ـ ارسم المشاهدات Y_{ij} لكل أرنب في هيئة الشكل (٢٨ـ١). هل يبدو افتراض عدم وجود تفاعل بين العناصر (الأرانب) والمعالجات معقولا هنا؟

د ـ نفذ اختبار توكي لخاصية التجميع، مشروطا على الأرانب المختارة فعلا استخدم $\alpha = .05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة P- لهذا الاختبار؟

(٢٨ـ٤) بالإشارة إلى مسألة **ضغط الدم** (٢٨ـ٣). افترض أن نموذج القياسات المتكررة (28.1) مناسب.

أ ـ اكتب جدول تحليل التباين.

ب ـ اختبر ماإذا كان متوسط الزياد في ضغط الدم تختلف باختلاف مستويات الجرعة أم لا. استخدم $\alpha = .01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة، ماهي القيمة P- لهذا الاختبار؟

جـ ـ حلل تأثيرات المستويات المختلفة للجرعات بمقارنة متوسطات مستويات الجرعات المتتابعة مستخدما أسلوب بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 90%. اعرض نتائجك ولخصها برسم خطي مناسب.

د ـ كيف وجدت فعالية تصميم القياسات المتكررة هنا مستندا إلى مقياس الفعالية المقدّر (24.14) وذلك بالمقارنة مع تصميم تام العشوائية؟

(٢٨ـ٥) بالإشارة إلى مسألتي **ضغط الدم** (٢٨ـ٣) و (٢٨ـ٤)

أ ـ طور نموذج انحدار تمثل فيه تأثيرات العناصر بالمتغيرات المؤشرة، 1،1-، 0. وتمثل تأثير الجرعة بحدود خطية وتربيعية وتكعيبية في $x = X - \overline{X}$ حيث X مستوى الجرعة. وعلى سبيل المثال، فإن القيمة لمستوى الجرعة الأول ($X = .1$) هي $x = .1 - 1.07 = .97$.

ب ـ قم بتوفيق نموذج الانحدار للبيانات.

جـ ـ احسب الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. هل يبدو أن النموذج المستخدم يقدم توفيقا معقولا ؟

د ـ إختبر ماإذا كان التأثير التكعيبي مطلوبا للنموذج أم لا، استخدم $\alpha = .05$
اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

(٢٨-٦) **مبيعات الجريب فروت**

درست سلسلة من الأسواق المركزية العلاقة بين مبيعات الجريب فروت والسعر المعروض به. وقد تمت دراسة ثلاثة مستويات للأسعار (١) السعر الرئيسي المنافس (٢) سعرا أعلى قليلا من السعر الرئيس المنافس (٣) سعر أعلى بدرجة متوسطة من السعر الرئيسي المنافس. وقد اختيرت للدراسة، وبصورة عشوائية، ثمانية محلات متقاربة في حجومها. وتمّ جمع بيانات المبيعات لثلاث فترات، كل منها أسبوع، مع تخصيص مستويات الأسعار وفق ترتيب عشوائي لكل محل. تم إجراء التجربة خلال فترة تكون مبيعات الجريب فروت فيها عادة مستقرة، ولايتوقع وجود تأثيرات محمولة لذلك المنتج. وفيما يلي بيانات مبيعات المحلات من الجريب فروت خلال فترة الدراسة (البيانات مرمزة).

محل i	مستوى السعر (j) 1	2	3
1	62.1	61.3	60.8
2	58.2	57.9	55.1
3	51.6	49.2	46.2
4	53.7	51.5	48.3
5	61.4	58.7	56.6
6	58.5	57.2	54.3
7	46.8	43.2	41.5
8	51.2	49.8	47.9

أ ـ احسب الرواسب لنموذج القياسات المكررة (28.1) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماذا تستنتج عن صلاحية النموذج (28.1)؟

ب ـ جهز رسوما نقطية مصطفّة لكل مستوى سعر. هل تؤيد هذه الرسوم

افتراض ثبات تباين الخطأ؟ ناقش.

جـ - ارسم المشاهدات Y_{ij} لكل محل في هيئة الشكل (٢٨-١). هل يبدو افتراض عدم وجود تفاعل بين العناصر (المحلات) والمعالجات معقولا هنا؟

د - نفّذ اختبار توكي للتجميع، مشروطا على المحلات المختارة فعلا، استخدم $\alpha = .01$ اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

(٢٨-٧) بالإشارة إلى مسألة مبيعات الجريب فروت (٢٨-٦). افترض أن نموذج القياسات المتكررة (28.1) مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - اختبر ما إذا كان متوسط مبيعات الجريب فروت يختلف لمستويات السعر الثلاثة أم لا، استخدم $\alpha = .05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

جـ - حلل تأثيرات مستويات الأسعار الثلاثة بتقدير جميع المقارنات الثنائية لمتوسطات مستويات السعر. استخدم أكثر أساليب المقارنات المتعددة كفاءة بمعامل ثقة عائلي 95%. اكتب استنتاجاتك ولخصها برسم خطي مناسب.

د - كيف تجد فعالية تصميم القياسات المتكررة بالمقارنة مع تصميم تام التعشية مستندا إلى مقياس الفعالية المقدّر (24.14)؟

(٢٨- ٨) بالإشارة إلى مسألة **ضغط الدم** (٢٨-٣). اهتمّ أحد المستشارين بمشروعية افتراضات النموذج. واقترح أن يُحلل الدراسة باستخدام اختبار فريدمان. رتّب البيانات ضمن كل أرنب وقم باختبار فريدمان، استخدم $\alpha = .01$. اكتب البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. علق على اهتمام ذلك المستشار هنا.

(٢٨-٩) بالإشارة إلى مسألة **مبيعات الجريب فروت** (٢٨-٦). اقتُرح أنه ينبغي استخدام اختبار فريدمان اللامعلمي هنا. رتّب البيانات ضمن كل محل وقم

باختبار فريدمان، استخدم $\alpha = .05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. هل حصلت على الاستنتاج نفسه الذي حصلت عليه في المسألة (٢٨-٧)؟

(٢٨-١٠) **الصدق في الدعاية.** عرضت إحدى منظمات البحث للمستهلك خمسة دعايات مختلفة على 10 عناصر وطلبت منهم ترتيبها وفقا لصدق الدعاية. ويعبر الترتيب 1 عن الأكثر صدقا وكانت النتائج كالتالي:

عنصر i	إعلان (j)				
	A	B	C	D	E
1	3	1	2	5	4
2	4	2	1	3	5
3	4	2	3	1	5
4	3	1	2	5	4
5	4	1	2	5	3
6	4	2	1	3	5
7	4	1	2	3	5
8	5	1	3	2	4
9	4	2	3	1	5
10	5	1	2	3	4

أ - هل ترى العناصر أن الدعايات الخمس متساوية في صدقها، قم باختبار فريدمان مستخدما مستوى معنوية $\alpha = .05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

ب - استخدم اسلوب اختبار المقارنات الثنائية (25.5) لتصنيف الدعايات الخمس المختلفة وفقا لمتوسط مالوحظ من صدقها. استخدم مستوى معنوية عائلي $\alpha = .01$، لخص نتائجك.

جـ - احسب معامل التوافق وفسر هذا المقياس.

(٢٨-١١) **كفاءة حاسب يدوي.** لاختبار أحد المنتجات الجديدة من الحاسبات اليدوية القابلة للبرمجة، قامت إحدى شركات الحاسب باختيار ستة من المهندسين المحترفين في استخدام تلك الآلة الحاسبة والنموذج السابق لها وطلبت منهم حل مسألتين باستخدام كل من الحاسبتين. كانت إحدى المسائل ذات طبيعة إحصائية والأخرى كانت مسألة هندسية. وتم تعشية ترتيب المسائل الحسابية الأربع بصورة مستقلة لكل مهندس، ولوحظ طول

الوقت المطلوب لحل كل مسألة (بالدقائق). وفيما يلي النتائج (نوع المسألة هو عامل A، ونوع نموذج الحاسب هو عامل *B*)

		$j=1$ مسألة هندسية		$j=2$ مسألة هندسية	
		$k=1$	$k=2$	$k=1$	$k=2$
مهندس i		نموذج جديد	نموذج سابق	نموذج جديد	نموذج سابق
1	Jones	3.1	7.5	2.5	5.1
2	Williams	3.8	8.1	2.8	5.3
3	Adams	3.0	7.6	2.0	4.9
4	Dixon	3.4	7.8	2.7	5.5
5	Erickson	3.3	6.9	2.5	5.4
6	Maynes	3.6	7.8	2.4	4.8

أ - احسب الرواسب لنموذج القياسات المتكررة (28.10) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب، ماذا تستنتج عن صلاحية النموذج (28.10)؟

ب - جهّز رسوم راسب نقطية مصطفة لكل معالجة. هل تؤيد هذه الرسوم افتراض ثبات تباين الخطأ؟ ناقش.

جـ - ارسم المشاهدات Y_{ijk} لكل مهندس في هيئة الشكل (٢٨-١) مهملا الطبيعة العاملية للمعالجات. هل يبدو افتراض عدم وجود تفاعل بين العناصر (المهندسين) والمعالجات معقولا هنا؟

د - نفّذ اختبار توكي للتجميع، مشروطا بالمهندسين الذين اختيروا فعلا . استخدم $\alpha = .01$، اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -*P* لهذا الاختبار؟

(٢٨-١٢) بالإشارة إلى مسألة **كفاءة الحاسب اليدوي** (٢٨-١١). افترض أن نموذج القياسات المتكررة (28.10) مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - ارسم متوسطات المعالجات المقدَّرة في هيئة الشكل (٢٨-٤) هل يبدوا أن هناك تأثيرات تفاعل حاضرة.

جـ - اختبر ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا، استخدم $\alpha = .01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة - ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

د - إذا رغبنا في دراسة طبيعة تأثيرات التفاعل من خلال المقارنات الثلاث:

$$D_1 = \mu_{.12} - \mu_{.11} \qquad L_1 = D_2 - D_1$$
$$D_2 = \mu_{.22} - \mu_{.21}$$

أوجد فترات ثقة لهذه المقارنات الثلاث. استخدم أسلوب بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 95%. واعرض نتائجك.

هـ - اختبر ما إذا كانت تأثيرات العناصر موجودة أم لا، استخدم $\alpha = .01$، اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة - ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

(٢٨-١٣) **آلام الشقيقة.** دُرس عقاران تجريبيان مزيلان للألم لمعالجة الشقيقة في أحد المراكز الطبية الرئيسة. وقد تم عشوائيا اختيار عشرة من الذين يعانون من الشقيقة بصفة مستمرة لدراسة استطلاعية، وأعطي كل منهم بترتيب عشوائي كلا من التراكيب الأربعة من المعالجات، مع ترك فترةمناسبة بين كل تركيب وآخر. وتمّ استخدام النقص في شدة الألم كمتغير تابع. وعُرفَت المعالجات الأربع المستخدمة في الدراسة كما يلي: A_1B_1 جرعة منخفضة من كل من العقارين، A_1B_2 جرعة منخفضة من العقار A وجرعة عالية من العقار B، A_2B_1 جرعة عالية من العقار A وجرعة منخفضة من العقار B، A_2B_2 جرعة عالية من العقارين وفيما يلي بيانات الانخفاض في شدة الألم (الدرجة العالية معناها انخفاض أكبر في الألم)

أ - احسب الرواسب لنموذج القياسات المتكررة (28.12) وارسمها في مقابل القيم التوفيقة. جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب — ماذا تستنتج عن صلاحية النموذج (28.10)؟

شخص i	$B_1(k=1)$	$B_2(k=2)$	$B_1(k=1)$	$B_2(k=2)$
	$A_1\ (j=1)$		$A_2(j=2)$	
1	1.6	3.4	2.7	4.3
2	2.3	5.1	4.2	6.5
3	4.2	5.3	4.6	6.0
4	7.1	8.9	7.8	9.4
5	3.5	3.7	3.4	3.9
6	5.8	6.5	6.2	7.1
7	4.9	5.6	5.4	6.2
8	6.0	7.2	6.3	7.3
9	1.2	1.4	1.3	1.7
10	2.7	3.0	3.0	3.1

ب ـ جهز رسوما مصطفّة لكل معالجة. هل تدعم هذه الرسوم افتراض ثبات تباين الخطأ؟ ناقش.

جـ ـ إرسم المشاهدات Y_{ijk} لكل شخص في هيئة الشكل (٢٨ـ١)، مهملا الطبيعة العاملية للمعالجات. هل يبدو افتراض عدم وجود تفاعل بين العناصر (الأشخاص) والمعالجات معقولا هنا؟

د ـ نفذ اختبار توكي للتجميع، مشروطا بالعناصر المختارة فعلا ، استخدم $\alpha = .05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة ـ ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

(٢٨ـ١٤) بالإشارة إلى مسألة **آلام الشقيقة** (٢٨ـ١٣). افترض أن نموذج القياسات المتكررة (28-10) مناسب.

أ ـ اكتب جدول تحليل التباين.

ب ـ ارسم متوسطات المعالجات المقدّرة في هيئة الشكل (٢٨ـ٤). هل يبدو أن هناك تأثيرات تفاعل حاضرة؟

جـ ـ اختبر ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا، استخدم $\alpha = .05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة ـ ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

د ـ اختبر بصورة منفصلة ماإذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A، وللعامل B موجودة، استخدم $\alpha = .05$ لكل اختبار. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة لكل اختبار. ماهي القيمة -P لكل اختبار؟

هـ ـ قدّر المقارنات التالية باستخدام فترات الثقة.

$$D_1 = \mu_{21} - \mu_{11} \qquad D_3 = \mu_{21} - \mu_{12}$$
$$D_2 = \mu_{12} - \mu_{11} \qquad D_4 = \mu_{22} - \mu_{11}$$

استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 0.95. لخص نتائجك.

(٢٨ـ١٥) **الحوافز التشجيعية** بالإشارة إلى المثال في الفقرة (٢٨ـ٤) حول تأثيرات نوعين من الحوافز (عامل A) على قدرة الشخص لحل نوعين من المشاكل (عامل B)، تمَّ توضيح تصميم القياسات المتكررة في الجدول (٢٨ـ١٠) وقد اختير اثنى عشر شخصا بصورة عشوائية، وتمَّ تخصيصهم إلى مجموعتي الحوافز. وبعدئذ تمّت تعشية ترتيب نوعي المشاكل بصورة مستقلة لكل شخص. وفيما يلي درجة القدرة على حل مشكلة (الدرجة الأعلى تعني قدرة أعظم على حل المشاكل).

حافز تشجيعي	عنصر	نوع المشكلة: مجردة ($k = 1$)	نوع المشكلة: محسوسة ($k = 2$)
$j = 1$	$i = 1$	10	18
	$i = 2$	14	19
	$i = 3$	17	18
	$i = 4$	8	12
	$i = 5$	12	14
	$i = 6$	15	20
$j = 1$	$i = 1$	16	25
	$i = 2$	19	22
	$i = 3$	22	27
	$i = 4$	20	23
	$i = 5$	24	29
	$i = 6$	21	22

أ ـ احسب الرواسب لنموذج القياسات المتكررة (28.16) وارسمها في

مقابل القيم التوفيقية. جهِّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماهو استنتاجك حول صلاحية النموذج (28.16)؟

ب ـ ارسم درجات القدرة على حل مشكلة لكل حافز تشجيعي، ونوع المشكلة، وذلك في هيئة الشكل (٢٨ـ٥). ماهو استنتاجك حول صلاحية النموذج (28.16) ؟ ناقش.

(٢٨ـ١٦) بالإشارة إلى مسألة **الحوافز التشجيعية** (٢٨ـ١٥). افترض أن نموذج القياسات المتكررة (28.16) مناسب.

أ ـ اكتب جدول تحليل التباين.

ب ـ ارسم متوسطات المعالجات المقدَّرة في هيئة الشكل (٢٨ـ٤). هل يبدو أن هناك تأثيرات للتفاعل؟ هل التأثيرات الرئيسة موجودة؟

جـ ـ اختبر ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا. استخدم $\alpha = .05$، اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة ـ ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

د ـ اختبر بصورة منفصلة ماإذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B موجودة أم لا. استخدم $\alpha = .05$ لكل اختبار. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة لكل اختبار. ماهي القيمة -P لكل اختبار؟

هـ ـ المقارنات التالية هي مقارنات موضع الاهتمام:

$$D_1 = \mu_{2.} - \mu_{1.} \qquad D_2 = \mu_{..2} - \mu_{..1}$$

قدِّر هذه المقارنات باستخدام فترات الثقة. استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 90% ـ اعرض نتائجك.

(٢٨-١٧) **عروض المحلات التجارية.** تمَّ اجراء دراسة تجريبية لاختبار تأثير طريقتين مختلفتين من طرق العرض في المحلات لمنتج (عامل A) على المبيعات في أربع فترات زمنية متتالية (عامل B). وتمَّ اختيار ثمانية محلات عشوائيا ، وخُصص أربعة منها عشوائيا لكل طريقة عرض.

فيما يلي بيانات المبيعات (مرمَّزه):

		الفترة الزمنية			
نوع العرض	المحل	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$j=1$	$i=1$	956	953	938	1,049
	$i=2$	1,008	1,032	1,025	1,123
	$i=3$	350	352	338	438
	$i=4$	412	449	385	532
$j=2$	$i=1$	769	766	739	859
	$i=2$	880	875	860	915
	$i=3$	176	185	168	280
	$i=4$	209	223	217	301

أ - احسب الرواسب لنموذج القياسات المتكررة (28.16) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماذا تستنتج عن صلاحية النموذج (28.16)؟

ب - ارسم بيانات المبيعات لكل طريقة عرض وفترة زمنية وذلك في هيئة الشكل (٢٨-٥). ماذا تستنتج عن صلاحية النموذج (28.16)؟ ناقش.

(٢٨-١٨) بالإشارة إلى مسألة **عرض المحلات التجارية** (٢٨-١٧). يرغب المجرب في المزيد من الاستطلاع عن صلاحية نموذج القياسات المتكررة (28.16).

أ - نفذ اختبارا رسميا لثبات تباين مابين العناصر σ_p^2. استخدم (28.22) ونفّذ اختبار هارتلي مع $\alpha = .01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

ب - حلل مجموع المربعات الباقي $SSB.S(A)$ إلى مركبات مستخدما (28.23). نفذ اختبار هارتلي لثبات تباين الخطأ σ^2 للمستويات المختلفة للعامل A، استخدم $\alpha = .01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة.

(٢٨-١٩) بالإشارة إلى مسألة عرض المحلات التجارية (٢٨-١٧). افترض أن نموذج القياسات المتكررة (28.16) مناسب.

أ - أكتب جدول تحليل التباين.

ب - ارسم المتوسطات المقدرة للمعالجات في هيئة الشكل (٢٨-٤). هل

يبدو أن هناك تأثيرات تفاعل موجودة؟ تأثيرات رئيسة موجودة؟

جـ ـ اختبر ماإذا كان العاملان متفاعلين أم لا استخدم $\alpha = .025$ اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة. ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

د ـ اختبر بصورة منفصلة ماإذا كانت التأثيرات الرئيسة للعرض والزمن موجودة أم لا، استخدم $\alpha = .025$ لكل اختبار، اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة لكل اختبار، ماهي القيمة -P لكل اختبار؟

هـ ـ لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة للعامل A وللعامل B قدّر المقارنات الثنائية التالية:

$$D_1 = \mu_{.1.} - \mu_{2.} \qquad D_3 = \mu_{.2} - \mu_{.3}$$
$$D_2 = \mu_{.2} - \mu_{2.} \qquad D_4 = \mu_{.3} - \mu_{.4}$$

استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 90% ، اعرض نتائجك.

(٢٠ـ٢٨) **إنتاجية القمح.** بالإشارة إلى مثال ٣ في صفحة.... عن تأثيرات نوعين مختلفين من القمح (عامل A) ونوعين من الأسمدة (عامل B) على الإنتاجية. فيما يلي بيانات الإنتاجية لخمسة حقول (قطاعات) تمّ اختيارها عشوائيا.

الحقل	نوع القمح	السماد $k = 1$	السماد $k = 2$
$i = 1$	$j = 1$	43	48
	$j = 2$	63	70
$i = 2$	$j = 1$	40	43
	$j = 2$	52	53
$i = 3$	$j = 1$	31	36
	$j = 2$	45	48
$i = 4$	$j = 1$	27	30
	$j = 2$	47	51
$i = 5$	$j = 1$	36	39
	$j = 2$	54	57

أ ـ احسب الرواسب لنموذج القطعة المنشقة (18.26) وارسمها في مقابل

القيم التوفيقية، جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب.

ماهو استنتاجك عن صلاحية النموذج (28.26)؟

ب - ارسم الإنتاجية لكل نوع قمح ونوع سماد في هيئة الشكل (٢٨ـ٥).

ماذا نستنتج حول صلاحية النموذج (28.26). ناقش.

(٢٨-٢١) بالإشارة إلى مسألة إنتاج القمح (٢٨-٢٠). إفترض أن نموذج القطعة المنشقة (28.26) مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - ارسم المتوسطات المقدَّرة للمعالجات في هيئة الشكل (٢٨-٤). هل يبدو أن تأثيرات التفاعل موجودة؟ هل يبدو أن التأثيرات الرئيسة موجودة؟

جـ - اختبر ما إذا كان العاملان متفاعلين أم لا، استخدم $\alpha = .05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة، ماهي القيمة -P للاختبار؟

د - اختبر بصورة منفصلة ماإذا كانت التأثيرات الرئيسة للعامل A، وللعامل B، موجودة أم لا، استخدم $\alpha = .05$، اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة لكل اختبار، ماهي القيمة -P لكل اختبار؟

هـ - لدراسة طبيعة التأثيرات الرئيسة للعامل A، وللعامل B، قدّر المقارنات الثنائية التالية:

$$D_1 = \mu_{1.} - \mu_{2.} \qquad D_2 = \mu_{.1} - \mu_{.2}$$

استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 90%. أعرض نتائجك.

تمارين

(٢٨-٢٢) استنبط المركبات التي يُفكّك إليها مجموع المربعات الكلي في (28.5).

(٢٨-٢٣) بالإشارة إلى نموذج القياسات المتكررة (28.18).

أ - استخدم القاعدة (٢٧ - ٣) في صورتها المعدّلة (27.16) للحصول على صيغ مجاميع المربعات التعريفية في الجدول (٢٨-٨) ب ودرجات الحرية المصاحبة لها في الجدول (٢٨-٨)أ.

ب ـ استخدم القاعدة (٢٧ـ٤) للحصول على توقـع متوسـط المربعـات في الجدول (٢٨ـ٨)أ.

(٢٨ـ٢٤) بالإشارة إلى نموذج القياسات المتكررة (28.16)

أ ـ استخدم القاعدة (٢٧ـ٣) في صورتها المعدّلة (27.16) للحصول علـى صيغ مجـاميع المربعـات التعريفيـة في الجـدول (٢٨ــ١١). ودرجـات الحرية المصاحبة لها.

ب ـ استخدم القاعدة (٢٧ـ٤) للحصول على توقـع متوسـط المربعـات في الجدول (٢٨ـ١٢).

(٢٨ـ٢٥) بالإشارة إلى نموذج القطعة المنشقة (28.26)

أ ـ استخدم القـاعدة (٢٧ ـــ ٣) في صورتهـا المعدلـة (27.16) للحصـول على صيغ بجاميع المربعات التعريفية في الجدول (٢٨ـ١٥) ودرجـات الحرية المصاحبة لها.

ب ـ استخدم القاعدة (٢٧ـ٤) للحصول على توقـع متوسـط المربعـات في الجدول (٢٨ـ١٦).

مشاريع

(٢٨ـ٢٦) بالإشارة إلى مسألة **ضغط الدم** (٢٨ـ٣). اكتب المصفوفة المقدّرة لتبـاين ـــ تغاير ما ضمن العناصر مستخدما (28.8). هل تبـدو التباينـات والتغـايرات المقدمة مـن المرتبـة نفسـها في الكـبر؟ هـل يـدو افـتراض التنـاظر المركـب معقولا؟

(٢٨ـ٢٧) بالإشـارة إلى مسـألة **مبيعـات الجريـب فـروت** (٢٨ــ٦) اكتـب المصفوفـة المقـدرة لتبـاين ـــ تغـاير مـا ضمـن العنـاصر مسـتخدما (28.8). هـل تبـدو التباينات والتغايرات من المرتبة نفسها في الكبر؟ هل يبـدو افـتراض التنـاظر المركب معقولا؟

(٢٨ـ٢٨) بالإشارة إلى مجموعة بيانات **تجربة تأثير عقـار**. اعتـبر الجـزء I ،فقـط، مـن

الدراسة والوحدة المشاهدة 1 لكل مستوى جرعة عقار، أي خذ، فقط، المشاهدات التي يكون فيها المتغير 2 مساويا 1 والمتغير6، مساويا 1. اعتبر الـ 12 فأرا كعناصر، وتجاهل تصنيف الفئران إلى ثلاث مجموعات ابتدائية وفقا لمعدل ضغطها لذراع الرافعة، افترض أن للعناصر (الفئران) تأثيرات عشوائية وللمعالجات (مستويات الجرعة) تأثيرات مثبتة.

أ - اكتب النموذج التجميعي للقياسات المتكررة لهذه الدراسة.

ب - احسب الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب. ماذا تستنتج حول صلاحية النموذج المستخدم؟

جـ - ارسم الاستجابات لكل فأر في هيئة الشكل (٢٨-١). هل يبدو افتراض عدم وجود تفاعل بين العناصر والمعالجات مناسب؟

(٢٨-٢٩) بالإشارة إلى مجموعة بيانات **تجربة تأثير عقار** في المشروع (٢٨-٢٨).

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - اختبر ما إذا كان مستوى جرعة العقار يؤثر على معدل ضغط ذراع الرافعة أم لا، استخدم $\alpha = .05$. اكتب البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة - ماهي القيمة -P لهذا الاختبار؟

جـ - حلل تأثيرات مستويات الجرعات الأربع بمقارنة متوسطات الاستجابة لكل زوج من مستويات الجرعة المتتابعة، استخدم طريقة بونفيروني بمعامل ثقة عائلي 90%. اكتب نتائجك.

د - قم بتوفيق نموذج انحدار تمثل فيه تأثيرات العناصر بمتغيرات مؤشرة 0,-1,1 وتمثل فيه تأثير الجرعة بحدود خطية وتربيعية في $x = X - \overline{X}$ حيث X مستوى الجرعة. افترض أنه لايوجد تفاعل بين العناصر والمعالجات.

هـ - احسب الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية، هل يبدو أن نموذج الانحدار يقدم توفيقا جيدا . ناقش.

و - اختبر ماإذا كان يمكن إسقاط الحد التربيعي من نموذج الانحدار أم لا،

استخدم $\alpha = .01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة.

(٢٨-٣٠) بالإشارة إلى مجموعة بيانات **تجربة تأثير عقار**. اعتبر الدراسة المركبة. افترض أن العناصر (الفئران) ووحدات المشاهدة لهما تأثيرات عشوائية وأن للعامل A (المعدل الابتدائي لضغط ذراع الرافعة) وللعامل B (مستوى الجرعة)، وللعامل C (جدول الدعم) تأثيرات مثبتة. افترض، أيضا، عدم وجود تفاعل بين العناصر والمعالجات.

أ - استخدم القاعدة (٢٧-١) في صورتها المعدّلة (27.15) لتطوير نموذج لهذه التجربة.

ب - استخدم القاعدة (٢٧-٣) في صورتها المعدّلة (27.16) للحصول على صيغ مجاميع المربعات التعريفية ودرجات الحرية المصاحبة لها.

جـ - استخدم قاعدة (٢٧-٤) للحصول على توقع متوسط المربعات.

(٢٨-٣١) بالإشارة إلى مجموعة بيانات **تجربة تأثير عقار** والمشروع (٢٨-٣٠). احسب الرواسب وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب ماذا تستنتج حول صلاحية النموذج؟

(٢٨-٣٢) بالإشارة إلى مجموعة بيانات **تجربة تأثير عقار** والمشاريع (٢٨-٣٠)، و (٢٨-٣١) افترض أن النموذج في المشروع (٢٨-٣٠)أ مناسب.

أ - اكتب جدول تحليل التباين.

ب - اختبر ما إذا كانت التفاعلات ABC موجودة أم لا، استخدم $\alpha = .01$. اكتب البدائل، قاعدة القرار والنتيجة - ماهي القيمة -P للاختبار؟

جـ - لكل جدول دعم، ارسم المتوسطات المقدّرة للمعالجات في مقابل مستوى الجرعة بمنحنيات مختلفة لكل من مجموعات المعدل الابتدائي لضغط ذراع الرافعة، وذلك في هيئة الشكل (٢٢-٦). افحص رسومك لطبيعة تأثيرات التفاعل واعرض نتائجك.

(٢٨-٣٣) اعتبر دراسة تصميم القياسات المتكررة مع $n=3$ و $r=3$ حيث يرتب كل عنصر جميع المعالجات (غير مسموح بتعادل القيم المشاهدة).

أ - طوّر توزيع المعاينة المضبوط χ_F^2 عندما تكون H_0 (تلميح: لجميع تباديل رتب عنصر فرصا متساوية تحت H_0 ونفترض أن جميع العناصر تتصرف بصورة مستقلة).

ب - قارن المئين التسعين لتوزيع المعاينة المضبوط الذي حصلت عليه في الجزء (آ) مع $\chi^2(.90; 2)$؟ ماذا تستنتج من هذه المقارنة ؟

المربع اللاتيني والتصاميم ذات الصلة

نعتبر في هذا الفصل تصاميم المربع اللاتيني، التي تستخدم متغيري تجميع في قطاعات وذلك لتخفيف الأخطاء التجريبية، كما نعتبر بعض التصاميم ذات الصلة بالمربع اللاتيني.

(٢٩ - ١) عناصر رئيسة

تصاميم قطاع تام وغير تام

رأينا في الفقرة ٢٥ ـ ٦ أنه يمكننا، في تصاميم القطاع العشوائي التام أن نستخدم متغيري تجميع في قطاعات في آن واحد، وذلك كي نحذف من الخطأ التجريبي التشتت المصاحب لكل من متغيري التجميع. وهكذا يمكن أن يكون متغيرا التجميع عمر شخص ودخله، وعندئذٍ يتضمن القطاع أشخاصا من عمر معين وشريحة دخل معينة.

ومن عيوب الاستخدام الكامل لمتغيري تجميع في تصميم القطاع التام أنه يمكن أن يتطلب أحيانا العديد جدا من الوحدات التجريبية. وعلى سبيل المثال، إذا كان لكل من متغيري العمر والدخل في توضيحنا السابق ستة فصول، فيكون هناك 36 قطاعا مطلوبا . وإذا كان المطلوب دراسة ستة معالجات، فإننا نحتاج إلى 216 شخصا للتجربة وقد لاتسمح اعتبارات التكلفة باستخدام هذا العدد من الوحدات التجريبية، ومع ذلك، فقد تتطلب اعتبارات الدقة ومدى الصلاحية الاستخدام الآني لمتغيري تجميع في قطاعات، لكل منهما ستة فصول، وذلك بغية تخفيض الخطأ التجريبي تخفيضا كافيا، ويكون لدينا تنوع معقول من الوحدات التجريبية وفي مثل هذه الحالة، قد

يكون تصميم قطاع غير تام مفيدا . وفي تصميم كهذا، لايزال من الممكن استخدام القطاعات الـ36 في مثالنا ،ولكن لايحتوي كل قطاع الآن المعالجات الست جميعها.

تصاميم المربع اللاتيني

بدفع تصاميم القطاع غير التام، في مثالنا إلى حدودها القصوى، مستخدمين 36 قطاعا ، يكون عدد الوحدات التجريبية أقل ما يمكن إذا استخدمنا معالجة واحدة، فقط، في كل قطاع. وتصميم المربع اللاتيني هو التصميم المناسب في هذه الحالة المتطرفة التي يتضمن فيها كل قطاع معالجة واحدة، فقط. ويقدم الجدول (٢٩ــ١) توضيحا للفرق بين تصاميم القطاع التام وغير التام للمثال المعطى. ويبين العمود 1 تصميم القطاع التام في هذه الحالة، بينما يوضح العمودان 2 و 3 تصاميم قطاع غير تام بثلاث معالجات ومعالجة واحدة في كل قطاع، على الترتيب.

وإلى جانب التوفير، هناك سبب آخر لاستخدام تصميم مربع لاتيني بمعالجة واحدة، فقط، في كل قطاع. إذ لا يمكن لقطاع في بعض الأحيان، أن يتضمن أكثر من معالجة واحدة. فنتأمل تصميم القياسات المتكررة الذي نوقش في الفقرة ٢٨ ــ ٢ حيث يتلقى كل عنصر جميع المعالجات. وقد اكدنا هناك على تعشية ترتيب المعالجات في حالة وجود تأثيرات تداخل بين المعالجات المختلفة. وفي الحقيقة إذ توقعنا أن تأثيرات التداخل ناجمة عن الترتيب الذي اتخذه تطبيق المعالجة، فقد يكون من المستحسن استخدام الموضع الترتيبي كمتغير آخر للتجميع في قطاعات. وهكذا يصبح «العنصر» متغير تجميع في قطاعات و«الموضع الترتيبي» المتغير الآخر للتجميع في قطاعات. وتُعرَّف القطاعات عندئذٍ كمايلي في دراسة تتضمن ست معالجات:

قطاع 1: العنصر (1) ، الوضع (1)

قطاع 2: العنصر (2) ، الوضع (2)

. .

. .

. .

قطاع 6: العنصر (6)، الوضع (6)

قطاع 7: العنصر (7)، الوضع (7)

إلخ إلخ

لاحظ أن القطاعات معرفة بحيث يمكنها أن تحتوي معالجة واحدة، فقط، باعتبار أن الموضع الترتيبي يشير إلى مكان لمعالجة واحدة في متتابعة من المعالجات المطبقة على عنصر.

وصف تصاميم المربع اللاتيني

لنرمز بـ C, B, A لثلاث معالجات، ومن المتعارف عليه استخدام الحروف اللاتينية كرموز للمعالجات في تصميم المربع اللاتيني. لنفترض أن اليوم من أيام الأسبوع (الاثنين، الثلاثاء، الاربعاء) قد استخدمت كمتغيري تجميع. والعامل (1, 2, 3) قد استخدمت كمتغيري تجميع في قطاعات، فمن الممكن عندئذٍ أن يكون تصميم المربع اللاتيني كما هو مبين فيما يلي:

	العامل		
اليوم	1	2	3
الاثنين	B	A	C
الثلاثاء	A	C	B
الأربعاء	C	B	A

فينفذ العامل 1 المعالجة B يوم الاثنين والمعالجة A يوم الثلاثاء والمعالجة C يوم الاربعاء، وهكذا للعمال الآخرين. لاحظ أن كل عامل ينفذ كل معالجة وأن جميع المعالجات تنفذ في كل يوم.

وهكذا يتسم تصميم المربع اللاتيني بالسمات التالية:

١ ـ يوجد r من المعالجات.

٢ ـ هناك متغير تجميع في قطاعات ولكل منهما r من الفصول.

٣ ـ يحتوي كل صف وكل عمود في مربع التصميم جميع المعالجات، أي يمثل كل فصل من فصول متغير تجميع تكرارا.

جدول (٢٩ - ١) تصاميم قطاع تام وغير تام

وصف القطاع	(١) تصميم قطاع تام	(٢) تصميم قطاع غير تام (ثلاث معالجات لكل قطاع)	(٣) تصميم قطاع غير تام (معالجة واحدة لكل قطاع)
العمر تحت 25 والدخل تحت $10.000	$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$	$T_1, T_3, T_5,$	T_2
العمر تحت 25 والدخل تحت $10.000 - $19.999	$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$	T_2, T_4, T_6	T_5
. . .	. . .	. . .	. . .
العمر تحت 25 - 34 والدخل تحت $10.000	$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$	$T_2, T_4, T_5,$	T_3
. . .	. . .	. . .	. . .
العمر تحت 35 - 44 والدخل تحت $10.000	$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$	T_3, T_4, T_6	T_2
الخ	الخ	الخ	الخ

ميزات ومساوئ تصميم المربع اللاتيني

تشمل ميزات تصميم المربع اللاتيني:

١ ـ غالبا ما يسمح استخدام متغيري تجميع في قطاعات بتخفيض في تشتت الأخطاء التجريبية أكبر من التخفيض الذي يحققه استخدام أي من المتغيرين على حدة.

٢ ـ يمكن دراسة تأثيرات المعالجات من تجارب على نطاق ضيق. ويكون هذا مفيدا على وجه الخصوص في الدراسات التمهيدية والاستطلاعية.

٣ ـ في تجارب القياسات المتكررة، من المفيد غالبا أخذ تأثير ترتيب المعالجة في الاعتبار، وذلك باستخدام تصميم المربع اللاتيني.

ومن مساوئ تصميم المربع اللاتيني

١ ـ يجب أن يتساوى عدد فصول متغير التجميع مع عدد المعالجات. مما يؤدي إلى عدد صغير جدا من درجات الحرية المصاحبة للخطأ التجريبي عندما تقتصر الدراسة على عدد قليل من المعالجات.

٢ ـ تذخر افتراضات النموذج بالقيود (عدم وجود تفاعل بين أي من متغيري التجميع في قطاعات وبين المعالجات وأيضا ، عدم وجود تفاعل بين متغيري التجميع).

٣ ـ لايمكن أن يكون لمتغيري التجميع عدد مختلف من الفصول.

٤ ـ التعشية المطلوبة هي إلى حد ما أكثر تعقيدا هنا مما هي في التصاميم التي ناقشناها سابقا .

وبسبب محدودية عدد درجات حرية الخطأ التجريبي، نادرا مانستخدم المربعات اللاتينية عند دارسة أكثر من ثمانية معالجات. وللسبب نفسه نحتاج عادة إلى تكرارات إضافية عند استخدام تصميم المربع اللاتيني بعدد قليل من المعالجات، مثلا ، أربع معالجات أو أقل.

التعشية في تصميم مربع لاتيني

يوجد أكثر من مربع لاتيني لأي عدد معطى من المعالجات. افترض أن عدد المعالجات 3 = r، فهناك أربعة تصاميم مربع لاتيني (حذفنا عناوين متغيري التجميع في صف وعمود).

4			3			2			1		
C	*B*	*A*	*B*	*A*	*C*	*A*	*C*	*B*	*A*	*B*	*C*
A	*C*	*B*	*C*	*B*	*A*	*B*	*A*	*C*	*B*	*C*	*A*
B	*A*	*C*	*A*	*C*	*B*	*C*	*B*	*A*	*C*	*A*	*B*

ومن أجل $r = 3$ يوجد 12 من الترتيبات المختلفة الممكنة. يزداد هذا العدد عندما يزيد عدد المعالجات، فمن أجل $r = 50$ هناك 161280 ترتيبا ممكنا.

وهدف التعشية هو اختيار واحد من بين جميع المربعات اللاتينية الممكنة للعدد المعطى من المعالجات r، بحيث يكون لكل مربع منها الاحتمال نفسه في أن يكون المربع الذي وقع عليه الاختيار.

ومن الواضح أنه من غير الممكن بصورة عامة، إعداد قائمة بجميع المربعات اللاتينية الممكنة بحيث نستطيع اختيار أحدها عشوائيا .

وبدلا من ذلك نستخدم المربعات اللاتينية القياسية، وهي مربعات لاتينية رتبت فيها عناصر الصف الأول، وعناصر العمود الأول ترتيبا أبجديا . والمربع اللاتيني 1 من المربعات المذكورة سابقا هو مربع قياسي. ويحتوي الجدول A.13 جميع المربعات اللاتينية القياسية من أجل $r = 3$, $r = 4$ ومربع لاتيني قياسي واحد مختار من أجل $r = 5, 6, 7, 8, 9$. وطريقة التعشية المستخدمة عادة هي كمايلي:

١ ـ من أجل $r = 3$، رتّب الصفوف تريبا عشوائيا وبصورة مستقلة رتّب الأعمدة ترتيبا عشوائيا .

٢ ـ من أجل $r = 4$ ، اختر أحد المربعات القياسية عشوائيا ، وبصورة مستقلة رتّب كلا من الصفوف والأعمدة عشوائيا .

٣ ـ من أجل r اتساوي 5 فأكثر، رتب بصورة مستقلة كلا من الصفوف والأعمدة والمعالجات للمربع القياسي المعطى.

ويمكن تبيان أن هذه الطريقة تختار عشوائيا أحد المربعات الممكنة في حالة $r = 3$ و $r = 4$. ومن أجل r يساوي 5 فأكثر لاتستند هذه الطريقة في التعشية على كافة المربعات اللاتينية الممكنة بل، في الأصح، على مجموعات جزئية منها كبيرة جدا .

مثال ١. في توضيحنا السابق، كان متغيرا التجميع اليوم (الاثنين الثلاثاء، الأربعاء) والعامل (1 , 2 , 3). وهكذا يمكن أن نبيّن حدود المربع كمايلي:

اليوم	العامل 1	2	3
الاثنين			
الثلاثاء			
الأربعاء			

والمربع اللاتيني القياسي في حالة $r = 3$ هو:

	A	B	C
خطوة 1	B	C	A
	C	A	B

ونحصل الآن على متبادلة عشوائية لِ 3 أشياء نعيد وفقا لها ترتيب الصفوف. وكما شرحنا في الفصل ٢، يمكن القيام بذلك بالحصول على عدد عشوائي من رقمين من مولد أو جدول للأرقام العشوائية، ونستخدم أعدادا من رقمين لتقليل فرص الحصول على العدد نفسه، افترض أن الأعداد الثلاثة ذات الرقمين كانت كمايلي:

ترتيب العدد	1	2	3
العدد العشوائي	87	34	63

نعيد الآن ترتيب الأعداد العشوائية تصاعديا محتفظين معها برتبة العدد الأصلية، فنجد:

العدد العشوائي	34	63	87
ترتيب العدد	2	3	1

وهكذا نحصل على المتبادلة العشوائية 2, 3,1.

ووفقا لهذه المتبادلة يأتي الصف 2 في المربع القياسي أولا والصف 3 ثانيا والصف 1 ثالثا . وبذلك نجد:

الرقم الأصلي للصف				
2	B	C	A	
3	C	A	B	خطوة 2
1	A	B	C	

ونحصل الآن بصورة مستقلة على متبادلة عشـوائية أخرى لثلاثـة أشـياء، ونعيـد وفقا لها ترتيب الأعمـدة. افـترض أنهـا كـانت 2,1,3 فـالعمود 2 في مربـع الخطـوة ٢ يصبح الآن العمود الأول وهكذا وبالتالي نجد:

رقم العمود في الخطوة الثانية	2	1	3	
	C	B	A	
	A	C	B	خطوة 3
	B	A	C	

وهكذا يكون التصميم المختار:

	العامل		
اليوم	1	2	3
الاثنين	C	B	A
الثلاثاء	A	C	B
الأربعاء	B	A	C

مثال ٢. لنعتـبر تجربـة حـول تأثـير خمسـة أنـواع مختلفـة مـن الموسـيقا الخلفيــة (*A,B,C,D, E*) على إنتاجية صرّافي بنك. يُعـزف نـوع معـين مـن الموسـيقى لمـدة يـوم وتسجل الانتاجية. ومتغيرا التجميـع في قطاعـات همـا يـوم الأسـبوع وأسـبوع الفـترة التجريبية. وحدود تصميم المربع اللاتيني هي إذن:

	الأيام				
الأسبوع	M	T	W	Th	F
1					
2					
3					
4					
5					
6					

نبدأ بالمربع اللاتيني القياسي من الجدول A.13 الخاص بالحالة $r = 5$:

خطوة 1

A	*B*	*C*	*D*	*E*
B	*A*	*E*	*C*	*D*
C	*D*	*A*	*E*	*B*
D	*E*	*B*	*A*	*C*
E	*C*	*D*	*B*	*A*

بعد ذلك نبدل الصفوف عشوائيا مستخدمين متبادلة عشوائية لـ 5، ولنقُل 4,2,3,1,5. وعندئذٍ نحصل على المربع:

خطوة 2

D	*E*	*B*	*A*	*C*
B	*A*	*E*	*C*	*D*
C	*D*	*A*	*E*	*B*
A	*B*	*C*	*D*	*E*
E	*C*	*D*	*B*	*A*

والآن نبدل الأعمدة عشوائيا مستخدمين متبادلة عشوائية مستقلة لـ 5، مثلا ، 2,4,1,5,3. فنجد:

خطوة 3

E	*A*	*D*	*C*	*B*
A	*C*	*B*	*D*	*E*
D	*E*	*C*	*B*	*A*
B	*D*	*A*	*E*	*C*
C	*B*	*E*	*A*	*D*

وفي النهاية، نحتاج إلى تبديل رموز المعالجات عشوائيا، لاحظ أن ترميز المعالجات بالحروف *E, D*, C, *B, A* تبقى كما هي. ونرغب ببساطة في تعشية الخلايا التي تظهر فيها المعالجات المحددة علما أن المربع الآن هو ماحصلنا عليه في الخطوة ٣. لنعتمد التقابل:

1	2	3	4	5
A	*B*	*C*	*D*	*E*

ولنفترض أن اختيارا عشوائيا مستقلا لمتبادلة من 5 أنتج 3,5,2,1,4 فعندئذٍ نجد:

الرموز الحالية في الخلايا	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*
الرموز الجديدة في الخلايا	*D*	*A*	*B*	*E*	*C*

أي أن كل خلية تتضمن A في الخطوة ٣ تتضمن الآن C وهكذا. وبذلك يصبح تصميم المربع الذي سنستخدمه كمايلي:

الأسبوع	F	Th	W	T	M
		اليوم			
1	E	B	A	C	D
2	D	A	E	B	C
3	C	E	B	D	A
4	B	D	C	A	E
5	A	C	D	E	B

ملاحظة

من أجل $r = 3$ و $r = 4$، يكفي تعشية الصفوف الـ r جميعها، والأعمدة r -1 الأخيرة. وتعشية جميع الصفوف وجميع الأعمدة كما تقترح الطريقة المذكورة هنا هي في مستوى الجودة نفسه.

مثال

ذكرنا فيما سبق تجربة حول تأثيرات أنواع مختلفة من الخلفية الموسيقية على إنتاجية صرافي بنك. وقد عُرِّفت المعالجات على أنها توليفة من سرعات مختلفة للعزف (بطيئة ـ متوسطة ـ عالية) ونوع الموسيقى (آلات وأصوات ، آلات فقط). وقد تم تحديد التقابل بين المعالجات والحروف اللاتينية كمايلي:

المعالجة	الحرف اللاتيني المقابل	سرعة ونوع الموسيقى
1	A	بطيئة، آلة وصوت
2	B	متوسط، آلة وصوت
3	C	عالية، آلة وصوت
4	D	متوسط، آلة فقط
5	E	عالية، آلة فقط

ويحتوي الجدول (٢٩-٢) نتائج هذه التجربة. والمعالجة في كل خلية مبينة بين قوسين. ونلاحظ في هذه الدراسة أن الوحدة التجريبية هي يوم عمل لطاقم الصرّافين في بنك. وأن بيانات الانتاجية تتعلق بإنجاز الطاقم بكامله. لنرمز بـ Y_{ijk} للمشاهدة في الخلية المعرّفة بالفصل i لمتغير التجميع في صفوف والفصل j لمتغير التجميع في أعمدة. ويشير الدليل k إلى المعالجة المخصصة لهذه الخلية في المربع اللاتيني المستخدم وهكذا فإن $Y_{123} = 17$ هي الانتاجية في يوم الثلاثاء من الأسبوع الأول، ويشير الجدول (٢٩-٢) إلى أن نوع الموسيقى في ذلك اليوم كان C.

جدول (٢٩-٢) دراسة موسيقى خلفية في تصميم مربع لاتيني - نتائج التجربة (إنتاجية الطاقم - البيانات مرمزة)

الأسبوع	اليوم					المجموع
	M	T	W	Th	F	
1	18(D)	17(C)	14(A)	21(B)	17(E)	$Y_{1..} = 87$
2	13(C)	34(B)	16(E)	15(D)	15(D)	$Y_{2..} = 99$
3	7(A)	29(D)	32(B)	13(C)	13(C)	$Y_{3..} = 108$
4	17(E)	13(A)	24(C)	25(B)	25(B)	$Y_{4..} = 110$
5	21(B)	26(E)	26(D)	7(A)	7(A)	$Y_{5..} = 111$
المجموع	$Y_{.1.} = 76$	$Y_{.2.} = 119$	$Y_{.3.} = 117$	$Y_{.4.} = 126$	$Y_{.5.} = 77$	$Y_{...} = 515$

$Y_{..1} = 7 + 13 + 14 + 16 + 7 = 57$ $\quad \bar{Y}_{..1} = 11.4$

$Y_{..2} = 21 + 34 + 32 + 21 + 25 = 133$ $\quad \bar{Y}_{..2} = 26.6$

$Y_{..3} = 13 + 17 + 24 + 31 + 13 = 98$ $\quad \bar{Y}_{..3} = 19.6$

$Y_{..4} = 18 + 29 + 26 + 31 + 15 = 119$ $\quad \bar{Y}_{..4} = 23.8$

$Y_{..5} = 17 + 26 + 21 + 27 + 17 = 108$ $\quad \bar{Y}_{..5} = 21.6$

الدليل k في Y_{ijk} لتصميم مربع لاتيني هو في الحقيقة نافلة لالزوم لها لأن الصف والعمود في رمز الخلية (i, j) يحدد المعالجة في المربع اللاتيني المستخدم. ومع ذلك نستمر في استخدام الأدلة الثلاثة تسهيلا للتعرّف على هوية الخلية.

سنحلل نتائج هذه الدراسة في الفقرات التالية.

(٢٩-٢) نموذج المربع اللاتيني

يتضمن نموذج تصميم المربع اللاتيني التأثير الرئيس لمتغير التجميع في صفوف ونرمز له بـ ρ_i، التأثير الرئيس لمتغير التجميع في أعمدة، ونرمز له بـ κ_j، والتأثير الرئيس للمعالجة ونرمز له بـ τ_k. ونفترض عدم وجود تفاعلات بين هذه المتغيرات الثلاثة. وهكذا يكون النموذج المستخدم نموذجا تجميعيا . وهو في حالة تأثيرات مثبتة للمعالجات والصفوف والأعمدة:

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \rho_i + \kappa_j + \tau_k + \varepsilon_{(ijk)} \qquad (29.1)$$

حيث:

$\mu_{...}$ ثابت

ρ_i، κ_j، τ_k ثوابت خاضعة للقيود $\Sigma\rho_i = \Sigma\kappa_j = \Sigma\tau_k = 0$

$\varepsilon_{(ijk)}$ مستقلة و $N(0, \sigma^2)$.

$i = 1,\ldots,r$ ، $j = 1,\ldots,r$ ، $k = 1,\ldots,r$

لاحظ من جديد أن عدد الصفوف من أجل كل من متغيري التجميع يساوي عدد الصفوف من أجل المعالجات، وأن العدد الكلي للمعالجات r^2. ولاحظ، أيضا، أن الرمز لحد الخطأ هو $\varepsilon_{(ijk)}$، لأنه لاتوجد تكرارات في خلايا تصميم المربع اللاتيني.

تعليقات

١ - ننظر أحيانا إلى تأثيرات أحد متغيري التجميع أو تأثيراتهما معا على أنها عشوائية، كما في الحالة عندما يشير متغير التجميع إلى عناصر، مراقبين، آلات، إلخ. وسنناقش في الفقرة (٢٩-١١) حالة تأثيرات عشوائية لمتغيري التجميع.

٢ - إذا كانت تأثيرات المعالجات عشوائية، فالتغيير الوحيد في النموذج (29.1) هو أن نعتبر τ_k كمتغيرات مستقلة فيما بينها و$N(0, \sigma^2)$. ومستقلة عن $\varepsilon_{(ijk)}$.

(٢٩-٣) تحليل تباين واختبارات

رموز

سنستخدم الرموز المعتادة لمجاميع ومتوسطات الصفوف، والأعمدة، والمعالجات:

$$Y_{i..} = \sum_j Y_{ijk} \qquad \bar{Y}_{i..} = \frac{Y_{i..}}{r} \tag{29.2a}$$

$$Y_{.j.} = \sum_i Y_{ijk} \qquad \bar{Y}_{.j.} = \frac{Y_{.j.}}{r} \tag{29.2b}$$

$$Y_{..k} = \sum_{i,j} Y_{ijk} \qquad \bar{Y}_{..k} = \frac{Y_{..k}}{r} \tag{29.2c}$$

ونرمز للمجموع الإجمالي والمتوسط الإجمالي كالمعتاد بالرموز:

$$Y_{...} = \sum_i \sum_j Y_{ijk} \qquad \bar{Y}_{...} = \frac{Y_{...}}{r^2} \tag{29.2d}$$

لاحظ أن كون أي من الأدلة الثلاثة نافلة ناشئ عن حقيقة أن المعالجة تتحدد تماما عند تحديد الصف والعمود في المربع اللاتيني المستخدم. والمجاميع المختلفة لمثال الموسيقى الخلفية مبين في الجدول (٢٩-٢).

توفيق نموذج

تقديرات المربعات الدنيا لمعالم نموذج المربع اللاتيني (29.1) هي:

المقدّر	المعلمة	
$\hat{\mu}_{...} = \bar{Y}_{...}$	$\mu_{..}$	(29.3a)
$\hat{\rho}_i = \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}$	ρ_i	(29.3b)
$\hat{\kappa}_j = \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}$	κ_i	(29.3c)
$\hat{\tau}_k = \bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...}$	τ_k	(29.3d)

والقيم التوفيقية هي إذن:

$$\hat{Y}_{ijk} = \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{..k} - 2\bar{Y}_{...} \tag{29.4}$$

والرواسب هي:

$$e_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{i..} + \bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{..k} + 2\bar{Y}_{...} \tag{29.5}$$

تحليل تباين

يقدّم الجدول (٢٩-٣) جدول التحاين لنموذج المربع اللاتيني (29.1) ويمكن الحصول على مجاميع المربعات باستخدام القاعدة (٢٧-٣) والتعديلات (27.16)،

متذكرِّين في الخطوة ٣ أن أحد الأدلة نافلة. ويجب الحصول على مجموع المربعات الموافق لحد خطأ النموذج في تصميم المربع اللاتيني بالطرح إذ لاتوجد تكرارات في خلية تصميم المربع اللاتيني. والصيغ التعريفية لمجاميع المربعات هي كما يلي:

$$SSTO=\sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2 \quad (29.6a)$$

$$SSROW=r\sum_i (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 \quad (29.6b)$$

$$SSCOL=r\sum_j (\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...})^2 \quad (29.6c)$$

$$SSTR=r\sum_k (\bar{Y}_{..k} - \bar{Y}_{...})^2 \quad (29.6d)$$

$$SSRem=\sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ijk} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{..k} + 2\bar{Y}_{...})^2 \quad (29.6e)$$

SSROW مجموع مربعات الصفوف. وكلما اختلفت متوسطات الصفوف $\bar{Y}_{i.}$ فيما بينها كلما كان *SSROW* أكبر. وبصورة مماثلة *SSCOL* يرمز لمجموع مربعات الأعمدة ويقيس التشتت بين متوسطات الأعمدة $\bar{Y}_{.j.}$ ويرمز *SSTR* و *SSRem*، كالمعتاد، لمجاميع مربعات المعالجات والباقي، على الترتيب.

ويمكن فهم درجات الحرية في الجدول (٢٩ـــ٣) كمايلي: يوجد r^2 من المشاهدات، وبالتالي يوجد $r^2 - 1$ من درجات الحرية المصاحبة لـ *SSTO*. وبما أنه يوجد r من الصفوف لكل من متغيري التجميع في صف أو في عمود، كما يوجد r معالجة، فيترافق مع كل من مجاميع المربعات المقابلة $r - 1$ درجة حرية. وعدد درجات الحرية المصاحب لـ *SSRem* هو الباقي، أي $(r-2)\ (r-1) = (r^2-1)-3(r-1)$. لاحظ أن إضافة متغير تجميع جديد قد خفض عدد درجات الحرية الموافق لـ *SSRem* من $(r-1)^2$ في حالة تصميم قطاع عشوائي تام قائم على العدد نفسه من الوحدات التجريبية إلى $(r-2)\ (r-1)$ ، أي انخفض بمقدار $(r-1)$ درجة حرية.

ويمكن الحصول على العمود $E\{MS\}$ في الجدول (٢٩-٣) الخاص بنموذج المربع اللاتيني (29.1) باستخدام القاعدة (٢٧-٤). ومن جديد يجب أن نتذكر عند الحصول على المعاملات في الخطوة ١٠ أن أحد الأدلة i, j، k نافلة.

اختبار تأثيرات المعالجات

لاختبار تأثيرات مثبتة للمعالجات في نموذج المربع اللاتيني (29.1) أي اختبار:

$$H_0: \text{كل } \tau_k \text{ مساو للصفر} \quad H_a: \text{ليس كل } \tau_k \text{ مساو للصفر} \tag{29.7a}$$

نرى من عمود $E\{MS\}$ في الجدول (٢٩-٣) إن إحصاءة الاختبار المناسبة هي:

$$F^* = \frac{MSTR}{MS\,\text{Re}m} \tag{29.7b}$$

وقاعدة القرار المناسبة لضبط مخاطرة الخطأ من النوع الأول عند α هي:

$$\begin{aligned} &\text{إذا كان } F^* \leq F[1-\alpha; (r-1), (r-1)(r-2)] \text{ استنتج } H_0 \\ &\text{إذا كان } F^* > F[1-\alpha; (r-1), (r-1)(r-2)] \text{ استنتج } H_a \end{aligned} \tag{29.7c}$$

مثال

تمت حسابات تحليل التباين لبيانات مثال الموسيقى الخلفيـة في الجـدول (٢٩-٢) باستخدام حزمة حاسب والنتائج مبينة في الجدول (٢٩-٤).

وللقيام بالاختبار التالي لتأثير المعالجات:

$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau_5 = 0$$
$$H_a: \text{ليس كل } \tau_k \text{ مساو للصفر}$$

نجد من الجدول (٢٩-٤):

$$F^* = \frac{MSTR}{MS\,\text{Re}m} = \frac{166.1}{15.7} = 10.6$$

مفترضين أننا سنضبط مخـاطرة ارتكـاب خطـأ مـن النـوع الأول عنـد $\alpha = .01$، نحتـاج $F(.99;4,12) = 5.41$، وبمـا أن $F^* = 10.6 > 5.41$ ، فنسـتنتج H_a، أي أن للأنواع المختلفة مـن الموسيقى الخلفيـة تأثـيرات مختلفـة على إنتاجيـة صرّافي البنـك. والقيمة ـP لهذا الاختبار هي .0007

جدول (٢٩-٣) جدول تباين لنموذج المربع اللاتيني (29.1) بتأثيرات مثبتة

مصدر التغير	SS	df	MS	E{MS}
متغير تجميع الصف	SSROW	r - 1	$MSROW = \frac{SSROW}{r-1}$	$\sigma^2 + r\frac{\Sigma\rho_i^2}{r-1}$
متغير تجميع العمود	SSCOL	r - 1	$MSCOL = \frac{SSCOL}{r-1}$	$\sigma^2 + r\frac{\Sigma\kappa_j^2}{r-1}$
المعالجات	SSTR	r - 1	$MSTR = \frac{SSTR}{r-1}$	
الخطأ	SSRem	(r - 1)(r - 2)	$MS\,Rem = \frac{SS\,Rem}{(r-1)(r-2)}$	σ^2
المجموع الكلي	SSTO			

جدول (٢٩-٤) جدول تباين لمثال الموسيقى الخلفية

مصدر تغير	SS	df	MS
أسابيع	82.0	4	20.5
أيام ضمن الأسبوع	477.2	4	119.3
النوع الموسيقي	664.4	4	166.1
الخطأ	188.4	12	15.7
المجموع	1,412.0	24	

تعليقات

١- نرغب أحيانا في اختبار وجود تأثيرات لمتغير تجميع، ويشير العمود $E\{MS\}$ في الجدول (٢٩-٣) إلى إمكانية القيام بذلك، في نموذج المربع اللاتيني (29.1) المثبّت، بالطريقة المعتادة. والإحصاءة لاختبار تأثيرات متغير التجميع في صفوف هي:

$$F^{*}=\frac{MSROW}{MS\,\text{Rem}} \tag{29.8a}$$

والاحصاءه لاختبار تأثيرات متغير التجميع في أعمدة هي:

$$F^{*}=\frac{MSCOL}{MS\,\text{Rem}} \tag{29.8b}$$

وعلى سبيل المثال، كي نختبر في مثال الموسيقى الخلفية، ما إذا كانت الانتاجية تختلف باختلاف اليوم من الأسبوع، نستخدم إحصاءة الاختبار $F^{*}=119.3/15.7=7.6$. ومن أجل مستوى معنوية (أو دلالة) $\alpha=.01$، نحتاج إلى $F(.99;\ 4,12)=5.41$. ويمكن استنتاج وجود تغيّر في الانتاجية (مأخوذة كمتوسط فوق جميع المعالجات والأسابيع) ضمن الاسبوع. وبما أن متغيري التجميع يقابلان عاملي تصنيف، فلابد من الحذر في تفسير تأثيرات متغير تجميع.

٢- تنطوي قوة الاختبار F لتأثيرات المعالجات في نموذج المربع اللاتيني (29.1) على معلمة اللامركزية:

$$\phi=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\Sigma\tau_k^2} \tag{29.9}$$

مع ١ ـ r درجة حرية للبسط و $(r\text{-}2)$ $(r\text{-}1)$ درجة حرية للمقام. وفيما عدا هذه التعديلات لانواجه أية مشاكل جديدة في الحصول على قوة اختبار تأثيرات المعالجات في تصميم المربع اللاتيني.

٣ـ إذا كانت تأثيرات المعالجات عشوائية ،فالبدائل التي يجب أخذها في الاعتبار تصبح:

$$H_0: \sigma_\tau^2 = 0 \qquad (29.10)$$
$$H_0: \sigma_\tau^2 > 0$$

ولكن إحصاءة الاختبار وقاعدة القرار تبقيان كما هما في العبارة (29.7) الخاصة بتأثيرات أن مثبتة للمعالجات.

(٢٩ـ٤) تقويم مصداقية نموذج مربع لاتيني

تحليل الراسب

لايقدم استخدام الرواسب (29.5) لفحص مصداقية نموذج مربع لاتيني مسائل جديدة؛ فالنقاط الأساسية التي ذكرناها سابقا من أجل تصاميم أخرى تنطبق بدورها ،أيضا، على تصاميم المربع اللاتيني.

اختبار توكي للتجميعية

التساؤل الرئيس حول مصداقية نموذج المربع اللاتيني (29.1) هو ما إذا كانت تأثيرات متغيري التجميع والمعالجات تجميعية حقا . ومع وجود اللاتجميعية تنبغي دراسة تحويلات للبيانات لرؤية ما إذا كان يمكن إلغاء اللاتجميعية أو جعلها غير مهمة. واستخدام النموذج مفترضين التجميعية في الوقت الذي تكون فيه التأثيرات، في الواقع، لاتجميعية، ستخفض مستوى الدلالة لاختبار تأثيرات المعالجات كما تخفض قوة هذا الاختبار، أو توسع مابين حدي الثقة، مما يجعل التجربة أقل حساسية.

ويمكن أن يمتد اختبار توكي من أجل التجميعية في تصميم القطاع التام العشوائي الذي ناقشناه في الفقرة ٢٤ـ٦ ليغطي تصاميم المربع اللاتيني. ولتمام المناقشة نجمل فيما يلي الخطوات المطلوبة لاختبار توكي من أجل التجميعية في تجربة مربع لاتيني:

١ ـ أوجد من أجل كل خلية القيمة التوفيقية (29.4):

$$\hat{Y}_{ijk}=\overline{Y}_{i..}+\overline{Y}_{.j.}+\overline{Y}_{..k}-2\overline{Y}_{...} \quad (29.11a)$$

٢ ـ أوجد الراسب (29.5) من أجل كل خلية:

$$e_{ijk}=Y_{ijk}-\hat{Y}_{ijk} \quad (29.11b)$$

وتحقّق من أن الرواسب تجمع إلى الصفر فوق كل صف وكل عمود وكل معالجة:

٣ ـ احسب $SSRem$ للمربع اللاتيني. ويمكن القيام بذلك باستخدام (29.6e) التي تكافئ كما هي الحال دائما :

$$SS\,\text{Re}m=\sum_i\sum_j e_{ijk}^2 \quad (29.11c)$$

٤ ـ احسب لكل خلية:

$$U_{ijk}=(\hat{Y}_{ijk}-\overline{Y}_{...})^2 \quad (29.11d)$$

٥ ـ احسب:

$$N=\sum_i\sum_j e_{ijk}^2 U_{ijk} \quad (29.11e)$$

٦ ـ معتبرا U_{ijk} كمشاهدات في مربع لاتيني، أوجد مجموع مربعات الباقي $SSRem(U)$ مستخدما (29.6e)، مع وضع المقادير U بدلا من المقادير Y.

٧ ـ مجموع مربعات نقص التوفيق المصاحب لعدم التجميعية هو:

$$SSLF=\frac{N^2}{SS\,\text{Re}m(U)} \quad (29.11f)$$

ولمجموع المربعات هذا درجة حرية واحدة.

٨ ـ مجموع مربعات الباقي لنموذج المربع اللاتيني مع تأثيرات تفاعل، ونرمز له بـ $SSRem^*$، هو:

$$SSRem^* = SSRem - SSLF \quad (29.11g)$$

ويصاحبه $(r\text{-}1)(r\text{-}2)$ - 1 درجة حرية.

٩ ـ إحصاءة الاختبار هي:

$$F^*=\frac{SSLF}{1}\div\frac{SS\,\text{Re}m^*}{(r-1)(r-2)-1} \quad (29.11h)$$

وتتبع إحصاءة الاختبار هذه التوزيع $F[1,(r\text{-}1)(r\text{-}2)\text{-}1]$ في حالة عدم وجود

تفاعلات. وتقود القيم الكبيرة لـ F^* إلى استنتاج أن تجميعية النموذج غير مناسبة.

جدول (٢٩ـ٥) نتائج حسابية وسيطة ومهمة لاختبار توكي من اجل التجميعية ـ مثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢٩-٢)

الخطوة 2 $2\text{-}e_{ijk}$

2.8	-2.6	3.0	-7.0	3.8
-.4	5.0	-2.6	.8	-2.8
0.0	1.0	1.6	-.2	-2.4
-.6	-3.5	.2	1.2	2.2
-1.8	-.3	-2.2	5.2	-.8

الخطوة 3 $3 - SSRem$

$SSRem = 188.4$

الخطوة 4 $4\text{-}\ U_{ijk}$

54.76	54.76	92.16	1.00	29.16
7.84	29.16	9.00	70.56	51.84
27.04	43.56	96.04	54.76	184.96
4.84	84.64	10.24	21.16	9.00
163.84	27.07	57.76	33.46	4.84

الخطوة 5 $5\text{-}N$

$N = 530.832$

الخطوة 6 $SSRem(U)$

$SSRem(U) = 25{,}189.916$

الخطوة 7 $7 - SSLF$

$$SSLF = \frac{(350.832)^2}{25{,}189.916} = 11.19$$

الخطوة 8 $8 - SSRem^*$

$SSRem^* = 188.4 - 11.19 = 177.21$

مثال أردنا التحقق من صلاحية افتراض التجميعية في نموذج المربع اللاتيني (29.1)، وذلك من اجل مثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢٩ـ٢). طبقنا اختبار توكي للتجميعية، وقد لخصنا في الجدول (٢٩ـ٥) نتائج وسيطة ومهمة. ووجدنا إحصاءة الاختبار (29.11h):

$$F^* = \frac{11.19}{1} \div \frac{177.21^*}{11} = .69$$

ومستخدمين مستوى معنوية $\alpha = .05$، نحتاج إلى $F[.95;\ 1,11] = 4.84$، وبما أن $F^* = .69 \le 4.84$، فنستنتج أن تأثيرات متغيري التجميع والمعالجات تجميعية. والقيمة –

P لهذا الاختبار هي 0.42.

(٢٩ـ٥) تحليل تأثيرات المعالجات

إذا كانت تأثيرات المعالجات مثبتة واستنتجنا من خلال تحليل التباين وجود فروق بين تأثيرات المعالجات ، فسنرغب عادة في تقدير بعض المتضادات التي تتضمن هذه التأثيرات مستخدمين في الغالب، طريقة المقارنات المتعددة. وسيكون متوسط المربعات *MSRem* الذي نحصل عليه من (29.6e) المتوسط المناسب المستخدم في تقدير تباين المتضادة، ومضاعفات الانحراف المعياري المقدّر هي كما يلي:

(29.12a)	مقارنة بمفردها	$t[1-\alpha/2; (r-1)(r-2)]$
(29.12b)	طريقة توكي (لمقارنات ثنائية)	$T=\frac{1}{\sqrt{2}}q[1-\alpha;(r-1)(r-2)]$
(29.12c)	طريقة شيفة	$S^2=(r-1)F[1-\alpha; r-1, (r-1)(r-2)]$
(29.12d)	طريقة بونفيروني (g من المقارنات)	$B=t[1-\alpha/2g; (r-1)(r-2)]$

مثال

في مثال الموسيقى الخلفية، نرغب القيام بمقارنات ثنائية بين الأنواع المختلفة من الموسيقى بمعامل ثقة عائلي 0.90. وقد استخدمت المحللة طريقة توكي. وبالتعويض في (15.25b) حيث $n_i = n_i = r$ واستخدام النتائج في الجدول (٢٩ـ٤)، حصلت على:

$$s^2=\{\hat{D}\}=\frac{2MSRem}{r}=\frac{2(15.7)}{5}=6.28 \qquad s\{\hat{D}\}=2.51$$

لنتذكر هنا أن كل متوسط معالجة مقدّر $\bar{Y}_k$ ينطوي على خمس مشاهدات. وبالتالي وجدت المحللة أن المضاعف T في (29.12b).

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}q(.90;5,12)=\frac{1}{\sqrt{2}}(3.92)=2.77$$

وهكذا يكون:

$$Ts\{\hat{D}\}=2.77(2.51)=7.0$$

وباستخدام متوسطات المعالجات المقدرة في الجدول (٢٩ـ٢)، تم الحصول على

المقارنات الثنائية. وعلى سبيل المثال، لدينا من أجل $\tau_2 - \tau_1 = \mu_{.2} - \mu_{.1}$:

و$\mu_{.1}$ هي هنا متوسط الانتاجية للمعالجة 1 حيث أخذنا المتوسط فوق جميع الأسابيع وجميع أيام الأسبوع، وللرمز $\mu_{.2}$ المعنى المقابل الخاص بالمعالجة 2. ومجموعة المقارنات الثنائية بكاملها هي كما يلي:

$$+5.4 \le \mu_{.4} - \mu_{.1} \le +19.4 \qquad +8.2 \le \mu_{.2} - \mu_{.1} \le +22.2$$
$$-9.2 \le \mu_{.5} - \mu_{.4} \le +4.8 \qquad -14.0 \le \mu_{.3} - \mu_{.2} \le -.05$$
$$-5.0 \le \mu_{.5} - \mu_{.3} \le +9.0 \qquad +1.2 \le \mu_{.3} - \mu_{.1} \le +15.2$$
$$-12.0 \le \mu_{.5} - \mu_{.2} \le +2.0 \qquad -2.8 \le \mu_{.4} - \mu_{.3} \le +11.2$$
$$-3.2 \le \mu_{.5} - \mu_{.1} \le +17.2 \qquad -9.8 \le \mu_{.4} - \mu_{.2} \le 4.2$$

هذه الفروق الثنائية قادت المحللة إلى الاستنتاجات التالية بمعامل ثقة عائلي 90 بالمائة:

١ ـ تشجع المعالجة 2 انتاجية أعلى في المتوسط من انتاجية المعالجتين 1 أو 3.

٢ ـ تشجع المعالجات 5،4،3 متوسط إنتاجية أعلى من المعالجة 1.

٣ ـ لايتضح وجود أية فروق ثنائية في متوسط الانتاجية بين المعالجات 5،4،2.

٤ـ لايتضح وجود أية فروق ثنائية في متوسط الانتاجية بين المعالجات 3، 4، 5.

أي أن المعالجة الأفضل، على مايبدو، هي الموسيقى المختلطة (آلات وأصوات) بسرعة عزف متوسطة ($k = 2$). وهناك دلالة واضحة على أنها أفضل من الموسيقى الآلية ـ الصوتية بسرعة عزف بطيئة ($k = 1$)، أو الموسيقى الآلية الصوتية بسرعة عزف عالية ($k = 3$). كما تقترح التقديرات النقطية أنها أفضل، أيضا ، من الموسيقى الآلية، فقط، بسرعة عزف متوسطة ($k = 4$) ، أو سرعة عزف عالية ($k = 5$) ،ولكن البيّنة التجريبية حول هاتين المقارنتين الأخيرتين ليست حاسمة.

(٢٩ ـ ٦) معالجات عاملية

إذا كانت المعالجات في تصميم المربع اللاتيني عاملية في طبيعتها، فيمكن تفكيك مجموع مربعات المعالجات $SSTR$ بالطريقة المعتادة. وسنجد في تجربة تتضمن عاملين A ,B:

$$SSTR = SSA + SSB + SSAB \qquad (29.13)$$

ويمكن بسهولة القيام بتقديرات التأثيرات المثبتة لعامل باعتبارها ببساطة متضادة في متوسطات المعالجات.

مثال

لاحقا للدراسة الموسيقى الخلفية المذكورة سابقا، اُستخدمت أربع معالجات لتقصي تأثيرات ارتفاع الموسيقى (ناعمة، مرتفعة) ونوع الموسيقى (نصف رائحة، رائحة) على إنتاجية صرافي بنك. والمعالجات معرفة كمايلي:

T_1 - ناعمة، نصف رائحة.

T_2 - مرتفعة، نصف رائحة.

T_3 - ناعمة، رائحة.

T_4 - مرتفعة، رائحة.

ومتغيرا التجميع لتصميم المربع اللاتيني ، هما أيام الأسبوع (الاثنين، الثلاثاء، الأربعاء ، الخميس) والأسبوع (1,2,3,4). ونفترض أن تأثيرات المعالجات ومتغيري التجميع مثبتة.

ونبين في الجدول (٢٩-٦) تحليل التباين لتجربة تصميم المربع اللاتيني هذه. وإذا كان العاملان B,A غير متفاعلين، فيمكن دراسة تاثير الارتفاع من المتضادة:

$$L_1 = \frac{\mu_{..1}+\mu_{..3}}{2} - \frac{\mu_{..2}+\mu_{..4}}{2} = \frac{\tau_1+\tau_3}{2} - \frac{\tau_2-\tau_4}{2} \qquad (29.14)$$

حيث $\mu_{..k}$ متوسط الانتاجية للمعالجة k حيث المتوسط مأخوذ فوق جميع الأسابيع وأيام الأسبوع. والمقدِّر النقطي لهذه المتضادة هو:

$$\hat{L}_1 = \frac{\overline{Y}_{..1}+\overline{Y}_{..3}}{2} - \frac{\overline{Y}_{..2}+\overline{Y}_{..4}}{2} \qquad (29.14a)$$

وبصورة مماثلة ، يمكن دراسة تأثير نوع الموسيقى من المتضادة:

$$L_1 = \frac{\mu_{..1}+\mu_{..2}}{2} - \frac{\mu_{..3}+\mu_{..4}}{2} \qquad (29.15)$$

والمقدر النقطي لهذه المتضادة هو:

$$\hat{L}_2 = \frac{\overline{Y}_{..1}+\overline{Y}_{..2}}{2} - \frac{\overline{Y}_{..3}+\overline{Y}_{..4}}{2} \qquad (29.15a)$$

ويمكن الحصول على حدّي ثقة لكل من هذه المتضادات بالطريقة المعتادة، مستخدمين المضاعفات في (29.12).

جدول (٢٩-٦) جدول تحاين تصميم المربع اللاتيني بمعالجات عاملية ـ الدراسة اللاحقة للموسيقى الخلفية
$(b = 2, a = 2 , r = 4)$

مصدر تغير	SS	df	MS
أسابيع	SSROW	3	MSROW
أيام ضمن الأسبوع	SSCOL	3	MSCOL
معالجات	SSTR	3	MSTR
ارتفاع الموسيقى (A)	SSA	1	MSA
نوع الموسيقى (B)	SSB	1	MSB
التفاعلات AB	SSAB	1	MSAB
الخطأ	SSRem	6	MSRem
المجموع الكلي	SSTO	15	

(٢٩ ـ ٧) تخطيط تجارب المربع اللاتيني

العدد اللازم من التكررات

يقدِّم تصميم المربع اللاتيني r من التكررات لكـل معالجـة. وبصـورة مشـابهة لما رأيناه في حالة تصميم القطاع التام العشوائي، قد تشير اعتبارات القوة و/أو التقدير إلى أن التكرارات الـ r قليلة جدا ، خاصة عندما يكون r صغيرا ، 3 أو 4، أو 5، مثلا ... ونناقش في الفقـرة(٢٩ ــ ١٠) طريقتـين لزيـادة عـدد التكـرارات في تصميـم المربـع اللاتيني. ومن الضروري في الطريقتين كلتيهما، أن نقوم سلفا بوضع تصور عن مقدار تباين الخطأ التجريبي σ^2 كي نخطط العدد اللازم من التكرارات.

فعالية متغيري التجميع

يمكن تثمين فعاليـة تصميـم المربـع اللاتيـني بالنسـبة إلى التصميـم تـام التعشـية أو بالنسبة لتصميم القطاع التام العشوائي. والفعالية بالنسبة للتصميم تـام التعشـية معرّفـة كمايلي:

$$E_1 = \frac{\sigma_r^2}{\sigma_L^2} \qquad (29.16a)$$

حيث σ_l^2, σ_r^2 هما تباينا الخطأ التجريبي في التصميم تام التعشية وتصميم المربع اللاتيني، على الترتيب. ويمكن قياس الفعالية بالنسبة لتصميم القطاع التام العشوائي بطريقتين، إذ يعتمد القياس على ما إذا كان متغير التجميع في صفوف أو متغير التجميع في أعمدة قد استخدم كمتغير تجميع في قطاعات في تصميم القطاع التام العشوائي:

$$E_2 = \frac{\sigma_{br}^2}{\sigma_L^2} \qquad (29.16b)$$

$$E_3 = \frac{\sigma_{bc}^2}{\sigma_L^2} \qquad (29.16c)$$

حيث $\sigma_{bc}^2, \sigma_{br}^2$ تباينا الخطأ التجريبي في تصميم القطاع التام العشوائي عند استخدام متغير التجميع في صفوف أو متغير التجميع في أعمدة، على الترتيب.

ويمكن تقدير σ_r^L و σ_{br}^2 و σ_{bc}^2 من نتائج تصميم المربع اللاتيني كما يلي:

$$s_r^2 = \frac{MSROW + MSCOL + (r-1)\, MS\, \mathrm{Re}m}{r+1} \qquad (29.17a)$$

$$s_{br}^2 = \frac{MSCOL + (r-1)\, MS\, \mathrm{Re}m}{r} \qquad (29.17b)$$

$$s_{bc}^2 = \frac{MSROW + (r-1)\, MS\, \mathrm{Re}m}{r} \qquad (29.17c)$$

وهكذا يكون القياس التقديري للفعالية:

$$\hat{E}_1 = \frac{MSROW + MSCOL + (r-1)\, MS\, \mathrm{Re}m}{(r+1)\, MS\, \mathrm{Re}m} \qquad (29.18a)$$

$$\hat{E}_2 = \frac{MSCOL + (r-1)\, MS\, \mathrm{Re}m}{r\, MS\, \mathrm{Re}m} \qquad (29.18b)$$

$$\hat{E}_3 = \frac{MSROW + (r-1)\, MS\, \mathrm{Re}m}{r\, MS\, \mathrm{Re}m} \qquad (29.18c)$$

وإذا كان r صغيرا ، فيمكن تعديل قياسات الفعالية مستخدمين (24.15) كي نأخذ في الاعتبار الفروق في عدد درجات الحرية المصاحبة لمتوسطات المربعات المستخدمة في تقدير تبايني الخطأ التجريبي للتصميمين المعنيين:

مثال: في مثال الموسيقى الخلفية نجد، من النتائج في الجدول (٢٩-٤)، القياسات التالية للفعالية:

$$\hat{E}_1 = \frac{20.5+119.3+4(15.7)}{6(15.7)} = 2.2$$

$$\hat{E}_2 = \frac{119.3+4(15.7)}{5(15.7)} = 2.3$$

$$\hat{E}_3 = \frac{20.5+4(15.7)}{5(15.7)} = 1.1$$

ويمكن استخدام (24.15) لتعديل قياسات الفعالية بحيث نأخذ في الاعتبار الفروق في عدد درجات الحرية المصاحبة لمتوسطات المربعات المستخدمة لتقدير تباين الخطأ التجريبي، في التصميمين المعنيين، إلا أن لهذه التعديلات تأثيرا طفيفا هنا.

ويشير تحليل تقديرات الفعالية إلى أن تصميم المربع اللاتيني كان في دراسة الموسيقى الخلفية فعالا بالمقارنة مع التصميم تام التعشية. فسيحتاج هذا الأخير إلى أكثر من ضعف مايحتاجه تصميم المربع اللاتيني من المشاهدات بحيث يكون لتقدير أي متضادة محددة في المعالجات التباين نفسه في التصميمين. وقد اكتُسبت معظم هذه الفعالية من متغير التجميع في أعمدة (أيام ضمن الأسبوع)، لأن فعالية تصميم المربع اللاتيني بالنسبة لتصميم قطاع تام عشوائي كان متغير التجميع فيه هو متغير التجميع في أعمدة هي فعالية زهيدة كونها قريبة من الواحد. وبالتالي ، فقد أُنجز القليل من خلال التجميع في قطاعات وفقا لمتغير التجميع في صفوف (أسبوع).

(٢٩ ـ ٨) أسلوب الانحدار في تصاميم المربع اللاتيني

يمكن التعبير عن النموذج (29.1) لتصميم مربع لاتيني بتأثيرات مثبتة لمتغيري التجميع وللمعالجات وهو:

$$Y_{ijk} = \mu_{\cdot\cdot\cdot} + \rho_i + \kappa_j + \tau_k + \varepsilon_{(ijk)} \qquad (29.19)$$
$$i = 1, \ldots, r\,;\; j = 1, \ldots, r\,;\; k \;\; 1, \ldots, r$$

يمكن التعبير عنه بسهولة في صيغة نموذج انحدار بمتغيرات مؤشرة. كما سبق: سنستخدم المتغيرات المؤشرة 1, 1 ، 0. ويمكن التعبير عن نموذج الانحدار لمثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢٩-٢) حيث $r = 5$، كما يلي:

$$Y_{ijk} = \mu ... + \underbrace{\rho_1 X_{ijk1} + \rho_2 X_{ijk2} + \rho_3 X_{ijk3} + \rho_4 X_{ijk4}}$$

تأثير التجميع في صفوف

$$+ \underbrace{k_1 X_{ijk5} + k_2 X_{ijk6} + k_3 X_{ijk7} + k_4 X_{ijk8}}$$

تأثير التجميع في أعمدة

$$+ \underbrace{\tau_1 X_{ijk9} + \tau_2 X_{ijk10} + \tau_3 X_{ijk11} + \tau_4 X_{ijk12}}$$

تأثير المعالجة

$$+ \varepsilon_{ijk}$$

حيث:

1 إذا كانت الوحدة التجريبية من الفصل 1 للتجميع في صفوف

X_{ijk1} = 1- إذا كانت الوحدة التجريبية من الفصل 5 للتجميع في صفوف

0 فيما عدا ذلك.

ونعرف بصورة مماثلة X_{ijk2}, X_{ijk3} و X_{ijk4}

1 إذا كانت الوحدة التجريبية من الفصل 1 للتجميع في أعمدة

X_{ijk5} = 1- إذا كانت الوحدة التجريبية من الفصل 5 للتجميع في أعمدة

0 فيما عدا ذلك.

ونعرف بصورة مماثلة X_{ijk6}, X_{ijk7} و X_{ijk8}

1 إذا تلقت الوحدة التجريبية المعالجة 1

X_{ijk9} = 1- إذا تلقت الوحدة التجريبية المعالجة 5

0 فيما عدا ذلك

ونعرف بصورة مماثلة X_{ijk10}, X_{ijk11} و X_{ijk12} .

ونبين في الجدول (٢٩ـ٧) متجه المشاهدات Y والمصفوفة X لمثال الموسيقى الخلفية المعطى في الجدول (٢٩ـ٢). ونلاحظ من أجل المشاهدة Y_{235}، مثلا أن: $X_2 = 1$، $X_7 = 1$ ، $X_9 = X_{10} = X_{11} = X_{12} = -1$ ، وجميع المتغيرات X الأخرى تساوي الصفر. وبالتالي لدينا:

$$Y_{235} = \mu ... + \rho_2 + \kappa_3 + \tau_1 - \tau_2 - \tau_3 - \tau_4 + \varepsilon_{(235)}$$

$$= \mu_{...} + \rho_2 + \kappa_3 + \tau_5 + \varepsilon_{(235)}$$

وهو التعبير المناسب عن المشاهدة Y_{235} وفقا لنموذج التحاين (29.19) الخاص بالمربع اللاتيني المستخدم في المثال.

وبالطريقة المعتادة في أسلوب الانحدار ،نقوم بتقدير تأثيرات المعالجات واختبارها.

(٢٩ ـ ٩) مشاهدات مفقودة

تدّمر المشاهدات المفقودة تناظر (تعامد) تصميم المربع اللاتيني وتجعل حسابات التحاين المعتادة غير مناسبة. إلا أن أسلوب الانحدار يبقى، كالمعتاد، مناسبا في حالة مشاهدات مفقودة في تصميم مربع لاتيني. إذ نضع نموذج الانحدار للمشاهدات المتوفرة ثم نقوم بتوفيق النموذج للبيانات. والطريقة مشابهة لتلك التي ناقشناها في الفقرة ٢٥ ـ ٣ في حالة تصميم القطاع التام. ونقوم بالاختبارات بتوفيق النموذج المخفض المناسب للاختبار المطلوب بالإضافة إلى توفيق النموذج التام. ونقوم بتقدير التأثيرات المثبتة للمعالجات بدلالة معاملات الانحدار للنموذج التام وذلك بالطريقة المعتادة.

جدول (٢٩ـ٧) مصفوفات البيانات لنموذج الانحدار (29.10) مثال الموسيقى الخلفية المعطى في الجدول (٢٩ـ٢)

$\mathbf{Y}$	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}
$Y_{114} = 18$	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
$Y_{123} = 17$	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
$Y_{131} = 14$	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
$Y_{142} = 21$	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
$Y_{155} = 17$	1	1	0	0	0	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
$Y_{213} = 13$	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
$Y_{222} = 34$	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
$Y_{235} = 21$	1	0	1	0	0	0	0	1	0	−1	−1	−1	−1
$Y_{241} = 16$	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
$Y_{254} = 15$	1	0	1	0	0	−1	−1	−1	−1	0	0	0	1
$Y_{311} = 7$	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
$Y_{324} = 29$	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
$Y_{332} = 32$	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
$Y_{345} = 27$	1	0	0	1	0	0	0	0	1	−1	−1	−1	−1
$Y_{353} = 13$	1	0	0	1	0	−1	−1	−1	−1	0	0	1	0
$Y_{415} = 17$	1	0	0	0	1	1	0	0	0	−1	−1	−1	−1
$Y_{421} = 13$	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
$Y_{433} = 24$	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
$Y_{444} = 31$	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
$Y_{452} = 25$	1	0	0	0	1	−1	−1	−1	−1	0	1	0	0
$Y_{512} = 21$	1	1	−1	−1	−1	1	0	0	0	0	1	0	0
$Y_{525} = 26$	1	−1	−1	−1	−1	0	1	0	0	−1	−1	−1	−1
$Y_{534} = 26$	1	−1	−1	−1	−1	0	0	1	0	0	0	0	1
$Y_{543} = 31$	1	−1	−1	−1	−1	0	0	0	1	0	0	1	0
$Y_{551} = 7$	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	0	0	0

(٢٩ -١٠) تكرارات إضافية لتصاميم المربعات اللاتينية

الحاجة إلى تكرارات إضافية

كما نوهنا سابقا ، فإن تصميم المربع اللاتيني يقدم r تكرارا لكل معالجة. وإذا أشارت اعتبارات القوة و/ أو التقدير إلى أن هذا العدد من التكرارات قليل جدا ، فهناك طريقتان أساسيتان لزيادة عدد التكرارات ـ التكرارات ضمن الخلايا ومربعات لاتينية إضافية. وسنناقش كلا منهما.

تكرارات ضمن الخلايا

هذه الطريقة في زيادة عدد التكرارات للمعالجة الواحدة هي طريقة ممكنة عندما نستطيع الحصول على وحدتين تجريبيتين أو أكثر من أجل كل خلية يعرفها متغيرا التجميع في صفوف وأعمدة. لنعتبر على سبيل المثال، تجربة يشكل فيها الـ IQ (منخفض، عادي، مرتفع) والعمر (فتى، متوسط العمر، مسنّ) متغيري التجميع. ففي حالة من هذا النوع يمكن الحصول على عنصرين تجريبيين أو أكثر لكل خلية، وعندئذٍ سيتلقى كل من العناصر في خلية المعالجة التي خصصها المربع اللاتيني المستخدم لهذه الخلية.

لنفترض أن n من الوحدات التجريبية تتوفر لكل خلية ،وأن Y_{ijkm} ترمز للمشاهدة الخاصة بالوحدة m $(m = 1,...,n)$ في الخلية (i,j) التي خُصصت لها المعالجة k. فنعدل نموذج التأثيرات المثبتة التجميعي، من أجل n تكرارا في كل خلية كمايلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \rho_i + \kappa_j + \tau_k + \varepsilon_{m(ijk)} \qquad (29.21)$$

حيث:

$\mu_{...}$ ثابت

$\tau_k , \kappa_j , \rho_i$ ثوابت خاضعة للقيود $\Sigma\rho_i = \Sigma\kappa_j = \Sigma\tau_k = 0$

$\varepsilon_{m(ijk)}$ مستقلة و$N(0, \sigma^2)$

$i = 1,...,r$ ، $j = 1,...,r$ ، $k = 1,...,r$ ، $m = 1,...,n$

ويمكن الحصول على مجاميع مربعات التحاين ودرجات الحرية للنموذج (29.21) باستخدام القاعدة (٢٧-٣) في صورتها المعدّلة (27.16) وذلك بسهولة تامة، متذكرين

أن أحد الأدلة i,j,k نافلة. والسبب في أنه لابد هنا من الحصول على مجاميع المربعات الموافقة لحد الخطأ في النموذج كباق، وذلك بالرغم من وجود تكرارات، هو أننا نفترض أن أنواعا مختلفة من حدود التفاعل مساوية للصفر. ومجاميع مربعات المعالجة والصف والعمود هي على الترتيب:

$$SSTR = rn\sum_k(\overline{Y}_{..k.} - \overline{Y}_{....})^2 \quad (29.22a)$$

$$SSROW = rn\sum_j(\overline{Y}_{i...} - \overline{Y}_{....})^2 \quad (29.22b)$$

$$SSCOL = rn\sum_j(\overline{Y}_{.j..} - \overline{Y}_{....})^2 \quad (29.22c)$$

ومجموع المربعات الكلي هو كالمعتاد:

$$SSTO = \sum_i\sum_j\sum_k(Y_{ijkm} - \overline{Y}_{....})^2 \quad (29.22d)$$

بينما نحصل على $SSRem$ كباق:

$$SSRem = SSTO - SSROW - SSCOL - SSTR \quad (29.22e)$$

ولا تتغير درجات الحرية للصف والعمود والمعالجة، ولكن درجات الحرية المصاحبة لِـ $SSRem$ تزداد من $(r-2)$ $(r-1)$ إلى $nr^2 - 3r + 2$، بزيادة قدرها $(n-1)r^2$ درجة حرية.

وتحليل التباين مبين في الجدول (٢٩ـ٨). ويمكن الحصول على توقع متوسط المربعات باستخدام القاعدة (٢٧ ـ ٤) متذكرين أن أحد الأدلة k, j, i نافلة. وإحصاءة الاختبار لاختبار تأثيرات المعالجات هي من جديد $F^* = MSTR/MSRem$.

جدول (٢٩ـ٨) جدول التحاين لتصميم المربع اللاتيني مع n تكرارا في كل خلية

مصدر التغير	SS	df	MS
متغير التجميع في الصفوف	SSROW	$r - 1$	MSROW
متغير التجميع في أعمدة	SSCOL	$r - 1$	MSCOL
معالجات	SSTR	$r - 1$	MSTR
الخطأ	SSRem	$nr^2 - 3r + 2$	MSRem
المجموع الكلي	SSTO	$nr^2 - 1$	

اختبار التجميعية عندما يوجد n تكرارا ضمن خلية في مربع لاتيني، يمكن الحصول على قياس للخطأ البحت بصرف النظر عن صحة التجميعية في النموذج (29.1). ونحصل على مجموع مربعات الخطأ البحت بالطريقة المعتادة:

$$SSPE = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijkm} - \overline{Y}_{ijk.})^2 \qquad (29.23)$$

ويصاحبه $(n-1)r^2$ درجة من الحرية، وهي الزيادة في درجات الحرية المصاحبة لـ $SSRem$ نتيجة وجود n من المشاهدات في كل خلية من المربع اللاتيني. والفرق بين $SSRem$ و $SSPE$ هو انعكاس لنقص التوفيق في النموذج التجميعي:

$$SSLF = SSRem - SSPE \qquad (29.24)$$

ويصاحبه $(r-2)$ $(r-1)$ درجة حرية. ليكن:

$$MSPE = \frac{SSPE}{(n-1)r^2} \qquad (29.25a)$$

$$MSLF = \frac{SSLF}{(r-1)(r-2)} \qquad (29.25b)$$

فعندئذٍ يمكن استخدام:

$$F^* = \frac{MSLF}{MSPE} \qquad (29.26)$$

لاختبار ما إذا كانت التجميعية في النموذج مناسبة.

ويمكن تبيان أنه إذا كان النموذج التجميعي مناسبا ، فإن F^* يتبع التوزيع $F[(r-1)(r-2), (n-1)r^2]$، وتقود القيم الكبيرة لِ F^* إلى استنتاج أن النموذج التجميعي مناسب. ويتضمن الجدول (٢٩-٩) تفكيك $SSRem$ إلى المركبتين $SSLF$ و $SSPE$.

مثال

اضطلعت جامعة حكومية ببرنامج إعادة تأهيل يُنفذ للمرّة الأولى ومصمم لتعليم مهارات تصليح حاسب لأشخاص أزيحوا عن مهنهم السابقة. ويبين الجدول (٢٩-١٠) نتائج تجربة لتقويم تأثيرات ثلاث طرق تشجيعية على درجات الانجاز للمشتركين في البرنامج. ومتغيرا التجميع، هما الـ IQ للمشترك وعمره. وقد نُفّذ تكراران في كل خلية، ويتضمن الجدول (٢٩ـ١٠)أ درجات الانجاز. بينما يتضمن الجدول (٢٩ـ١٠)ب جدول تحليل التباين كما حصلنا عليه من حزمة حاسب.

جدول (٢٩-٩) جدول تحاين لاختبار التجميعية عند وجود n تكرار في كل خلية من خلايا مربع لاتيني.

مصدر التغير	SS	df	MS
متغير التجميع في صفوف	$SSROW$	$r - 1$	
متغير التجميع في أعمدة	$SSCOL$	$r - 1$	
معالجات	$SSTR$	$r - 1$	
الخطأ	$SSRem$	$nr^2 - 3r + 2$	
نقص التوفيق	$SSLF$	$(r - 1)(r - 2)$	$MSLF$
الخطأ البحت	$SSPE$	$(n - 1)r^2$	$MSPE$
المجموع الكلي	$SSTO$	$nr^2 - 1$	

ومن أجل مستوى دلالة $\alpha = .05$ نحتاج إلى $F(.95; 2,9) = 4.26$. وبما أن $F^* = 2.05 \leq 4.26$ ، نستنتج أن النموذج التجميعي (29.21) مناسب. والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0.18. وبناء على هذا الاختبار وعلى رسوم تشخيصية مختلفة تقرّر أن نموذج المربع اللاتيني (29.21) مناسب هنا.

مربعات لاتينية إضافية

لا يمكن الحصول أحيانا على وحدات تجريبية إضافية ضمن خلية. وكانت الحال كذلك، مثلا في مثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢٩–٢)، إذ يمكن عزف نوع واحد من الموسيقى ، فقط، في يوم واحد. وعندما لايكون التكرار ضمن الخلايا ممكنا، يمكن في كثير من الأحيان الحصول على تكرارات إضافية لكل معالجة بإضافة مربع لاتيني أو أكثر لأحد متغيرات التجميع. وفي مثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢٩-٢) ، يمكن تنفيذ التجربة لخمسة أسابيع أخرى. وفي تجربة تستخدم طاقم العمل في منشأة كوحدات تجريبية، ومستخدمين كمتغيري تجميع وردية العمل (صباحية، بعد الظهر، مسائية) وقسم الانتاج (3,2,1) يمكن الحصول على تكرارات إضافية بتنفيذ التجربة في أقسام إنتاج أخرى.

ولاختبار صلاحية النموذج التجميعي، نجد أن إحصاءة الاختبار (29.26) هي هنا:

$$F^* = \frac{MSLF}{MSPE} = \frac{8.2}{4.0} = 2.05$$

ونبين في الجدول (٢٩-١١) مخطط تجربة مثال الموسيقى الخلفية عند تنفيذها فوق خمسة أسابيع أخرى. والمربع اللاتيني الثاني، وغيره في حال الحاجة، يجري اختيارها

بصورة مستقلة.

وكثيرا ما ننظر إلى المربعات اللاتينية الإضافية كصفوف لمتغير تجميعي ثالث. في مثال الموسيقة الخلفية في الجدول (٢٩-١١)، مثلا ، يمكن اعتبار المربعين اللاتينين وكأنهما يشيران إلى متغير التجميع «الدور الزمني». ويمكن النظر إلى الأسابيع الخمسة الأولى كدور زمني أول، والأسابيع الخمسة الثانية كدور زمني ثان.

جدول (٢٩-١٠) مثال عن تصميم مربع لاتيني مع تكرارين في كل خلية - تجربة برنامج إعادة التأهيل

(أ) بيانات

IQ i	عمر (j) مسن	متوسط العمر	فتى
	(C)	(A)	(B)
مرتفع	25	20	19
	21	24	16
	(A)	(B)	(C)
عادي	14	14	24
	14	15	22
	(B)	(C)	(A)
منخفض	7	12	10
	4	13	14

(ب) تحليل تباين

مصدر التغير	SS	df	MS
IQ	364.3	2	182.2
عمر	34.3	2	17.2
معالجات	147.0	2	37.5
الخطأ	52.4	11	4.76
نقص التوفيق	16.4	2	8.2
الخطأ البحت	36.0	9	4.0
المجموع الكلي	598.0	17	

وكمثال آخر، فإن أقسام الانتاج في تجربة أطقم المنشأة المذكورة آنفا ، يمكن أن تكون في المربع اللاتيني الأول على أساس ساعة العمل، بينما تكون في المربع اللاتيني الثاني على أساس الانتاجية كما هو مبين في الجدول (٢٩ـ١٢). وهكذا، ومع مربعات لاتينية إضافية، يمكن في الواقع إدخال متغير تجميع ثالث. وكنتيجة لذلك ، يمكن إزاحة التشتت المرافق لمتغير التجميع الثالث من تشتت الخطأ التجريبي. وبالإضافة إلى ذلك، يمكن دراسة التفاعلات بين متغير التجميع الثالث والمتغيرات الأخرى، ولاينبغي افتراض أن هذه التفاعلات غير موجودة.

جدول (٢٩ـ١١) تصميم بمربعين لاتينيين ـ مثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢٩ـ١١).

أسبوع	مربع	اليوم				
		M	*T*	*W*	*Th*	*F*
	1	*D*	*C*	*A*	*B*	*E*
	2	*C*	*B*	*E*	*A*	*D*
1	3	*A*	*D*	*B*	*E*	*C*
	4	*E*	*A*	*C*	*D*	*B*
	5	*B*	*E*	*D*	*C*	*A*
	6	*E*	*D*	*C*	*A*	*B*
	7	*B*	*A*	*E*	*D*	*C*
2	8	*D*	*C*	*A*	*B*	*E*
	9	*A*	*E*	*B*	*C*	*D*
	10	*C*	*B*	*D*	*E*	*A*

وعند استخدام n من المربعات اللاتينية المستقلة، الممثلة لمتغير تجميعي ثالث، مع العدد نفسه من الصفوف ومن الأعمدة في كل مربع لاتيني، فإن النموذج الذي يسمح بوجود تفاعلات بين المتغير التجميعي الثالث ومتغيري التجميع في صفوف وأعمدة، وبينه وبين المعالجات، هو كما يلي:

$$Y_{ijkm} = \mu_{...} + \rho_i + k_j + \tau_k + \delta_m + (\rho\delta)_{im} + (k\delta)_{jm} + (\tau\delta)_{km} + \varepsilon_{(ijkm)} \quad (29.27)$$

حيث:

μ... ثابت.

$\delta_m , \tau_k , \kappa_j , \rho_i$ ثوابت خاضعة للقيود.

$$\sum\rho_i = \sum\kappa_j = \sum\tau_k = \sum\delta_m = 0$$

$(\tau\delta)_{km} , (\kappa\delta)_{jm} , (\rho\delta)_{im}$ خاضعة للقيود:

$$\sum_i(\rho\delta)_{im} = \sum_m(\rho\delta)_{im} = \sum_j(\kappa\delta)_{jm} = 0$$

$$\sum_m(\kappa\delta)_{jm} = \sum_j(\tau\delta)_{km} = \sum_m(\tau\delta)_{km} = 0$$

$\varepsilon_{(ijkm)}$ مستقلة و $N(0,\sigma^2)$.

$m = 1,...,n; k = 1,...,r; j = 1,...,r; i = 1,...,r$.

لاحظ أن δ_m يرمز لتأثير متغير التجميع الثالث. والتأثيرات الرئيسة الأخرى معرفة كماسبق.

جدول (٢٩-١٢) تصميم مربعين لاتيني - تجربة أطقم العمل في منشأة

مربع	قسم الانتاج	وردية صباحا	وردية بعد الظهر	وردية مساء
	1	C	B	A
١- الدفع على أساس الساعة	2	B	A	C
	3	A	C	B
	4	A	B	C
٢- الدفع على أساس الانتاجية	5	C	A	B
	6	B	C	A

ويمكن أن تكون شروط النموذج (29.27) مناسبة لمثال الموسيقى الخلفية في الجدول (٢٩-١١). وهناك قد يكون من المناسب أحيانا اتخاذ الصفوف لتشير إلى موقع الأسبوع ضمن فترة زمنية من خمسة أسابيع، والأعمدة لتشير إلى موقع اليوم ضمن الأسبوع، ومتغير التجميع الثالث ليشير إلى الفترة الزمنية من السنة.

ويبين الجدول (٢٩-١٣) تحليل التباين لنموذج n من المربعات المستقلة (29.27). ويمكن الحصول على مجاميع المربعات ودرجات الحرية باستخدام القاعدة (٢٧-٣) في

صورتها المعدلة (27.16)، تذكّر عند استخدام هذه القاعدة أن أحد الأدلة k, j, i دليل نافلة أو دليل احتياطي. ولا بد من الحصول على مجموع المربعات المقابل لحد الخطأ في النموذج الخطأ على شكل "باقي" إذ لا توجد هنا تكرارات ضمن الخلايا وافتُرض أن بعض التفاعلات تساوي الصفر. ويمكن الحصول على توقع متوسط المربعات باستخدام القاعدة (٢٧-٤)، متذكّرين ثانية أن أحد الأدلّة k, j, i ناقلة.

تكرارات في دراسات القياسات المتكررة

نوهنا سابقا أن تصميم المربع اللاتيني مناسب جدا لدراسة قياسات متكررة عندما يوجد r من المعالجات و r من العناصر. وإذا احتجنا لتكرارات إضافية، فلا يمكن استخدام التكرارات ضمن خلية، لأن الخلية تتعلق بعنصر بمفرده وبدلا من ذلك، يمكن استخدام تصاميم المربع اللاتيني الناقلة، أو المربعات اللاتينية المستقلة.

جدول (٢٩-١٣) جدول تباين عند استخدام n من المربعات اللاتينية بالصفوف والأعمدة نفسها مع إمكانية وجود تفاعلات مع متغير تجميع ثالث.

مصدر تغير	SS	df
متغير تجميع صف	*SSROW*	$r - 1$
متغير تجميع عمود	*SSCOL*	$r - 1$
معالجات	*SSTR*	$r - 1$
متغير تجميع ثالث	*SS3*	$n - 1$
تفاعلات الصف ومتغير التجميع الثالث	*SS3.ROW*	$(n - 1)(r - 1)$
تفاعلات العمود ومتغير التجميع الثالث	*SS3.COL*	$(n - 1)(r - 1)$
تفاعلات المعالجات ومتغير التجميع الثالث	*SS3.TR*	$(n - 1)(r - 1)$
الخطأ	*SSRem*	$n(r - 1)(r - 2)$
المجموع الكلي	*SSTO*	$nr^2 - 1$

تصاميم مربع لاتيني ناقلة هذه التصاميم، وتسمى، أيضا، تصاميم مربع لاتيني تحويلية، هي تصاميم مفيدة غالبا عندما نريد استخدام مربعات لاتينية في دراسة قياسات متكررة لإقامة توازن بالنسبة لموضع الترتيب لمعالجة، علما أن ذلك يستدعي توفر عناصر أكثر مما هو مطلوب في حالة مربع لاتيني بمفرده. ومع هذا النوع من

التصميم، تُخصص العناصر عشوائيا إلى الأنماط المختلفة من ترتيب المعالجات التي يقدمها المربع اللاتيني (يمكن أحيانا استخدام عدة مربعات لاتينية). لنعتبر تجربة نريد فيها تطبيق المعالجات A ، B و C كل عنصر، وأنماط الترتيب المختلفة للمعالجات معطاة بالمربع اللاتيني:

النمط	موضع الترتيب 1	2	3
1	*A*	*B*	*C*
2	*B*	*C*	*A*
3	*C*	*A*	*B*

ولنفترض توافر $3n$ من العناصر لهذه الدراسة . فعندئذٍ سنخصص n من العناصر عشوائيا لكل من أنماط الترتيب الثلاثة في تصميم مربع لاتيني ناقل. لاحظ أن هذا التصميم خليط من قياسات متكررة (ضمن العناصر) ومربع لايتيني (أنماط الترتيب تشكل مربعا لاتينيا).

وبافتراض أن جميع التأثيرات تجميعية ومثبتة، باستثناء أن تأثيرات العناصر عشوائية، يمكن تطوير نموذج بسيط نسبيا لتصاميم المربع اللاتيني الناقلة، وذلك من أجل r من المعالجات و n من العناصر لكل نمط ترتيبي. ويرمز ρ_i في النموذج التالي لتأثير النمط الترتيبي للمعالجة i، κ_j يرمز لتأثير الموضع الترتيبي j، τ_k يرمز لتاثير المعالجة k، ويرمز $\eta_{m(i)}$ لتأثير العنصر m وهو محضًن ضمن النمط الترتيبي للمعالجة i:

$$Y_{ijkm} = \mu_{\dots} + \rho_i + \kappa_j + \tau_k + \eta_{m(i)} + \varepsilon_{(ijkm)} \qquad (29.28)$$

حيث:

$\mu_{\dots}$ ثابت.

ρ_i , κ_j , τ_k ثوابت خاضعة للقيود: $\Sigma\rho_i = \Sigma\kappa_j = \Sigma\tau_k = 0$

$\gamma_{m(i)}$ مستقلة و $N(0, \sigma_\eta^2)$

$\varepsilon_{(ijkm)}$ مستقلة و $N(0, \sigma^2)$ ومستقلة عن $\gamma_{m(i)}$.

$m = 1,\dots,n;\ k = 1,\dots,r\ ;\ j = 1,\dots,r\ ;\ i = 1,\dots,r$

ويمكن الحصول على مجاميع مربعات تحليل التباين ودرجات الحرية لهذا النمـوذج باستخدام القاعدة (٢٧ - ٣) في صورتها المعدّلة (27.16)، تذكّر عنـد استخدام هـذه القاعدة أن أحد الأدلة k, j, i نافلة. ومن جديد يجب الحصـول على مجمـوع المربعـات الموافـق لحـد الخطأ في النمـوذج كبـاقٍ، إذ لاتوجـد تكـرارات ضمـن الخلايـا في هـذا التصميم. وتتبع صيغ مجاميع المربعات النمط المعتـاد. ومجـاميع المربعـات التعريفيـة هـي كما يلي:

$$SSTO = \sum_i \sum_j \sum_m (Y_{ijkm} - \bar{Y}_{...})^2 \quad (29.29a)$$

$$SSP = nr \sum_i (\bar{Y}_{i...} - \bar{Y}_{...})^2 \quad (29.29b)$$

$$SSO = nr \sum_j (\bar{Y}_{.j..} - \bar{Y}_{...})^2 \quad (29.29c)$$

$$SSTR = nr \sum_k (\bar{Y}_{..k.} - \bar{Y}_{...})^2 \quad (29.29d)$$

$$SSS = r \sum_i \sum_m (\bar{Y}_{i..m} - \bar{Y}_{i...})^2 \quad (29.29e)$$

$$SSRem = SSTO - SSP - SSO - SSTR - SSS \quad (29.29f)$$

و SSP هنا هو مجموع مربعات النمط (المعالجة) SSO هو مجموع مربعات موضع الترتيب، ولمجاميع المربعات الأخرى معانيها المعتادة.

ويحتوي الجدول (٢٩ـ١٤) على جـدول التحـاين. ويمكـن الحصـول على توقـع متوسط المربعات باستخدام القاعدة (٢٧ـ٤)، متذكرين أن أحد الأدلة i، j، k نافلة.

مثال. يتضمن الجدول (٢٩ـ١٥)أ بيانـات لدراسـة تأثيرات ثلاثـة طرق عـرض مختلفة على مبيعات التفاح، مستخدمين تصميم المربع اللاتيـني النـاقل. اسـتخدمنا سـتة محلات تجارية، وخصصنا عشوائيا محلين لكل مـن الأنمـاط الترتيبيـة المبينـة للمعالجـات الثلاث. وقد استمرت كل طريقة عرض لمدة أسبوعين، والمتغير الملحـوظ كـان مقـدار المبيعات لكل مائة زبون. ويتضمن الجدول (٢٩ـ١٥)ب تحليل التباين وقد حصلنا على مجاميع المربعات من تشغيلة للحاسب.

ولاختبار تأثيرات المعالجات نستخدم:

$$F^* = \frac{MSTR}{MS\,\text{Rem}} = \frac{94.5}{2.54} = 37.2$$

ومن أجل $\alpha = .05$، نحتاج إلى $F(.95; 2,8) = 4.46$. وبما أن $F^* = 37.2 > 4.46$، فنستنتج وجود تأثيرات مختلفة لطرق العرض الثلاث على المبيعات. والقيمة -P لهذا الاختبار هي 0^+. وكذلك قمنا ، أيضا، باختبار تأثيرات الأنماط وتأثيرات موضع الترتيب، وتأثيرات المحلات. وقد اشارت الاختبارات إلى وجود تاثيرات لموضع الترتيب، و لم تشر إلى وجود تأثيرات للأنماط أو للمحلات. وتتفق مواضع الترتيب هنا مع الفترات الزمنية الثلاث التي دُرست فيها طرق العرض، ويمكن لها أن تعكس تاثيرات موسمية بالإضافة إلى نتائج أحداث أو وقائع خاصة، مثل وجود طقس حار بصورة غير عادية في أحد الفترات.

جدول (٢٩-١٤) جدول تحاين لتصميم مربع لاتيني ناقل

مصدر التغير	SS	df	MS	$E\{MS\}$
الأنماط	SSP	$r-1$	MSP	$\sigma^2 + r\sigma_\eta^2 + nr\frac{\Sigma\rho_i^2}{r-1}$
تواضع الترتيب	SSO	$r-1$	MSO	$\sigma^2 + nr\frac{\Sigma\kappa_j^2}{r-1}$
المعالجات	$SSTR$	$r-1$	$MSTR$	$\sigma^2 + nr\frac{\Sigma\tau_k^2}{r-1}$
عناصر (ضمن الأنماط)	SSS	$r(n-1)$	MSS	$\sigma^2 + r\sigma_\eta^2$
الخطأ	$SSRem$	$(r-1)(nr-2)$	$MSRem$	σ^2
المجموع الكلي	$SSTO$	nr^2-1		

استخدام مربعات لاتينية مستقلة

إذا لم تكن تأثيرات مواضع الترتيب ثابتة تقريبا من أجل جميع العناصر (محلات، إلخ). فلا يكون التصميم الناقل فعالا. وقد يكون من المفضل عندئذٍ وضع العناصر في مجموعات متجانسة بالنسبة لتأثيرات مواضع الترتيب ثم استخدم مربعات لاتينية مستقلة لكل مجموعة. فلنفترض أننا نزيد تطبيق أربع معالجات، كل منها على ثمانية عناصر، أربعة ذكور وأربع إناث، ويتوقع المجرب أن تأثير التعب سيكون قويا بالنسبة للإناث ومعتدلا، فقط، للذكور. فمن المستحسن عندئذٍ استخدام مربعين لاتينين مستقلين، أحدهما لعناصر الذكور والآخر لعناصر الإناث.

جدول (٢٩-١٥) تصميم مربع لاتيني ناقل - مثال مبيعات التفاح

(أ) البيانات (مرمزّة)

نمط i	محل	فترة أسبوعين (j) 1	2	3
1	$m = 1$	9(B)	12(C)	15(A)
	$m = 2$	4(B)	12(C)	9(A)
2	$m = 1$	12(A)	14(B)	3(C)
	$m = 2$	13(A)	14(B)	3(C)
3	$m = 1$	7(C)	18(A)	6(B)
	$m = 2$	5(C)	20(A)	4(B)

(ب) تحليل تباين

مصدر التغير	SS	df	MS
أنماط	.33	2	.17
مواضع الترتيب	233.33	2	116.67
طرق العرض	189.00	2	94.50
محلات (ضمن الأنماط)	21.00	3	7.00
الخطأ	20.33	8	2.54
المجموع الكلي	464.0	17	

جدول (٢٩-١٦): توضيح لتصميم مربع لاتيني ناقل مضاعف

نمط i	محل	فترة أسبوعين 1	2	3
1	1	A	B	C
	2	B	C	A
	3	C	A	B
2	4	A	C	B
	5	B	A	C
	6	C	B	A

تأثيرات محمولة. عندما نتوقع وجود تأثيرات محمولة من معالجة إلى أخرى، أي إذا لم يكن هناك تأثير لموضع الترتيب ،فقط، بل للمعالجة السابقة، أيضا ، فيمكن موازنة هذه التأثيرات المحمولة باختيار مربع لاتيني تكون فيه كلُّ معالجةٍ لاحقة لكلٍّ معالجةٍ أخرى عددا متساويا من المرات. وكمثال على مربع لاتيني من هذا النوع في حالة $r = 4$ نجد:

عنصر	فترة 1	2	3	4
1	A	B	D	C
2	B	C	A	D
3	C	D	B	A
4	D	A	C	B

ونلاحظ أن المعالجة A تتبع كلا من المعالجات الأخرى مرة واحدة، وكذلك الأمر بالنسبة لبقية المعالجات. وهذا التصميم مناسب للحالات التي لاتستمر فيها التأثيرات المحمولة لأكثر من فترة زمنية واحدة.

وعندما يكون r فرديا يمكن الوصول إلى توازن في التتابع باستخدام زوج من المربعات اللاتينية يتميز بأن تتابع المعالجات في أحدهما معاكس لتتابعها في الآخر.

وفي الحقيقة، من المستحسن عادة استخدام زوج كهذا من المربعات، حتى لو كان r زوجيا ، وذلك كي يصبح عدد درجات الحرية المصاحبة لـ *MSRem* كبيرا بصورة معقولة. ويدعى تصميم كهذا أحيانا تصميم مربع لاتيني ناقل مضاعف. ويحتفظ هذا النوع من التصميم بمزايا استخدام متغيري تجميع في مربع لاتيني، ويسمح للمجرب، في الوقت نفسه، بموازنة وقياس التأثيرات المحمولة.

وفي توضيح عرض التفاح المذكور سابقا حيث درسنا ثلاث طرق عرْض في ستة محلات، يمكن أن يكون المربعان اللاتينيان كما هو مبين في الجدول (٢٩ـ١٦) وينبغي تقسيم المحلات أولا إلى مجموعتين، ثمَّ تخصيصها عشوائيا إلى المربعين اللاتينين.

(٢٩ـ١١) تأثيرات عشوائية لمتغير تجميع

إذا كان ينبغي النظر إلى فصول متغير تجميع في صفوف أو في أعمدة على أنها اختيار عشوائي من مجتمع، فلا يعود نموذج المربع اللاتيني بتأثيرات مثبتة (29.1) قابلا للتطبيق.

متغيرا التجميع كلاهما عشوائيان

لنعتبر الحالة التي يكون فيها متغير التجميع في صفوف عنصرا ، ومتغير التجميع في أعمدة مشاهدا ، ويُنظر إلى العناصر والمشاهدين الذين تشملهم الدراسة كعينتين عشوائيتين من مجتمعين مناسبين. ففي هذه الحالة، ومفترضين تأثيرات مثبتة للمعالجات، يكون النموذج التجميعي لتصميم مربع لاتيني كمايلي:

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \rho_i + \kappa_j + \tau_k + \varepsilon_{(ijk)} \qquad (29.30)$$

حيث:

$\mu_{...}$ ثابت.

ρ_i مستقلة و$N(0,\ \sigma_\rho^2)$

κ_j مستقلة و $N(0,\sigma_\kappa^2)$

τ_k ثوابت خاضعة للقيد $\Sigma\tau_k = 0$

$\varepsilon_{(ijk)}$ مستقلة و$N(0,\ \sigma^2)$

ρ_i، κ_j، و$\varepsilon_{(ijk)}$ مستقلة مثنى مثنى.

$k = 1,...,r;\ j = 1,...,r,\ \ i = 1,...,r$.

ويبقى تحليل التباين كما كان في نموذج تأثيرات مثبتة لمتغيري التجميع. ونحصل هنا على توقع متوسط المربعات لمتغيري التجميع بوضع حدود التباين، بدلا من مجاميع مربعات التأثيرات مقسومة على درجات الحرية، في الجدول (٢٩-٣). وبعد ذلك نقوم بجميع اختبارات وتقديرات تأثيرات المعالجات كما لو كانت تأثيرات متغيري التجميع مثبتة.

أحد متغيري التجميع عشوائي والآخر مثبت.

عندما يكون لأحد متغيري التجميع تأثيرات عشوائية وللآخر تأثيرات مثبتة، يصبح النموذج التجميعي بتأثيرات مثبتة للمعالجات خليطا من النموذجين (29.1) و(29.30). ومن جديد سوف لايوجد تغيير في تحليل التباين أو في اختبارات وتقديرات تأثيرات المعالجات؟ وكمثال يكون فيه هذا النموذج المختلط مناسبا ،

نذكر دراسة قياسات متكررة، يكون فيها متغير التجميع في صفوف عنصرا ، ومتغير التجميع في أعمدة هو موضع الترتيب للمعالجة.

(٢٩-١٢) مربعا يودين واللاتيني الإغريقي.

عندما لا يمكن استخدام تصميم المربع اللاتيني لأن عدد فصول الأعمدة أقل من عدد فصول الصفوف، فسيكون تصميم مربع يودين مفيدا . لنعتبر دراسة قياسات متكررة تشمل أربع معالجات وأربعة عناصر (متغير تجميع الصفوف). لنفترض الآن إمكانية إعطاء العنصر ثلاث معالجات، فقط، بسبب تأثيرات تعب جدّية، وبالتالي لايمكن أن يكون لمتغير التجميع في أعمدة (موضع الترتيب للمعالجات) إلا ثلاثة فصول. ونبين في الجدول (٢٩-١٧) تصميم مربع يودين المناسب لحالة كهذه. لاحظ أن هذا المخطط سيصبح مربعا لاتينيا بإضافة العمود (A, B, C, D). ولاحظ، أيضا، أن كل معالجة تقع مرة واحدة في كل موضع ترتيب، وأن كل زوج من المعالجات تظهران معا عددا متساويا من المرات ضمن العناصر. وهذه خواص متوفرة في كل مربعات يودين. وتحليل تصاميم مربع يودين أكثر تعقيدا من تحليل المربعات اللاتينية، إذ لاتُطبق جميع المعالجات في كل فصل من فصول متغير التجميع في صفوف. وتنبغي العودة إلى مرجع كالمرجع 29.1 عند استخدام تصميم مربع يودين.

جدول (٢٩-١٧) توضيح لتصميم مربع يودين الوضع المرتّب للمعالجة، العنصر

عنصر	معالجة وضع مرتب 1	2	3
1	A	B	C
2	D	A	B
3	C	D	A
4	E	C	C

وتصميم المربع اللاتيني - الإغريقي هو امتداد لتصميم المربع اللاتيني، وذلك عند الحاجة إلى استخدام ثلاثة متغيرات تجميع في الوقت نفسه. ويوضح الجدول (٢٩-١٨) تصميم مربع لاتيني - إغريقي في حالة $r = 4$ ، وتمثل الرموز δ و $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ المستويات الأربعة لمتغير تجميع ثالث. وهكذا فإن الخلية المقابلة للفصل الأول لكلٍ من متغيرات التجميع الثلاثة ستتلقى المعالجة A، وهكذا.

	متغير تجميع في أعمدة			
متغير تجميع في صفوف	1	2	3	4
1	$\alpha:A$	$\beta:B$	$\gamma:C$	$\delta:D$
2	$\beta:C$	$\alpha:D$	$\delta:A$	$\gamma:B$
3	$\delta:B$	$\gamma:A$	$\beta:D$	$\alpha:C$
4	$\gamma:D$	$\delta:C$	$\alpha:B$	$\beta:A$

ونلاحظ أن مستويات متغير التجميع الثالث تظهر مرة في كل صف ومرة في كل عمود، وأنها تظهر مرة واحدة ، فقط، مع كل معالجة. وفي التطبيق العملي تُستخدم تصاميم المربع اللاتيني ـ الاغريقي أقل بكثير من استخدام التصاميم الأخرى التي ناقشناها. ويناقش المرجع [29.1] تحليل تصاميم المربع اللاتيني ـ الإغريقي.

مراجع ورد ذكرها

[29.1] Cochran, W.G., and G.M. Cox, *Experimental Designs*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1957.

مسائل

(٢٩-١) شرح عالم في العلوم السلوكية سبب الاستخدام الواسع لتصاميم المربع اللاتيني: «في كثير من الأحيان نحتاج في العلوم السلوكية إلى استخدام تصاميم قياسات متكررة. وذلك لأن التشتت كبير بين العناصر البشرية. وبما أنه قد يوجد تأثير للترتيب في هذه الحالة، فإننا نستخدم تصاميم المربع اللاتيني لإلغاء أي انحياز يعود إلى تأثيرات الترتيب» علّق.

(٢٩-٢) أ ـ مستخدما تباديل عشوائية، اختر عشوائيا مربعا لاتينيا 3× 3 . اعرض جميع الخطوات.

ب ـ مستخدما تباديل عشوائية، اختر عشوائيا مربعا لاتينيا 6×6. اعرض جميع الخطوات.

(٢٩-٣) **مبيعات الأدوات المعدنية.** نفذ رجل صناعة دراسة استطلاعية صغيرة لتأثير سعر أحد منتجاته على مبيعات هذا المنتج في محلات الخردوات (محلات بيع الأدوات المعدنية). وبما أن الانتقال المتكرر من سعر إلى آخر ضمن المحل نفسه يمكن أن يلتبس على العملاء، فقد استُخدم سعر واحد، فقط، في مخزن

واحد خلال فترة الدراسة وهي ستة شهور. وقد استُخدم 16 محلا في الدراسة. ولتخفيض تشتت الخطأ التجريبي بحيث يتوفر محل واحد لكل حجم مبيعات ـ فصل من فصول الموقع الجغرافي، فقد خُصصت مستويات الأسعار الأربعة (A: \$ 1.79, B: \$ 1.69, D: \$ 1.49, C: \$ 1.59) إلى المحلات وفقا لتصميم المربع اللاتيني المبين أدناه. وفيما يلي بيانات المبيعات (بآلاف الدولارات) خلال فترة الستة أشهر:

فصل الموقع الجغرافي (j)

جنوب غرب	جنوب شرق	شمال غرب	شمال شرق	حجم المبيعات i
1.7(D)	1.0(A)	1.5(C)	1.2(B)	الأصغر 1
1.5(C)	1.6(B)	1.9(A)	1.4(A)	2
2.0(A)	2.7(D)	2.1(C)	2.8(C)	3
2.7(C)	2.9(C)	2.5(A)	3.4(D)	الأكبر 4

أ ـ أوجد الرواسب لنموذج المربع اللايتيني (29.1) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية لخص نتائجك حول صلاحية النموذج (29.1) هنا.

ب ـ نفذ اختبار توكي للتجميعية. استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة، ماهي القيمة ـP للاختبار.

(٢٩ـ٤) بالإشارة إلى **مسألة مبيعات الأدوات المعدنية** (٢٩ـ٣). افترض أن نموذج المربع اللاتيني (29.1) مناسب.

أ ـ جهّز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدّرة للمعالجات. ماذا يقترح الرسم حول تأثيرات المستويات الأربعة للأسعار على المبيعات.

ب ـ اختبر ما إذا كانت مستويات الأسعار تؤثر في حجم المبيعات. استخدم مستوى معنوية $\alpha = .05$. اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة، ماهي القيمة ـP للاختبار؟.

جـ ـ حلل طبيعة تأثير السعر على المبيعات عن طريق القيام بمقارنات ثنائية بين متوسطات المعالجات. استخدم طريقة توكي ومعامل ثقة عائلي 90 بالمائة. لخص نتائجك.

د ـ هل يبدو أن هناك علاقة خطية بين مستوى السعر ومتوسط المبيعات؟ هل يمكنك أن تختبر رسميا وجود العلاقة الخطية؟ اشرح.

(٢٩ ـ ٥) بالإشارة إلى مسألتي **مبيعات الأدوات المعدنية** (٢٩-٣) و(٢٩-٤).

أ ـ احسب المقاييس الثلاثة للفعالية المقدّرة في (29.18)

ب ـ هل كان تصميم القطاع العشوائي سيكون مناسبا هنا؟ وإذا كان الأمر كذلك، فما هو متغير التجميع الأفضل؟.

(٢٩-٦) **تقارير موجزة.** قامت استشارية نظم معلومات إدارية بدراسة محدودة لخمسة تقارير يومية موجزة (*A*: أكبر قدر من التفاصيل، *E, D, C, B*: أقل قدر من التفاصيل). وقد استخدمت خمسة مندوبي مبيعات في الدراسة. وقد أُعطي نوعا واحدا من التقارير اليومية لمدة شهر ثم طُلب منه أن يضع رتبة تصنيف لفائدة التقرير على سلّم 25 درجة. (0: لافائدة، 25: مفيد للغاية). وفوق فترة خمسة أشهر، استلم كل مندوب نوعا من التقارير لمدة شهر وذلك وفقا لتصميم المربع اللاتيني المبين أدناه. وفيما يلي الدرجات التي تمثل رتبة التصنيف المعطاة لفائدة التقرير.

	شهر (*j*)				
مندوب (*i*)	آذار	نيسان	أيار	حزيران	تموز
هاريسون	21(*D*)	8(*A*)	17(*C*)	9(*B*)	16(*E*)
سميث	5(*A*)	10(*E*)	3(*B*)	12(*C*)	15(*D*)
كار ميكائيل	20(*C*)	10(*B*)	15(*E*)	22(*D*)	12(*A*)
لويب	4(*B*)	17(*D*)	3(*A*)	9(*E*)	10(*C*)
مونش	17(*E*)	16(*C*)	20(*D*)	7(*A*)	11(*B*)

أ ـ أوجد الرواسب لنموذج المربع اللاتيني (29.1) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهز، أيضا، احتمال طبيعي للرواسب واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. لخص نتائجك حول صلاحية النموذج (29.1) هنا.

ب ـ نفذ اختبار توكي للتجميعية؛ استخدم $\alpha = .05$. اعرض البدائل، قاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟.

(٢٩ـ٧) بالإشارة إلى مسألة **التقارير الموجزة** (٢٩ـ٦). افترض أن نموذج المربع اللاتيني (29.1) مناسب.

أ ـ جهز رسم احتمال طبيعي للمتوسطات المقدرة للمعالجات. ماذا يقترح الرسم حول تأثيرات الأنواع الخمسة من التقارير.

ب ـ اختبر ما إذا كانت الأنواع الخمسة من التقارير تختلف في متوسط فائدتها؛ استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟

جـ ـ حلل فعالية الأنواع الخمسة من التقارير بالقيام بجميع المقارنات الثنائية بين متوسطات المعالجات. استخدم طريقة توكي ومعامل ثقة عائلي 95 بالمائة. لخص نتائجك.

(٢٩ـ٨) بالإشارة إلى مسألتي **التقارير الموجزة** (٢٩ـ٦)، (٢٩ـ٧).

أ ـ احسب المقاييس الثلاثة للفعالية المقدَّرة في (29.18).

ب ـ كم كان استخدام تصميم المربع اللاتيني هنا فعالا ؟.

(٢٩ـ٩) بالإشارة إلى مسألتي **مبيعات المواد المعدنية** (٢٩ـ٦)، (٢٩ـ٧). افترض أن $\sigma = .15$.

ماهي قوة اختبار تأثيرات المعالجات في المسألة (٢٩ـ٤)ب إذا كان $\tau_1 = -.04$، $\tau_2 = 0$، $\tau_3 = .1$، و$\tau_4 = .3$؟.

(٢٩ـ١٠) بالإشارة إلى مسألتي **التقارير الموجزة** (٢٩ـ٦)، (٢٩ـ٧). افترض أن $\sigma = 1.4$.

ماهي قوة اختبار تأثيرات المعالجات في المسألة (٢٩ـ٧)ب إذا كان $\tau_1 = -2$، $\tau_2 = -1, \tau_3 = 0, \tau_4 = 1.5, \tau_5 = 1.5$؟.

(٢٩ـ١١) **تفاعل عقارين.** تمّت دراسة استطلاعية حول تأثيرات تفاعل عقارين لحفز النمو في فتيات قصيرات القامة نتيجة لتناذر معين. ومن المعروف أن تأثير كل عقار بمفرده هو تأثير متواضع، إلا أن المركب من العقارين معا لم يدرس سابقا أبدا. وكان من المرغوب التجميع وفقا لكل من العنصر والفترة الزمنية، وقد تم وفقا لذلك الحصول على قياسات متكررة للمعالجات المختلفة مطبقة على العنصر نفسه. وقد استُخدم تصميم المربع اللاتيني 4×4، المبين أدناه، ومن أجل أربعة عناصر، وأربع فترات زمنية، وأربع معالجات. وتألفت الفترات الزمنية الأربع من شهر واحد لكل منها، مفصولة بشهر لم تعط خلاله أي معالجة. وكانت المعالجات الأربع، A: لامعالجة (بلاسيبو)، B: العقار X لوحده، C: العقار Y لوحده، D: العقاران X و Y معا. وكان المتغير التابع هو الفرق بين معدلي النمو (بالسنتمتر للشهر الواحد) خلال فترة المعالجة والفترة الأساس قبل بدء المعالجة. وفيما يلي نتائج الدراسة:

العنصر i	الفترة (j) 1	2	3	4
1	.02(A)	.15(B)	.45(D)	.18(C)
2	.27(B)	.24(C)	-.01(A)	.58(D)
3	.11(C)	.35(D)	.14(B)	-.03(A)
4	.48(D)	.04(A)	.18(C)	.22(B)

أ ـ أوجد الرواسب في (29.5) وارسمها مقابل القيم التوفيقية. جهز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. لخص نتائجك.

ب ـ نفذ اختبار توكي للتجميعية، مفترضا أن جميع التأثيرات مثبتة ومتجاهلا البنية العاملية للمعالجات؟ استخدم $\alpha = .05$. اعرض البدائل ، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟.

(٢٩ـ١٢) بالإشارة إلى مسألة **تفاعل عقارين** (٢٩ـ١١). افترض أن نموذج المربع اللاتيني (29.1) مناسب، بعد تعديله بحيث يكون للعناصر تأثيرات عشوائية

واستيعاب بنية عاملية للمعالجات (العامل: A، العقار X: العامل B: العقار Y).

أ ـ اعرض النموذج الذي سيُستخدم.

ب ـ اختبر تأثيرات التفاعل بين العقارين . استخدم $\alpha = .15$. اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة . ماهي القيمة ـP للاختبار؟.

جـ ـ قدر متضادة التفاعل:

$$L=\left(\frac{\mu_{.2}+\mu_{.3}}{2}-\mu_{.1}\right)-\left(\mu_{.4}-\frac{\mu_{.2}+\mu_{.3}}{2}\right)=\mu_{.2}-\mu_{.1}-\mu_{.4}+\mu_{.3}$$

مستخدما معامل ثقة 90%. فسر نتيجتك.

(٢٩-١٣) بالإشارة إلى مسألة **مبيعات المواد المعدنية** (٢٩-٣).

أ ـ ضع نموذج انحدار مكافئ لنموذج المربع اللاتيني (29.1) مستخدما 0,-1,1 كمتغيرات مؤشرة.

ب ـ اختبر باستخدام أسلوب الانحدار ما إذا كان مستوى السعر يؤثر في متوسط المبيعات. استخدم $\alpha = .05$. اعرض البدائل، وقاعدة القرار والنتيجة.

جـ ـ أوجد باستخدام اسلوب الانحدار 95 بالمائة فترة ثقة لـ $D = \tau_3 - \tau_4$. فسر تقديرك بفترة.

د ـ لنفترض أن المشاهدة $Y_{232} = 1.6$ مفقودة.

(i) استخدم أسلوب الانحدار لاختبار ما إذا كان مستوى السعر يؤثر في متوسط المبيعات، اضبط مخاطرة الخطأ من النوع الأول عند $\alpha = .05$. اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة.

(ii) استخدم أسلوب الانحدار لتقدير $D = \tau_1 - \tau_2$ مستخدما 95% فترة ثقة.

(٢٩-١٤) بالإشارة إلى مسألة **التقارير الموجزة** (٢٩-٦). لنفترض أن المشاهدتين $Y_{114} = 21$ و $Y_{453} = 10$ مفقودتان.

أ ـ استخدم أسلوب الانحدار لاختبار ما إذا كانت الأنواع الخمسة من

التقارير مختلفة في متوسط فعاليتها، استخدم مستوى معنوية $\alpha = .01$.

اعرض البدائل ، وقاعدة القرار، والنتيجة.

ب ـ استخدم أسلوب الانحدار لتقدير $D = \tau_4 - \tau_1$ باستخدام 99% فترة ثقة.

(٢٩ـ١٥) **دعايات التلفاز.** تمت دراسة لتحديد ما إذا كان حجم الصوت في دعاية تلفازية يؤثر في التذكّر وما إذا كان هـذا التأثير يختلف باختلاف المنتج. وقد اختير اثنان وثلاثون عنصرا ، اثنان في كـل مـن ١٦فئة معرفة وفقـا للعمر (فصل 1 = الأحدث سنا ، 2 ;3 ;4: الأكـبر سـنا) ووفقـا للوضـع التعليمي (فصل 1: أدنى مستوى تعليمي 4, 3, 2 أعلى مسـتوى تعليمـي). وقد تم تعريض كل عنصر إلى واحدة من أربع دعايات تلفازية (A: صوت مرتفع، منتج X، B: صوت منخفض، منتج X، C: صوت مرتفـع، منتـج Y؛ D: صوت منخفض، منتج Y) وفقا لتصميم المربع اللاتيني المبين أدناه. انطوت الدراسـة على دعـايتين مختلفتـين، واحـدة لكـل منتـج. وخــلال الأسبوع الذي تلا ذلـك. طُلـب مـن العنـاصر تذكّـر كـل شـيء يمكنهـم تذكره عن الدعايـة. وقـد بنيـت الدرجـات على عـدد نقـاط التعلـم الـتي ذكرت. بعد معايرتها بصورة مناسبة. وفيما يلي النتائج:

فصل العمر i	المستوى التعليمي 1	2	3	4
	(D)	(A)	(C)	(B)
1	83	64	78	76
	86	69	75	74
	(B)	(C)	(A)	(D)
2	70	81	64	87
	76	75	60	81
	(C)	(B)	(D)	(A)
3	67	67	76	64
	74	61	81	57
	(A)	(D)	(B)	(C)
4	56	72	63	64
	60	67	67	66

أ - أوجد الرواسب لنموذج المربع اللاتيني (29.1) وارسمها مقابل القيم التوفيقية. جهز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. لخص نتائجك حول صلاحية النموذج المستخدم هنا.

ب - نفّذ اختبارا رسميا لما إذا كانت تأثيرات متغيري التجميع والمعالجات تجميعية أم لا، تجاهل البنية العاملية للمعالجات. استخدم مستوى المعنوية $\alpha = .01$. اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. احسب القيمة ـP للاختبار.

(٢٩ـ١٦) بالإشارة إلى مسألة **دعايات التلفاز** (٢٩ـ١٥). افترض أن النموذج المناسب هنا هو نموذج المربع اللاتيني (29.1) بعد تعديله بحيث يسمح بمعالجات عاملية (عامل A: حجم الصوت، عامل B: المنتج).

أ - اعرض النموذج المستخدم.

ب - اعرض تأثيرات تفاعل المنتج ـ حجم الصوت؛ استخدم $\alpha = .01$. اعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة ـP للاختبار؟.

جـ - اختبر التأثيرات الرئيسة للصوت والتاثيرات الرئيسة للمنتج. ومن أجل كل اختبار استخدم $\alpha = .01$، واعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة ـP لكل اختبار؟

د - لدراسة طبيعية التاثيرات الرئيسة للصوت وللمنتج. قدر الفرق بين متوسطي المستويين لكل عامل. استخدم طريقة بونفيروني و 95% معامل ثقة عائلي. اعرض نتائجك.

(٢٩ـ١٧) **ضعف الذاكرة.** في تجربة لدراسة ضعف الذاكرة بثلاثة استبيانات مختلفة (C, B, A) سئل تسعة عناصر في ثلاثة أوقات مختلفة يفصل بين وقت والذي يليه ثلاثة أشهر، عن عدد الرحلات إلى مركز تسويق خلال الأشهر الثلاثة الماضية. واستُخدم في كل مرة استبيان مختلف. واستُخدم

تصميم المربع اللاتيني المبين أدناه لتحديد ترتيب الاستبيان لكل عنصر، مع تخصيص ثلاثة عناصر عشوائيا لكل من أنماط ترتيب المعالجات. وفيما يلي البيانات حول عدد الرحلات إلى مركز التسويق كما أفاد بها العنصر.

نمط i	عنصر	فترة زمنية (j) 1	2	3
1	$m=1$	40(C)	18(A)	30(B)
	$m=2$	35(C)	25(A)	37(B)
	$m=3$	31(C)	22(A)	28(B)
2	$m=1$	10(B)	43(C)	33(A)
	$m=2$	18(B)	49(C)	37(A)
	$m=3$	15(B)	48(C)	29(A)
3	$m=1$	7(A)	19(B)	59(C)
	$m=2$	11(A)	24(B)	51(C)
	$m=3$	19(A)	21(B)	62(C)

أوجد الرواسب لنوذج المربع اللاتيني الناقل (29.28) وارسمها في مقابل القيم التوفيقية. جهّز، أيضا، رسم احتمال طبيعي للرواسب واحسب معامل الارتباط بين الرواسب المرتّبة وقيمها المتوقعة تحت الطبيعية. لخص نتائجك حول صلاحية النموذج (29.28) هنا.

(٢٩ــ١٨) بالإشارة إلى مسألة **ضعف الذاكرة** (٢٩ــ١٧). افترض أن نموذج المربع اللاتيني الناقل (29.28) مناسب.

أ ـ اختبر تأثيرات نمط ترتيب المعالجات، والفترة الزمنية، والاستبيان. ومن أجل كل اختبار، استخدم مستوى المعنوية $\alpha = .05$ واعرض البدائل، وقاعدة القرار، والنتيجة. ماهي القيمة ـP لكل اختبار.

ب ـ حلل التأثيرات الرئيسة للاستبيانات بتقدير جميع المقارنات الثنائية لمتوسطات المعالجات. استخدم طريقة توكي و95% معامل ثقة عائلي. لخص نتائجك.

تمارين

(٢٩-١٩) استنبط توقع متوسطات المربعات في الجدول (٢٩-٣) الخاصة بنموذج المربع اللاتيني (29.1) مستخدما القاعدة (٢٧ - ٤).

(٢٩-٢٠) استنبط توقع متوسطات المربعات لنموذج المربع اللاتيني (29.21) مع n من التكرارات، مستخدما القاعدة (٢٧-٤).

(٢٩-٢١) استنبط توقع متوسطات المربعات لنموذج المربع اللاتيني (29.27) مع n من التكرارات، مستخدما القاعدة (٢٧-٤).

(٢٩-٢٢) استنبط توقع متوسطات المربعات في الجدول (٢٩-١٤) لنموذج المربع اللاتيني الناقل (29.28) مع n من العناصر لكل نمط ترتيب للمعالجات وذلك باستخدام القاعدة (٢٧ - ٤).

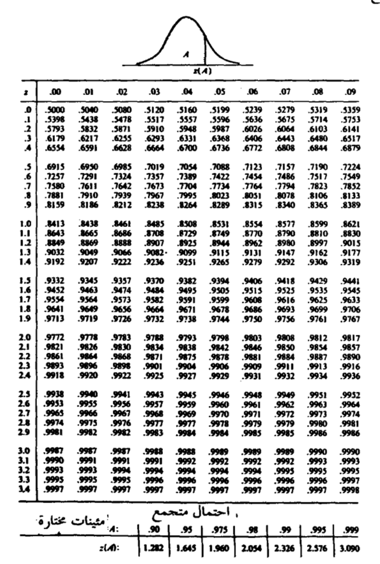
الملحق ا

جـــداول

جدول (ا-١) الاحتمالات المتجمعة للتوزيع الطبيعي المعياري.

العدد في صلب الجدول هو المساحة A تحت المنحني الطبيعي المعياري من ∞ - إلى $Z(A)$ مئينات مختارة،

الاحتمال المتجمع A



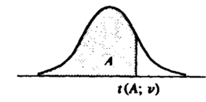
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

مئينات مختارة — احتمال متجمع

A:	.90	.95	.975	.98	.99	.995	.999
z(A):	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	3.090

جدول (أ - ٢) مئينات التوزيع t

العدد في صلب الجدول هو $t(A;\nu)$ حيث $P\{t(\nu) \leq t(A;\nu)\} = A$



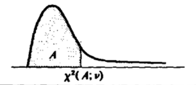
ν	A .60	.70	.80	.85	.90	.95	.975
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179
13	0.259	0.537	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960

تتمة جدول (أ-٢) مئينات التوزيع t

ν	A						
	.98	.985	.99	.9925	.995	.9975	.9995
1	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.849
21	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291

جدول (ا-٣) مئينات التوزيع χ^2

العدد في صلب الجدول هو $\chi^2(A;\,\nu)$ حيث $P\{\chi^2(\nu) \le \chi^2(A\,;\,\nu)\} = A$



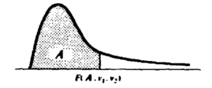
ν	A .005	.010	.025	.050	.100	.900	.950	.975	.990	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

المصدر: Reprinted, with permission, from C.M. Thompson. "Table of Percentage Points of the Chi-Square Distribution. "*Biometrika* 32 (1941), pp. 188-89.

جدول (ا-٤) مئينات التوزيع F

العدد في صلب الجدول $F(A;\nu_1,\nu_2)$ حيث $P\{F(\nu_1,\nu_2) \le F(A;\nu_1,\nu_2)\} = A$

مئينات التوزيع F



$$F(A;\nu_1,\nu_2)=\frac{1}{F(1-A;\nu_2,\nu_1)}$$

تتمة جدول (ا-٤) مئينات التوزيع F

د.ح. المقام	A	د.ح. البسط 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	.50	1.00	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.03
	.90	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9
	.95	161	200	216	225	230	234	237	239	241
	.975	648	800	864	900	922	937	948	957	963
	.99	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,981	6,022
	.995	16,211	20,000	21,615	22,500	23,056	23,437	23,715	23,925	24,091
	.999	405,280	500,000	540,380	562,500	576,400	585,940	592,870	598,140	602,280
2	.50	0.667	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.33
	.90	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.95	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
	.975	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4
	.99	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
	.995	199	199	199	199	199	199	199	199	199
	.999	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4
3	.50	0.585	0.881	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.17
	.90	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.95	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	.975	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5
	.99	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3
	.995	55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9
	.999	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9
4	.50	0.549	0.828	0.941	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.10
	.90	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.95	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	.975	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
	.99	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
	.995	31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1
	.999	74.1	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.5
5	.50	0.528	0.799	0.907	0.965	1.00	1.02	1.04	1.05	1.06
	.90	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.95	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	.975	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
	.99	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2
	.995	22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8
	.999	47.2	37.1	33.2	31.1	29.8	28.8	28.2	27.6	27.2
6	.50	0.515	0.780	0.886	0.942	0.977	1.00	1.02	1.03	1.04
	.90	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.95	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	.975	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
	.99	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.995	18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4
	.999	35.5	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.7
7	.50	0.506	0.767	0.871	0.926	0.960	0.983	1.00	1.01	1.02
	.90	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.95	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.975	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	.99	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.995	16.2	12.4	10.9	10.1	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51
	.999	29.2	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.3

تتمة جدول (ا-٤) مئينات التوزيع F

د.ح. المقام	A	10	12	15	20	24	30	60	120	∞
		د.ح. البسط								
1	.50	2.04	2.07	2.09	2.12	2.13	2.15	2.17	2.18	2.20
	.90	60.2	60.7	61.2	61.7	62.0	62.3	62.8	63.1	63.3
	.95	242	244	246	248	249	250	252	253	254
	.975	969	977	985	993	997	1,001	1,010	1,014	1,018
	.99	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,313	6,339	6,366
	.995	24,224	24,426	24,630	24,836	24,940	25,044	25,253	25,359	25,464
	.999	605,620	610,670	615,760	620,910	623,500	626,100	631,340	633,970	636,620
2	.50	1.34	1.36	1.38	1.39	1.40	1.41	1.43	1.43	1.44
	.90	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.48	9.49
	.95	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
	.975	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5
	.99	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
	.995	199	199	199	199	199	199	199	199	200
	.999	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3	.50	1.18	1.20	1.21	1.23	1.23	1.24	1.25	1.26	1.27
	.90	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.15	5.14	5.13
	.95	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.57	8.55	8.53
	.975	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	13.9	13.9
	.99	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.3	26.2	26.1
	.995	43.7	43.4	43.1	42.8	42.6	42.5	42.1	42.0	41.8
	.999	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	124.5	124.0	123.5
4	.50	1.11	1.13	1.14	1.15	1.16	1.16	1.18	1.18	1.19
	.90	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.79	3.78	3.76
	.95	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.69	5.66	5.63
	.975	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.36	8.31	8.26
	.99	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.6	13.5
	.995	21.0	20.7	20.4	20.2	20.0	19.9	19.6	19.5	19.3
	.999	48.1	47.4	46.8	46.1	45.8	45.4	44.7	44.4	44.1
5	.50	1.07	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12	1.14	1.14	1.15
	.90	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.14	3.12	3.11
	.95	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.43	4.40	4.37
	.975	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.12	6.07	6.02
	.99	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.20	9.11	9.02
	.995	13.6	13.4	13.1	12.9	12.8	12.7	12.4	12.3	12.1
	.999	26.9	26.4	25.9	25.4	25.1	24.9	24.3	24.1	23.8
6	.50	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.11	1.12	1.12
	.90	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.76	2.74	2.72
	.95	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.74	3.70	3.67
	.975	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	4.96	4.90	4.85
	.99	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.06	6.97	6.88
	.995	10.2	10.0	9.81	9.59	9.47	9.36	9.12	9.00	8.88
	.999	18.4	18.0	17.6	17.1	16.9	16.7	16.2	16.0	15.7
7	.50	1.03	1.04	1.05	1.07	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10
	.90	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.51	2.49	2.47
	.95	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.30	3.27	3.23
	.975	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.25	4.20	4.14
	.99	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.82	5.74	5.65
	.995	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.31	7.19	7.08
	.999	14.1	13.7	13.3	12.9	12.7	12.5	12.1	11.9	11.7

تتمة جدول (ا-٤) مئينات التوزيع F

د.ح. المقام	ف	د.ح. البسط 1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	.50	0.499	0.757	0.860	0.915	0.948	0.971	0.988	1.00	1.01
	.90	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	.95	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	.975	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
	.99	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
	.995	14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34
	.999	25.4	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.8
9	.50	0.494	0.749	0.852	0.906	0.939	0.962	0.978	0.990	1.00
	.90	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	.95	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	.975	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
	.99	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
	.995	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54
	.999	22.9	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	10.1
10	.50	0.490	0.743	0.845	0.899	0.932	0.954	0.971	0.983	0.992
	.90	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	.95	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
	.975	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
	.99	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
	.995	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97
	.999	21.0	14.9	12.6	11.3	10.5	9.93	9.52	9.20	8.96
12	.50	0.484	0.735	0.835	0.888	0.921	0.943	0.959	0.972	0.981
	.90	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
	.95	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
	.975	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
	.99	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
	.995	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20
	.999	18.6	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48
15	.50	0.478	0.726	0.826	0.878	0.911	0.933	0.949	0.960	0.970
	.90	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	.95	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
	.975	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
	.99	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
	.995	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54
	.999	16.6	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26
20	.50	0.472	0.718	0.816	0.868	0.900	0.922	0.938	0.950	0.959
	.90	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
	.95	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
	.975	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
	.99	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
	.995	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96
	.999	14.8	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24
24	.50	0.469	0.714	0.812	0.863	0.895	0.917	0.932	0.944	0.953
	.90	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
	.95	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
	.975	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70
	.99	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
	.995	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69
	.999	14.0	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80

تتمة جدول (أ-٤) مئينات التوزيع F

د.ح. المقام	A	د.ح. البسط 10	12	15	20	24	30	60	120	∞
8	.50	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.08	1.09
	.90	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.34	2.32	2.29
	.95	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.01	2.97	2.93
	.975	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.78	3.73	3.67
	.99	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.03	4.95	4.86
	.995	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.18	6.06	5.95
	.999	11.5	11.2	10.8	10.5	10.3	10.1	9.73	9.53	9.33
9	.50	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.05	1.07	1.07	1.08
	.90	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.21	2.18	2.16
	.95	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.79	2.75	2.71
	.975	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.45	3.39	3.33
	.99	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.48	4.40	4.31
	.995	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.41	5.30	5.19
	.999	9.89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.19	8.00	7.81
10	.50	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.06	1.07
	.90	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.11	2.08	2.06
	.95	2.98	2.91	2.84	2.77	2.74	2.70	2.62	2.58	2.54
	.975	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.20	3.14	3.08
	.99	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.08	4.00	3.91
	.995	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.86	4.75	4.64
	.999	8.75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.12	6.94	6.76
12	.50	0.989	1.00	1.01	1.02	1.03	1.03	1.05	1.05	1.06
	.90	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.96	1.93	1.90
	.95	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.38	2.34	2.30
	.975	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.85	2.79	2.72
	.99	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.54	3.45	3.36
	.995	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.12	4.01	3.90
	.999	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.76	5.59	5.42
15	.50	0.977	0.989	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03	1.04	1.05
	.90	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.82	1.79	1.76
	.95	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.16	2.11	2.07
	.975	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.52	2.46	2.40
	.99	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.05	2.96	2.87
	.995	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.48	3.37	3.26
	.999	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.64	4.48	4.31
20	.50	0.966	0.977	0.989	1.00	1.01	1.01	1.02	1.03	1.03
	.90	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.68	1.64	1.61
	.95	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.95	1.90	1.84
	.975	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.22	2.16	2.09
	.99	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.61	2.52	2.42
	.995	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	2.92	2.81	2.69
	.999	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.70	3.54	3.38
24	.50	0.961	0.972	0.983	0.994	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03
	.90	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.61	1.57	1.53
	.95	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.84	1.79	1.73
	.975	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.08	2.01	1.94
	.99	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.40	2.31	2.21
	.995	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.66	2.55	2.43
	.999	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.29	3.14	2.97

تتمة جدول (ا-٤) مئينات التوزيع F

د.ح. المقام	A	د.ح. البسط 1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	.50	0.466	0.709	0.807	0.858	0.890	0.912	0.927	0.939	0.948
	.90	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
	.95	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
	.975	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
	.99	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
	.995	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45
	.999	13.3	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39
60	.50	0.461	0.701	0.798	0.849	0.880	0.901	0.917	0.928	0.937
	.90	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
	.95	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
	.975	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
	.99	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
	.995	8.49	5.80	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01
	.999	12.0	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69
120	.50	0.458	0.697	0.793	0.844	0.875	0.896	0.912	0.923	0.932
	.90	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68
	.95	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96
	.975	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22
	.99	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
	.995	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81
	.999	11.4	7.32	5.78	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38
∞	.50	0.455	0.693	0.789	0.839	0.870	0.891	0.907	0.918	0.927
	.90	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63
	.95	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88
	.975	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11
	.99	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41
	.995	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62
	.999	10.8	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10

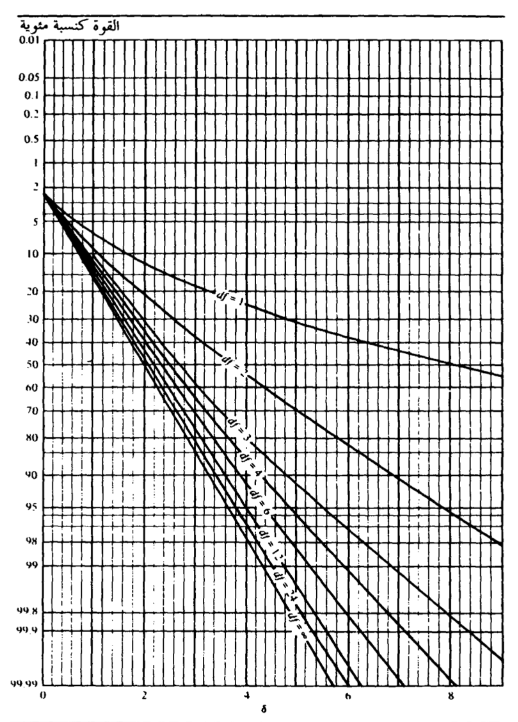
تتمة جدول (ا-٤) مئينات التوزيع F

د.ح. المقام		د.ح. البسط								
		10	12	15	20	24	30	60	120	∞
30	.50	0.955	0.966	0.978	0.989	0.994	1.00	1.01	1.02	1.02
	.90	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.54	1.50	1.46
	.95	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.74	1.68	1.62
	.975	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	1.94	1.87	1.79
	.99	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.21	2.11	2.01
	.995	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.42	2.30	2.18
	.999	4.24	4.00	3.75	3.49	3.36	3.22	2.92	2.76	2.59
60	.50	0.945	0.956	0.967	0.978	0.983	0.989	1.00	1.01	1.01
	.90	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.40	1.35	1.29
	.95	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.53	1.47	1.39
	.975	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.67	1.58	1.48
	.99	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.84	1.73	1.60
	.995	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	1.96	1.83	1.69
	.999	3.54	3.32	3.08	2.83	2.69	2.55	2.25	2.08	1.89
120	.50	0.939	0.950	0.961	0.972	0.978	0.983	0.994	1.00	1.01
	.90	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.32	1.26	1.19
	.95	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.43	1.35	1.25
	.975	2.16	2.05	1.95	1.82	1.76	1.69	1.53	1.43	1.31
	.99	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.66	1.53	1.38
	.995	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.75	1.61	1.43
	.999	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	1.95	1.77	1.54
∞	.50	0.934	0.945	0.956	0.967	0.972	0.978	0.989	0.994	1.00
	.90	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.24	1.17	1.00
	.95	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.32	1.22	1.00
	.975	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.39	1.27	1.00
	.99	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.47	1.32	1.00
	.995	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.53	1.36	1.00
	.999	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.66	1.45	1.00

المصدر: Reprinted from Table 5 of Pearson and Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Volume 2, 1972, published by the Cambridge University Press, on behalf of The Biometria Society, by permission of the authors and publishers.

جدول (ا-٥) دالة القوة للاختبار t ذي الجانبين

$\alpha = .05$



تتمة جدول (ا–٥) دالة القوة للاختبار t ذي الجانبين

المصدر: Reprinted, with permission, from D.B. Owen, *Handbook of Statistical Tables* (Reading, Mass. Addison Wesley Publishing. 1962), pp. 32, 34. Courtesy of U.S. Atomic Energy Commission.

جدول (ا-٦) حدًا اختبار دوربين ـ واتسون

مستوى الأهمية $\alpha = 0.05$

n	$p-1=1$		$p-1=2$		$p-1=3$		$p-1=4$		$p-1=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

تتمة جدول (ا-٦) حدًا اختبار دوربين - واتسون

مستوى الأهمية $\alpha = 0.01$

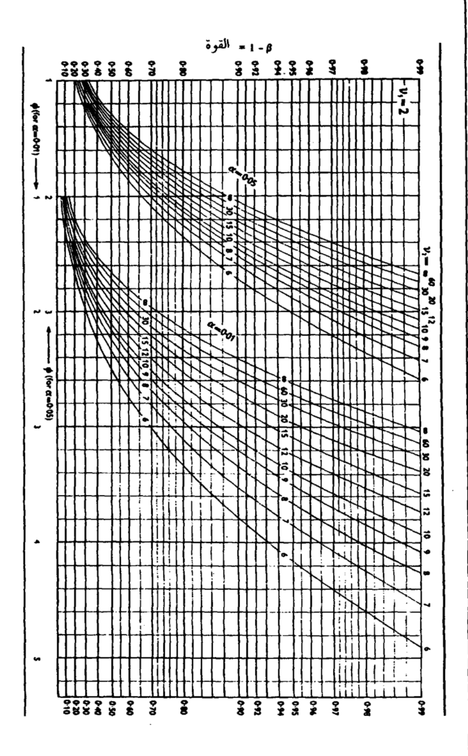
n	$p-1=1$		$p-1=2$		$p-1=3$		$p-1=4$		$p-1=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.63	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.37	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.09	1.52	1.03	1.58
40	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.10	1.52	1.05	1.58
45	1.29	1.38	1.24	1.42	1.20	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
55	1.36	1.43	1.32	1.47	1.28	1.51	1.25	1.55	1.21	1.59
60	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.60
65	1.41	1.47	1.38	1.50	1.35	1.53	1.31	1.57	1.28	1.61
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
75	1.45	1.50	1.42	1.53	1.39	1.56	1.37	1.59	1.34	1.62
80	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.60	1.36	1.62
85	1.48	1.53	1.46	1.55	1.43	1.58	1.41	1.60	1.39	1.63
90	1.50	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
95	1.51	1.55	1.49	1.57	1.47	1.60	1.45	1.62	1.42	1.64
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65

المصدر: Reprinted, with permission, from J. Durbin and G.S. Watson, "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. II", *Biometrika* 38 (1951), pp. 159-78.

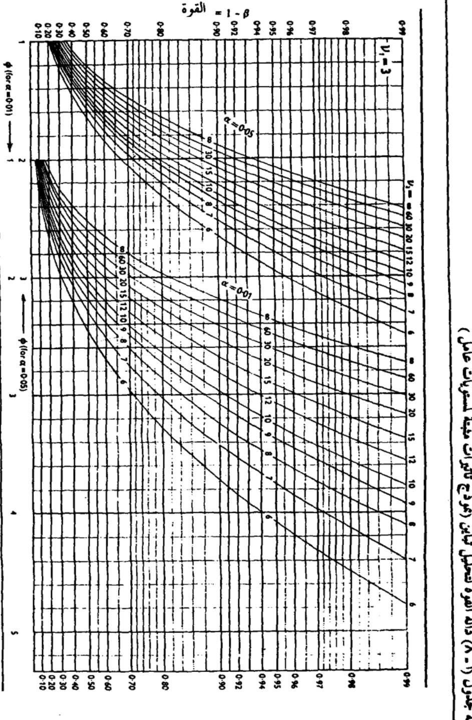
جدول (ا–٧) جدول التحويل 'z لمعامل الارتباط

r ρ	z' ζ	r ρ	z' ζ	r ρ	z' ζ	r ρ	z' ζ
.00	.0000	.25	.2554	.50	.5493	.75	.973
.01	.0100	.26	.2661	.51	.5627	.76	.996
.02	.0200	.27	.2769	.52	.5763	.77	1.020
.03	.0300	.28	.2877	.53	.5901	.78	1.045
.04	.0400	.29	.2986	.54	.6042	.79	1.071
.05	.0500	.30	.3095	.55	.6184	.80	1.099
.06	.0601	.31	.3205	.56	.6328	.81	1.127
.07	.0701	.32	.3316	.57	.6475	.82	1.157
.08	.0802	.33	.3428	.58	.6625	.83	1.188
.09	.0902	.34	.3541	.59	.6777	.84	1.221
.10	.1003	.35	.3654	.60	.6931	.85	1.256
.11	.1104	.36	.3769	.61	.7089	.86	1.293
.12	.1206	.37	.3884	.62	.7250	.87	1.333
.13	.1307	.38	.4001	.63	.7414	.88	1.376
.14	.1409	.39	.4118	.64	.7582	.89	1.422
.15	.1511	.40	.4236	.65	.7753	.90	1.472
.16	.1614	.41	.4356	.66	.7928	.91	1.528
.17	.1717	.42	.4477	.67	.8107	.92	1.589
.18	.1820	.43	.4599	.68	.8291	.93	1.658
.19	.1923	.44	.4722	.69	.8480	.94	1.738
.20	.2027	.45	.4847	.70	.8673	.95	1.832
.21	.2132	.46	.4973	.71	.8872	.96	1.946
.22	.2237	.47	.5101	.72	.9076	.97	2.092
.23	.2342	.48	.5230	.73	.9287	.98	2.298
.24	.2448	.49	.5361	.74	.9505	.99	2.647

المصدر: Abridged from Table 14 of Pearson and Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, volume 1, 1966, published by the Cambridge University Press, on behalf of The Biometrika Society, by permission of the authors and publishers.

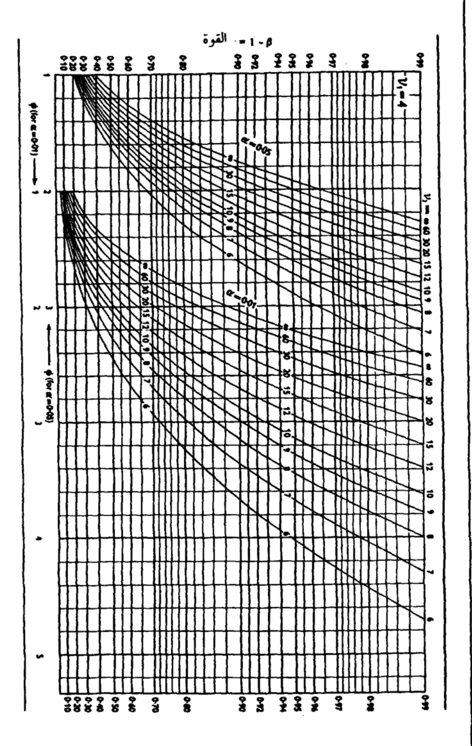


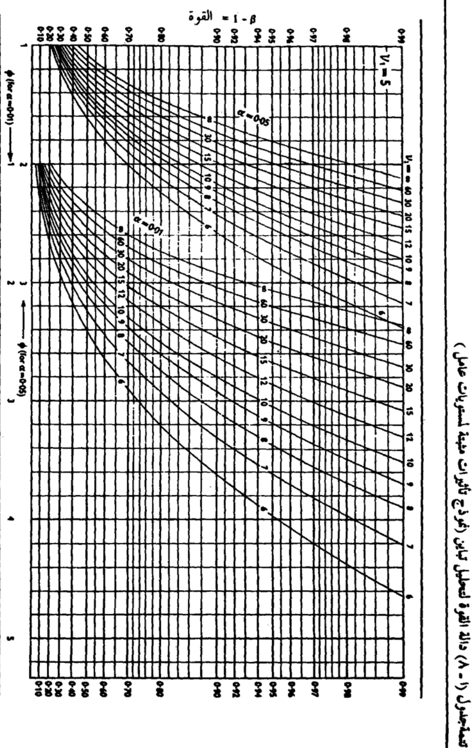
جدول (أ - ٨) دالة القوة لتحليل تباين (نموذج تأثيرات معينة لمستويات عامل)



تتمة جدول (١ - ٨) دالة القوة لتحليل التباين (نموذج تأثيرات مثبتة لمستويات عامل)

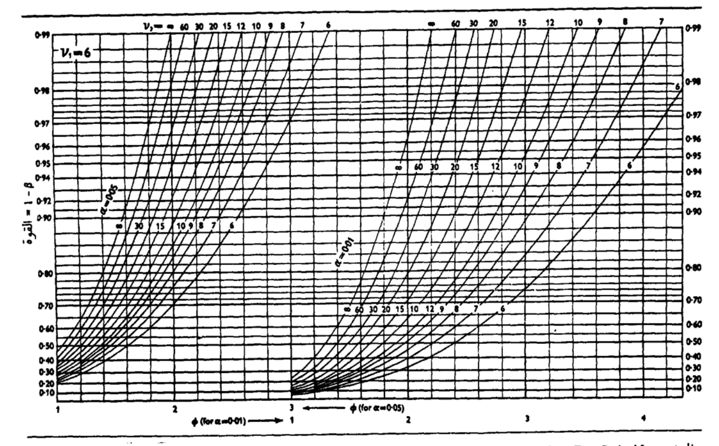
تتمة جدول (أ - ٨) دالة القوة لتحليل تباين (نموذج تأثيرات مثبتة لمستويات عامل)





تكملة جدول (١ - ٨) دالة القوة لتحليل تباين (نموذج تأثيرات مثبتة لمستويات عامل)

تتمة جدول (أ ـ ٨) دالة القوة لتحليل تباين (نموذج تأثيرات مثبتة لمستويات عامل)



المصدر: Reprinted, with permission, from E.S. Pearson and H.O. Harly, "Charts of the Power Function for Analysis of Variance Tests, Derived from the Non-Central *F*-Distribution," *Biometrika* 38 (1951), pp. 112-30.

جدول (١ ـ ٩) مئينات توزيع المدى المعيّر تقديرا

العدد في صُلب الجدول هو $q(1 - \alpha; r, \nu)$ حيث $P\{q(r, \nu) \le q(1 - \alpha; r, \nu)\} = 1 - \alpha$

$1 - \alpha = .90$

	r																		
ν	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	8.93	13.4	16.4	18.5	20.2	21.5	22.6	23.6	24.5	25.2	25.9	26.5	27.1	27.6	28.1	28.5	29.0	29.3	29.7
2	4.13	5.73	6.77	7.54	8.14	8.63	9.05	9.41	9.72	10.0	10.3	10.5	10.7	10.9	11.1	11.2	11.4	11.5	11.7
3	3.33	4.47	5.20	5.74	6.16	6.51	6.81	7.06	7.29	7.49	7.67	7.83	7.98	8.12	8.25	8.37	8.48	8.58	8.68
4	3.01	3.98	4.59	5.03	5.39	5.68	5.93	6.14	6.33	6.49	6.65	6.78	6.91	7.02	7.13	7.23	7.33	7.41	7.50
5	2.85	3.72	4.26	4.66	4.98	5.24	5.46	5.65	5.82	5.97	6.10	6.22	6.34	6.44	6.54	6.63	6.71	6.79	6.86
6	2.75	3.56	4.07	4.44	4.73	4.97	5.17	5.34	5.50	5.64	5.76	5.87	5.98	6.07	6.16	6.25	6.32	6.40	6.47
7	2.68	3.45	3.93	4.28	4.55	4.78	4.97	5.14	5.28	5.41	5.53	5.64	5.74	5.83	5.91	5.99	6.06	6.13	6.19
8	2.63	3.37	3.83	4.17	4.43	4.65	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.56	5.64	5.72	5.80	5.87	5.93	6.00
9	2.59	3.32	3.76	4.08	4.34	4.54	4.72	4.87	5.01	5.13	5.23	5.33	5.42	5.51	5.58	5.66	5.72	5.79	5.85
10	2.56	3.27	3.70	4.02	4.26	4.47	4.64	4.78	4.91	5.03	5.13	5.23	5.32	5.40	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73
11	2.54	3.23	3.66	3.96	4.20	4.40	4.57	4.71	4.84	4.95	5.05	5.15	5.23	5.31	5.38	5.45	5.51	5.57	5.63
12	2.52	3.20	3.62	3.92	4.16	4.35	4.51	4.65	4.78	4.89	4.99	5.08	5.16	5.24	5.31	5.37	5.44	5.49	5.55
13	2.50	3.18	3.59	3.88	4.12	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83	4.93	5.02	5.10	5.18	5.25	5.31	5.37	5.43	5.48
14	2.49	3.16	3.56	3.85	4.08	4.27	4.42	4.56	4.68	4.79	4.88	4.97	5.05	5.12	5.19	5.26	5.32	5.37	5.43
15	2.48	3.14	3.54	3.83	4.05	4.23	4.39	4.52	4.64	4.75	4.84	4.93	5.01	5.08	5.15	5.21	5.27	5.32	5.38
16	2.47	3.12	3.52	3.80	4.03	4.21	4.36	4.49	4.61	4.71	4.81	4.89	4.97	5.04	5.11	5.17	5.23	5.28	5.33
17	2.46	3.11	3.50	3.78	4.00	4.18	4.33	4.46	4.58	4.68	4.77	4.86	4.93	5.01	5.07	5.13	5.19	5.24	5.30
18	2.45	3.10	3.49	3.77	3.93	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.75	4.83	4.90	4.98	5.04	5.10	5.16	5.21	5.26
19	2.45	3.09	3.47	3.75	3.97	4.14	4.29	4.42	4.53	4.63	4.72	4.80	4.88	4.95	5.01	5.07	5.13	5.18	5.23
20	2.44	3.08	3.46	3.74	3.95	4.12	4.27	4.40	4.51	4.61	4.70	4.78	4.85	4.92	4.99	5.05	5.10	5.16	5.20
24	2.42	3.05	3.42	3.69	3.90	4.07	4.21	4.34	4.44	4.54	4.63	4.71	4.78	4.85	4.91	4.97	5.02	5.07	5.12
30	2.40	3.02	3.39	3.65	3.85	4.02	4.16	4.28	4.38	4.47	4.56	4.64	4.71	4.77	4.83	4.89	4.94	4.99	5.03
40	2.38	2.99	3.35	3.60	3.80	3.96	4.10	4.21	4.32	4.41	4.49	4.56	4.63	4.69	4.75	4.81	4.86	4.90	4.95
60	2.36	2.96	3.31	3.56	3.75	3.91	4.04	4.16	4.25	4.34	4.42	4.49	4.56	4.62	4.67	4.73	4.78	4.82	4.86
120	2.34	2.93	3.28	3.52	3.71	3.86	3.99	4.10	4.19	4.28	4.35	4.42	4.48	4.54	4.60	4.65	4.69	4.74	4.78
∞	2.33	2.90	3.24	3.48	3.66	3.81	3.93	4.04	4.13	4.21	4.28	4.35	4.41	4.47	4.52	4.57	4.61	4.65	4.69

تتمة جدول (ا ـ ٩) مئينات توزيع المدى المعيّر تقديرا

$1 - \alpha = .95$

ν	r = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	18.0	27.0	32.8	37.1	40.4	43.1	45.4	47.4	49.1	50.6	52.0	53.2	54.3	55.4	56.3	57.2	58.0	58.8	59.6
2	6.08	8.33	9.80	10.9	11.7	12.4	13.0	13.5	14.0	14.4	14.7	15.1	15.4	15.7	15.9	16.1	16.4	16.6	16.8
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.2	10.3	10.5	10.7	10.8	11.0	11.1	11.2
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01

تتمة جدول (ا ـ ٩) مئينات توزيع المدى المعيّر تقديرا

$1 - \alpha = .99$

ν	r = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	90.0	135	164	186	202	216	227	237	246	253	260	266	272	277	282	286	290	294	298
2	14.0	19.0	22.3	24.7	26.6	28.2	29.5	30.7	31.7	32.6	33.4	34.1	34.8	35.4	36.0	36.5	37.0	37.5	37.9
3	8.26	10.6	12.2	13.3	14.2	15.0	15.6	16.2	16.7	17.1	17.5	17.9	18.2	18.5	18.8	19.1	19.3	19.5	19.8
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.6	11.1	11.5	11.9	12.3	12.6	12.8	13.1	13.3	13.5	13.7	13.9	14.1	14.2	14.4
5	5.70	6.97	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.2	10.5	10.7	10.9	11.1	11.2	11.4	11.6	11.7	11.8	11.9
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.49	9.65	9.81	9.95	10.1	10.2	10.3	10.4	10.5
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65
8	4.74	5.63	6.20	6.63	6.96	7.24	7.47	7.68	7.87	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.32	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.32	8.41	8.49	8.57
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.48	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.07	8.15	8.22
11	4.39	5.14	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95
12	4.32	5.04	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.34	7.42	7.48	7.55
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.12	7.20	7.27	7.33	7.39
15	4.17	4.83	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26
16	4.13	4.78	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.80	6.87	6.94	7.00	7.05
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.72	6.79	6.85	6.91	6.96
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.29	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.76	6.82
24	3.96	4.54	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.27	5.39	5.50	5.60	5.69	5.77	5.84	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.17	6.21
60	3.76	4.28	4.60	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60	5.67	5.73	5.79	5.84	5.89	5.93	5.98	6.02
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.38	5.44	5.51	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65

المصدر: Reprinted, with permission, from Henry Scheffé, *The Analysis of Variance* (New York: John Wiley & Sons, 1959), pp. 434–36

جدول (ا ـ ١٠) جدول تحديد حجم العينة في تجربة تحليل تباين (نموذج تأثيرات مثبتة لمستويات عامل)

القوة $1 - \beta = .70$

	$\Delta/\sigma = 1.0$				$\Delta/\sigma = 1.25$				$\Delta/\sigma = 1.50$				$\Delta/\sigma = 1.75$				$\Delta/\sigma = 2.0$				$\Delta/\sigma = 2.5$				$\Delta/\sigma = 3.0$			
	α				α				α				α				α				α				α			
r	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
2	7	11	14	21	5	7	9	15	4	6	7	11	3	4	6	9	3	4	5	7	2	3	4	5	2	3	3	5
3	9	13	17	25	6	9	11	17	5	7	8	12	4	5	7	10	3	4	5	8	3	3	4	6	2	3	3	5
4	11	15	19	28	7	10	13	19	5	7	9	13	4	6	7	10	4	5	6	8	3	4	4	6	2	3	4	5
5	12	17	21	30	8	11	14	20	6	8	10	14	5	6	8	11	4	5	6	9	3	4	5	6	3	3	4	5
6	13	18	22	32	9	12	15	21	6	9	11	15	5	7	8	12	4	5	7	9	3	4	5	7	3	3	4	5
7	14	19	24	34	9	13	16	22	7	9	11	16	5	7	9	12	4	6	7	10	3	4	5	7	3	3	4	5
8	15	20	25	35	10	13	16	23	7	10	12	17	6	7	9	13	5	6	7	10	3	4	5	7	3	3	4	5
9	15	21	26	37	10	14	17	24	7	10	12	17	6	8	9	13	5	6	8	10	3	4	5	7	3	4	4	6
10	16	22	27	38	11	14	18	25	8	10	13	18	6	8	10	14	5	6	8	11	4	5	6	7	3	4	4	6

القوة $1 - \beta = .80$

	$\Delta/\sigma = 1.0$				$\Delta/\sigma = 1.25$				$\Delta/\sigma = 1.50$				$\Delta/\sigma = 1.75$				$\Delta/\sigma = 2.0$				$\Delta/\sigma = 2.5$				$\Delta/\sigma = 3.0$			
	α				α				α				α				α				α				α			
r	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
2	10	14	17	26	7	9	12	17	5	7	9	13	4	5	7	10	3	4	6	8	3	3	4	6	2	3	4	5
3	12	17	21	30	8	11	14	20	6	8	10	14	5	6	8	11	4	5	6	9	3	4	5	7	3	3	4	5
4	14	19	23	33	9	13	15	22	7	9	11	16	5	7	9	12	4	6	7	10	3	4	5	7	3	3	4	5
5	16	21	25	35	10	14	17	23	8	10	12	17	6	8	9	13	5	6	7	10	4	4	5	7	3	4	4	6
6	17	22	27	38	11	15	18	25	8	11	13	18	6	8	10	13	5	7	8	11	4	5	6	8	3	4	4	6
7	18	24	29	39	12	16	19	26	9	11	14	18	7	9	10	14	5	7	8	11	4	5	6	8	3	4	5	6
8	19	25	30	41	12	16	20	27	9	12	14	19	7	9	11	15	6	7	9	12	4	5	6	8	3	4	5	6
9	20	26	31	43	13	17	21	28	9	12	15	20	7	9	11	15	6	7	9	12	4	5	6	8	3	4	5	6
10	21	27	33	44	14	18	21	29	10	13	15	21	8	10	12	16	6	8	9	12	4	5	6	8	3	4	5	6

تتمة جدول (ا ـ ١٠) جدول تحديد حجم العينة في تجربة تحليل تباين (نموذج تأثيرات مثبتة لمستويات عامل)

القوة $1 - \beta = .90$

	$\Delta/\sigma = 1.0$				$\Delta/\sigma = 1.25$				$\Delta/\sigma = 1.50$				$\Delta/\sigma = 1.75$				$\Delta/\sigma = 2.0$				$\Delta/\sigma = 2.5$				$\Delta/\sigma = 3.0$			
	α				α				α				α				α				α				α			
r	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
2	14	18	23	32	9	12	15	21	7	9	11	15	5	7	8	12	4	6	7	10	3	4	5	7	3	3	4	6
3	17	22	27	37	11	15	18	24	8	11	13	18	6	8	10	13	5	7	8	11	4	5	6	8	3	4	5	6
4	20	25	30	40	13	16	20	27	9	12	14	19	7	9	11	15	6	7	9	12	4	5	6	8	3	4	5	6
5	21	27	32	43	14	18	21	28	10	13	15	20	8	10	12	15	6	8	9	12	4	5	6	9	4	4	5	7
6	22	29	34	46	15	19	23	30	11	14	16	21	8	10	12	16	7	8	10	13	5	6	7	9	4	4	5	7
7	24	31	36	48	16	20	24	31	11	14	17	22	9	11	13	17	7	9	10	13	5	6	7	9	4	5	5	7
8	26	32	38	50	17	21	25	33	12	15	18	23	9	11	13	17	7	9	11	14	5	6	7	9	4	5	6	7
9	27	33	40	52	17	22	26	34	13	16	18	24	9	12	14	18	8	9	11	14	5	6	8	10	4	5	6	7
10	28	35	41	54	18	23	27	35	13	16	19	25	10	12	14	19	8	10	11	15	5	7	8	10	4	5	6	7

القوة $1 - \beta = .95$

	$\Delta/\sigma = 1.0$				$\Delta/\sigma = 1.25$				$\Delta/\sigma = 1.50$				$\Delta/\sigma = 1.75$				$\Delta/\sigma = 2.0$				$\Delta/\sigma = 2.5$				$\Delta/\sigma = 3.0$			
	α				α				α				α				α				α				α			
r	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01	.2	.1	.05	.01
2	18	23	27	38	12	15	18	25	9	11	13	18	7	8	10	14	5	7	8	11	4	5	6	8	3	4	5	6
3	22	27	32	43	14	18	21	29	10	13	15	20	8	10	12	16	6	8	9	12	5	6	7	9	4	4	5	7
4	25	30	36	47	16	20	23	31	12	14	17	22	9	11	13	17	7	9	10	13	5	6	7	9	4	5	5	7
5	27	33	39	51	18	22	25	33	13	15	18	23	10	12	14	18	8	9	11	14	5	6	7	10	4	5	6	7
6	29	35	41	53	19	23	27	35	13	16	19	25	10	12	14	19	8	10	11	15	6	7	8	10	4	5	6	8
7	30	37	43	56	20	24	28	36	14	17	20	26	11	13	15	19	8	10	12	15	6	7	8	10	4	5	6	8
8	32	39	45	58	21	25	29	38	15	18	21	27	11	14	16	20	9	11	12	16	6	7	8	11	5	5	6	8
9	33	40	47	60	22	26	30	39	15	19	22	28	12	14	16	21	9	11	13	16	6	8	9	11	5	6	6	8
10	34	42	48	62	22	27	31	40	16	19	22	29	12	15	17	21	9	11	13	17	6	8	9	11	5	6	7	8

المصدر: Reprinted, with permission, from T.L. Bratcher, M.A. Moran, and W.J. Zimmer, "Tables of Sample Sizes in the Analysis of Variance," *Journal of Quality Technology* 2 (1970), pp. 156-64. Copyright American Society for Quality Control, Inc

جدول (أ - ١١) جدول $\lambda\sqrt{n}/\sigma$ لتحديد حجم العينة من أجل إيجاد "أفضل" متوسط بين متوسطات r من المجتمعات.

عدد المجتمعات r	احتمال التحديد الصحيح $(1-\alpha)$		
	.90	.95	.99
2	1.8124	2.3262	3.2900
3	2.2302	2.7101	3.6173
4	2.4516	2.9162	3.7970
5	2.5997	3.0552	3.9196
6	2.7100	3.1591	4.0121
7	2.7972	3.2417	4.0861
8	2.8691	3.3099	4.1475
9	2.9301	3.3679	4.1999
10	2.9829	3.4182	4.2456

المصدر: Reprinted, with permission, from R.E. Bechhofer, "A Single-Sample Multiple Decision Procedure for Ranking Means of Normal Populations with Known Variances, "*The Annals of Mathematical Statistics* 25 (1954), pp. 16-39.

جدول (ا - ١٢) مئينات توزيع الاحصاءة H

العدد في صلب الجدول هو $H(1 - \alpha; r, df)$ حيث : $P\{H \leq H(1 - \alpha; r, df)\} = 1 - \alpha$

$1 - \alpha = .95$

	r										
df	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	39.0	87.5	142	202	266	333	403	475	550	626	704
3	15.4	27.8	39.2	50.7	62.0	72.9	83.5	93.9	104	114	124
4	9.60	15.5	20.6	25.2	29.5	33.6	37.5	41.1	44.6	48.0	51.4
5	7.15	10.8	13.7	16.3	18.7	20.8	22.9	24.7	26.5	28.2	29.9
6	5.82	8.38	10.4	12.1	13.7	15.0	16.3	17.5	18.6	19.7	20.7
7	4.99	6.94	8.44	9.70	10.8	11.8	12.7	13.5	14.3	15.1	15.8
8	4.43	6.00	7.18	8.12	9.03	9.78	10.5	11.1	11.7	12.2	12.7
9	4.03	5.34	6.31	7.11	7.80	8.41	8.95	9.45	9.91	10.3	10.7
10	3.72	4.85	5.67	6.34	6.92	7.42	7.87	8.28	8.66	9.01	9.34
12	3.28	4.16	4.79	5.30	5.72	6.09	6.42	6.72	7.00	7.25	7.48
15	2.86	3.54	4.01	4.37	4.68	4.95	5.19	5.40	5.59	5.77	5.93
20	2.46	2.95	3.29	3.54	3.76	3.94	4.10	4.24	4.37	4.49	4.59
30	2.07	2.40	2.61	2.78	2.91	3.02	3.12	3.21	3.29	3.36	3.39
60	1.67	1.85	1.96	2.04	2.11	2.17	2.22	2.26	2.30	2.33	2.36
∞	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

$1 - \alpha = .99$

	r										
df	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	199	448	729	1,036	1,362	1,705	2,063	2,432	2,813	3,204	3,605
3	47.5	85	120	151	184	216	249	281	310	337	361
4	23.2	37	49	59	69	79	89	97	106	113	120
5	14.9	22	28	33	38	42	46	50	54	57	60
6	11.1	15.5	19.1	22	25	27	30	32	34	36	37
7	8.89	12.1	14.5	16.5	18.4	20	22	23	24	26	27
8	7.50	9.9	11.7	13.2	14.5	15.8	16.9	17.9	18.9	19.8	21
9	6.54	8.5	9.9	11.1	12.1	13.1	13.9	14.7	15.3	16.0	16.6
10	5.85	7.4	8.6	9.6	10.4	11.1	11.8	12.4	12.9	13.4	13.9
12	4.91	6.1	6.9	7.6	8.2	8.7	9.1	9.5	9.9	10.2	10.6
15	4.07	4.9	5.5	6.0	6.4	6.7	7.1	7.3	7.5	7.8	8.0
20	3.32	3.8	4.3	4.6	4.9	5.1	5.3	5.5	5.6	5.8	5.9
30	2.63	3.0	3.3	3.4	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2
60	1.96	2.2	2.3	2.4	2.4	2.5	2.5	2.6	2.6	2.7	2.7
∞	1.00	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

المصدر: Reprinted, with permission, from H.A. David, "Upper 5 and 1% Points of the Maximum *F*-Ratio", *Biometrika* 39 (1952), pp. 422-24.

جدول (ا - ١٣) مربعات لاتينية قياسية مختارة

3 × 3

A	*B*	*C*
B	*C*	*A*
C	*A*	*B*

4 × 4

1

A	*B*	*C*	*D*
B	*A*	*D*	*C*
C	*D*	*B*	*A*
D	*C*	*A*	*B*

2

A	*B*	*C*	*D*
B	*C*	*D*	*A*
C	*D*	*A*	*B*
D	*A*	*B*	*C*

3

A	*B*	*C*	*D*
B	*D*	*A*	*C*
C	*A*	*D*	*B*
D	*C*	*B*	*A*

4

A	*B*	*C*	*D*
B	*A*	*D*	*C*
C	*D*	*A*	*B*
D	*C*	*B*	*A*

5 × 5

A	*B*	*C*	*D*	*E*
B	*A*	*E*	*C*	*D*
C	*D*	*A*	*E*	*B*
D	*E*	*B*	*A*	*C*
E	*C*	*D*	*B*	*A*

6 × 6

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
B	*F*	*D*	*C*	*A*	*E*
C	*D*	*E*	*F*	*B*	*A*
D	*A*	*F*	*E*	*C*	*B*
E	*C*	*A*	*B*	*F*	*D*
F	*E*	*B*	*A*	*D*	*C*

7 × 7

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*A*
C	*D*	*E*	*F*	*G*	*A*	*B*
D	*E*	*F*	*G*	*A*	*B*	*C*
E	*F*	*G*	*A*	*B*	*C*	*D*
F	*G*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
G	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*

8 × 8

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*A*
C	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*A*	*B*
D	*E*	*F*	*G*	*H*	*A*	*B*	*C*
E	*F*	*G*	*H*	*A*	*B*	*C*	*D*
F	*G*	*H*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
G	*H*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
H	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*

9 × 9

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*
B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*A*
C	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*A*	*B*
D	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*A*	*B*	*C*
E	*F*	*G*	*H*	*I*	*A*	*B*	*C*	*D*
F	*G*	*H*	*I*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
G	*H*	*I*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
H	*I*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
I	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*

الملحق ب

مجموعات من البيانات

مجموعة بيانات (ب - ١) *SENIC*

الهدف الرئيس من دراسة فعالية التحكم بانتان مستشفى (مشروع **SENIC**) هو تحديد ما إذا كانت برامج مسح وضبط الانتانات قد خفضت من معدلات الانتانات المكتسبة من مستشفى في مستشفيات الولايات المتحدة. وتتألف مجموعة البيانات هذه من عينة عشوائية من 113 مستشفى اختيرت من بين الـ 338 مستشفى التي تناولها المسح.

ويتضمن كل سطر من مجموعة البيانات رقم تسلسل وأحد عشر متغيرا لمستشفى بمفرده. والبيانات المقدمة هنا خاصة بفترة الدراسة ١٩٧٦/٧٥م، والمتغيرات الـ ١٢ هي:

رقم المتغير	اسم المتغير	وصف المتغير
١	رقم تسلسل	1 - 113
٢	طول فترة الإقامة	متوسط فترة الإقامة لجميع المرضى في مستشفى (بالأيام)
٣	العمر	متوسط عمر المرضى (بالسنوات)
٤	مخاطرة الإصابة	تقدير لاحتمال اكتساب انتان في المستشفى في المتوسط (كنسبة مئوية)
٥	نسبة الزرع الروتيني	نسبة عدد حالات الزرع إلى عدد المرضى بدون إشارات أو أعراض انتان مكتسب من المستشفى، مضروبة بمائة.
٦	نسبة تصوير الصدر الروتيني بأشعة X	نسبة عدد الصور التي تمت بأشعة X إلى عدد المرضى بدون إشارات أو أعراض ذات الرئة

مضروبة بمائة.

رقم المتغير	اسم المتغير	وصف المتغير
٧	عدد الأسرّة	متوسط عدد الأسرة في المستشفى خلال فترة الدراسة
٨	الانتماء إلى مدرسة طبية	نعم = 1 لا = 2
٩	المنطقة	منطقة جغرافية حيث: 1 = NE، 2 = NC، 3 = S و 4 = W
١٠	متوسط التعداد اليومي	متوسط عدد المرضى اليومي في مستشفى خلال فترة الدراسة
١١	عدد الممرضات	العدد المتوسط للممرضات التطبيقيات المجازات والمسجلات المتفرغات، خلال فترة الدراسة (عدد المتفرغات + نصف عدد المتفرغات جزئيا)
١٢	التسهيلات والخدمات اليومية	النسبة المئوية لـ 35 من التسهيلات والخدمات الممكنة التي يوفرها المستشفى

المصدر: Special Issue, "The SENIC Project". *American Journal of Epidemiology* 111 (1980), pp. 465-653.

Data obtained from: Robert W. Haley, M.D., Hospital Infections Program, Center for Infectious Diseases, Centers for Disease Control, Atlanta, Georgia 30333.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	7.13	55.7	4.1	9.0	39.6	279	2	4	207	241	60.0
2	8.82	58.2	1.6	3.8	51.7	80	2	2	51	52	40.0
3	8.34	56.9	2.7	8.1	74.0	107	2	3	82	54	20.0
4	8.95	53.7	5.6	18.9	122.8	147	2	4	53	148	40.0
5	11.20	56.5	5.7	34.5	88.9	180	2	1	134	151	40.0
6	9.76	50.9	5.1	21.9	97.0	150	2	2	147	106	40.0
7	9.68	57.8	4.6	16.7	79.0	186	2	3	151	129	40.0
8	11.18	45.7	5.4	60.5	85.8	640	1	2	399	360	60.0
9	8.67	48.2	4.3	24.4	90.8	182	2	3	130	118	40.0
10	8.84	56.3	6.3	29.6	82.6	85	2	1	59	66	40.0
11	11.07	53.2	4.9	28.5	122.0	768	1	1	591	656	80.0
12	8.30	57.2	4.3	6.8	83.8	167	2	3	105	59	40.0
13	12.78	56.8	7.7	46.0	116.9	322	1	1	252	349	57.1
14	7.58	56.7	3.7	20.8	88.0	97	2	2	59	79	37.1
15	9.00	56.3	4.2	14.6	76.4	72	2	3	61	38	17.1
16	11.08	50.2	5.5	18.6	63.6	387	2	3	326	405	57.1
17	8.28	48.1	4.5	26.0	101.8	108	2	4	84	73	37.1
18	11.62	53.9	6.4	25.5	99.2	133	2	1	113	101	37.1
19	9.06	52.8	4.2	6.9	75.9	134	2	2	103	125	37.1
20	9.35	53.8	4.1	15.9	80.9	833	2	3	547	519	77.1
21	7.53	42.0	4.2	23.1	98.9	95	2	4	47	49	17.1
22	10.24	49.0	4.8	36.3	112.6	195	2	2	163	170	37.1
23	9.78	52.3	5.0	17.6	95.9	270	1	1	240	198	57.1
24	9.84	62.2	4.8	12.0	82.3	600	2	3	468	497	57.1
25	9.20	52.2	4.0	17.5	71.1	298	1	4	244	236	57.1
26	8.28	49.5	3.9	12.0	113.1	546	1	2	413	436	57.1
27	9.31	47.2	4.5	30.2	101.3	170	2	1	124	173	37.1
28	8.19	52.1	3.2	10.8	59.2	176	2	1	156	88	37.1
29	11.65	54.5	4.4	18.6	96.1	248	2	1	217	189	37.1
30	9.89	50.5	4.9	17.7	103.6	167	2	2	113	106	37.1
31	11.03	49.9	5.0	19.7	102.1	318	2	1	270	335	57.1
32	9.84	53.0	5.2	17.7	72.6	210	2	2	200	239	54.3
33	11.77	54.1	5.3	17.3	56.0	196	2	1	164	165	34.3
34	13.59	54.0	6.1	24.2	111.7	312	2	1	258	169	54.3
35	9.74	54.4	6.3	11.4	76.1	221	2	2	170	172	54.3
36	10.33	55.8	5.0	21.2	104.3	266	2	1	181	149	54.3
37	9.97	58.2	2.8	16.5	76.5	90	2	2	69	42	34.3
38	7.84	49.1	4.6	7.1	87.9	60	2	3	50	45	34.3
39	10.47	53.2	4.1	5.7	69.1	196	2	2	168	153	54.3
40	8.16	60.9	1.3	1.9	58.0	73	2	3	49	21	14.3
41	8.48	51.1	3.7	12.1	92.8	166	2	3	145	118	34.3
42	10.72	53.8	4.7	23.2	94.1	113	2	3	90	107	34.3
43	11.20	45.0	3.0	7.0	78.9	130	2	3	95	56	34.3
44	10.12	51.7	5.6	14.9	79.1	362	1	3	313	264	54.3
45	8.37	50.7	5.5	15.1	84.8	115	2	2	96	88	34.3
46	10.16	54.2	4.6	8.4	51.5	831	1	4	581	629	74.3
47	19.56	59.9	6.5	17.2	113.7	306	2	1	273	172	51.4
48	10.90	57.2	5.5	10.6	71.9	593	2	2	446	211	51.4
49	7.67	51.7	1.8	2.5	40.4	106	2	3	93	35	11.4
50	8.88	51.5	4.2	10.1	86.9	305	2	3	238	197	51.4
51	11.48	57.6	5.6	20.3	82.0	252	2	1	207	251	51.4
52	9.23	51.6	4.3	11.6	42.6	620	2	2	413	420	71.4
53	11.41	61.1	7.6	16.6	97.9	535	2	3	330	273	51.4
54	12.07	43.7	7.8	52.4	105.3	157	2	2	115	76	31.4
55	8.63	54.0	3.1	8.4	56.2	76	2	1	39	44	31.4
56	11.15	56.5	3.9	7.7	73.9	281	2	1	217	199	51.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
57	7.14	59.0	3.7	2.6	75.8	70	2	4	37	35	31.4
58	7.65	47.1	4.3	16.4	65.7	318	2	4	265	314	51.4
59	10.73	50.6	3.9	19.3	101.0	445	1	2	374	345	51.4
60	11.46	56.9	4.5	15.6	97.7	191	2	3	153	132	31.4
61	10.42	58.0	3.4	8.0	59.0	119	2	1	67	64	31.4
62	11.18	51.0	5.7	18.8	55.9	595	1	2	546	392	68.6
63	7.93	64.1	5.4	7.5	98.1	68	2	4	42	49	28.6
64	9.66	52.1	4.4	9.9	98.3	83	2	2	66	95	28.6
65	7.78	45.5	5.0	20.9	71.6	489	2	3	391	329	48.6
66	9.42	50.6	4.3	24.8	62.8	508	2	1	421	528	48.6
67	10.02	49.5	4.4	8.3	93.0	265	2	2	191	202	48.6
68	8.58	55.0	3.7	7.4	95.9	304	2	3	248	218	48.6
69	9.61	52.4	4.5	6.9	87.2	487	2	3	404	220	48.6
70	8.03	54.2	3.5	24.3	87.3	97	2	1	65	55	28.6
71	7.39	51.0	4.2	14.6	88.4	72	2	2	38	67	28.6
72	7.08	52.0	2.0	12.3	56.4	87	2	3	52	57	28.6
73	9.53	51.5	5.2	15.0	65.7	298	2	3	241	193	48.6
74	10.05	52.0	4.5	36.7	87.5	184	1	1	144	151	68.6
75	8.45	38.8	3.4	12.9	85.0	235	2	2	143	124	48.6
76	6.70	48.6	4.5	13.0	80.8	76	2	4	51	79	28.6
77	8.90	49.7	2.9	12.7	86.9	52	2	1	37	35	28.6
78	10.23	53.2	4.9	9.9	77.9	752	1	2	595	446	68.6
79	8.88	55.8	4.4	14.1	76.8	237	2	2	165	182	48.6
80	10.30	59.6	5.1	27.8	88.9	175	2	2	113	73	45.7
81	10.79	44.2	2.9	2.6	56.6	461	1	2	320	196	65.7
82	7.94	49.5	3.5	6.2	92.3	195	2	2	139	116	45.7
83	7.63	52.1	5.5	11.6	61.1	197	2	4	109	110	45.7
84	8.77	54.5	4.7	5.2	47.0	143	2	4	85	87	25.7
85	8.09	56.9	1.7	7.6	56.9	92	2	3	61	61	45.7
86	9.05	51.2	4.1	20.5	79.8	195	2	3	127	112	45.7
87	7.91	52.8	2.9	11.9	79.5	477	2	3	349	188	65.7
88	10.39	54.6	4.3	14.0	88.3	353	2	2	223	200	65.7
89	9.36	54.1	4.8	18.3	90.6	165	2	1	127	158	45.7
90	11.41	50.4	5.8	23.8	73.0	424	1	3	359	335	45.7
91	8.86	51.3	2.9	9.5	87.5	100	2	3	65	53	25.7
92	8.93	56.0	2.0	6.2	72.5	95	2	3	59	56	25.7
93	8.92	53.9	1.3	2.2	79.5	56	2	2	40	14	5.7
94	8.15	54.9	5.3	12.3	79.8	99	2	4	55	71	25.7
95	9.77	50.2	5.3	15.7	89.7	154	2	2	123	148	25.7
96	8.54	56.1	2.5	27.0	82.5	98	2	1	57	75	45.7
97	8.66	52.8	3.8	6.8	69.5	246	2	3	178	177	45.7
98	12.01	52.8	4.8	10.8	96.9	298	2	1	237	115	45.7
99	7.95	51.8	2.3	4.6	54.9	163	2	3	128	93	42.9
100	10.15	51.9	6.2	16.4	59.2	568	1	3	452	371	62.9
101	9.76	53.2	2.6	6.9	80.1	64	2	4	47	55	22.9
102	9.89	45.2	4.3	11.8	108.7	190	2	1	141	112	42.9
103	7.14	57.6	2.7	13.1	92.6	92	2	4	40	50	22.9
104	13.95	65.9	6.6	15.6	133.5	356	2	1	308	182	62.9
105	9.44	52.5	4.5	10.9	58.5	297	2	3	230	263	42.9
106	10.80	63.9	2.9	1.6	57.4	130	2	3	69	62	22.9
107	7.14	51.7	1.4	4.1	45.7	115	2	3	90	[illegible]	[illegible]
108	8.02	55.0	2.1	3.8	46.5	91	2	2	44	32	22.9
109	11.80	53.8	5.7	9.1	116.9	571	1	2	441	469	62.9
110	9.50	49.3	5.8	42.0	70.9	98	2	3	68	46	22.9
111	7.70	56.9	4.4	12.2	67.9	129	2	4	85	136	62.9
112	17.94	56.2	5.9	26.4	91.8	835	1	1	791	407	62.9
113	9.41	59.5	3.1	20.6	91.7	29	2	3	20	22	22.9

مجموعة بيانات (ب ـ٢) مساحات حضرية إحصائية قياسية في الولايات المتحدة الأمريكة *SMSA*

تقدم مجموعة البيانات هذه معلومات حول 141 مساحة حضرية إحصائية قياسية ضخمة في الولايات المتحدة (SMSA). وتشمل المساحة الإحصائية الحضرية القياسية مدينة (أو مدن) بحجم سكاني محدد وتتشكل من مدينة مركزية والمقاطعة (أو المقاطعات) التي تقع فيها المدينة، بالإضافة إلى مقاطعات مجاورة عندما تحقق العلاقات الاجتماعية والاقتصادية بين المقاطعات المركزية والمقاطعات المجاورة معايير محددة من التكامل والمميزات الحضرية. ويمكن أن تتضمن *SMSA* عددا من المدن يصل إلى ثلاثة مدن، كما يمكن أن تعتبر حدود ولاية.

ويتضمن كل سطر من مجموعة البيانات رقم تسلسلي كما يقدم معلومات حول ١١ من المتغيرات الأخرى الخاصة بمساحة بمفردها (SMSA). وتتعلق المعلومات بصورة عامة بالعامين ١٩٧٦ و ١٩٧٧ والمتغيرات الـ ١٢ هي:

رقم المتغير	اسم المتغير	وصف المتغير
١	رقم تسلسل	1 - 141
٢	مساحة الأرض	بالأميال المربعة
٣	عدد السكان	كما هو مقدّر عام ١٩٧٧م (بالآلاف)
٤	النسبة المئوية من السكان في مدن مركزية	النسبة المئوية من سكان الـ SMSA عام ١٩٧٦م في مدينة أو مدن مركزية.
٥	النسبة المئوية لسكان بعمر ٦٥ أو أكبر	النسبة المئوية من سكان الـ SMSA عام ١٩٧٦ ممن أعمارهم ٦٥ سنة فأكثر
٦	عدد الأطباء العاملين	عدد الأطباء غير الاتحاديين الناشطين مهنيا حتى ٣١ ديسمبر ١٩٧٧م.
٧	عدد الأسرة في مستشفى	العدد الكلي للأسِرّة، وأسِرّة الأطفال وأسِرّة الأطفال الشبيهة بالسلّة خلال عام ١٩٧٧م.

رقم المتغير	اسم المتغير	وصف المتغير
٨	النسبة المئوية للمتخرجين من المرحلة الثانوية	النسبة المئوية من السكان البالغين (أشخاص أعمارهم ٢٥ سنة فأكثر) الذين أتموا ١٢ سنة تعليم أو أكثر وفقا لتعداد عام ١٩٧٠ السكاني
٩	القوة العاملة المدنية	العدد الكلي للأشخاص في القوة العاملة المدنية (أشخاص أعمارهم ١٦ سنة فأكثر مصنفون كعاملين أو كعاطلين عن العمل) في ١٩٧٧م (بالآلاف)
١٠	الدخل الشخصي الإجمالي	الدخل الراهن الإجمالي الذي يتلقاه المقيمون في الـ *SMSA* من جميع المصادر عام ١٩٧٦م قبل اقتطاع ضريبة الدخل والضرائب الشخصية للضمان الاجتماعي وبرامج التأمين الاجتماعي الأخرى (بملايين الدولارات)
١١	عدد الجرائم الخطرة	العدد الكلي للجرائم الخطرة في ١٩٧٧، بما في ذلك جرائم القتل، الاغتصاب، السرقة، الاعتداء، السطو على المنازل، اللصوصية وسرقة السيارات، كما أفادت عنها وكالات الأمن.
١٢	منطقة جغرافية	تصنيف المنطقة الجغرافية هو التصنيف المستخدم في مكتب التعداد في الولايات المتحدة، حيث: $1 = NE$، $2 = NC$، $3 = S$ و $4 = W$

المصدر: U.S. Bureau of the Census, *State and Metropolitan Area Data Book*, 1979 (a Statistical Abstract Supplement).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1384	9387	78.1	12.3	25627	69678	50.1	4083.9	72100	709234	1
2	4069	7031	44.0	10.0	15389	39699	62.0	3353.6	52737	499813	4
3	3719	7017	43.9	9.4	13326	43292	53.9	3305.9	54542	393162	2
4	3553	4794	37.4	10.7	9724	33731	50.6	2066.3	33216	198102	1
5	3916	4370	29.9	8.8	6402	24167	52.2	1966.7	32906	294466	2
6	2480	3182	31.5	10.5	8502	16751	66.1	1514.5	26573	255162	4
7	2815	3033	23.1	6.7	7340	16941	68.3	1541.9	25663	177355	3
8	1218	2688	0.0	8.8	5255	22137	62.9	1213.3	21524	127567	1
9	8360	2673	46.3	8.2	4047	14347	53.6	1321.2	18350	193125	3
10	6794	2512	60.1	6.3	4562	14333	51.7	1272.7	18221	162976	3
11	4935	2380	21.8	11.0	4071	17752	47.8	1061.2	16120	137479	2
12	3049	2294	19.5	12.1	4005	21149	53.4	967.5	15826	69989	1
13	2259	2147	38.6	9.3	5141	16485	44.6	966.8	14246	138214	3
14	4647	2037	31.5	9.2	3916	12815	65.1	1032.2	14542	112642	2
15	1008	1969	16.6	10.3	4006	16704	55.9	935.5	15953	106646	1
16	1519	1950	31.8	10.5	4094	12545	54.6	906.0	14684	102816	2
17	4326	1832	23.6	7.3	3064	9976	50.4	867.2	12107	106482	3
18	782	1801	28.4	7.8	3119	8656	70.5	915.2	12591	113821	4
19	4261	1683	48.6	9.7	3396	7552	65.3	644.3	10392	112359	4
20	4651	1464	38.8	7.7	3380	8517	67.4	729.2	10375	116861	4
21	2042	1441	24.5	16.5	4071	10039	51.9	681.7	10166	116304	3
22	4226	1427	38.1	9.8	3285	5392	67.8	699.8	10918	91399	4
23	1456	1427	46.7	10.4	2484	8555	56.8	710.4	10104	63695	2
24	2045	1380	37.2	21.4	1949	8863	50.7	543.2	7989	89257	3
25	2149	1375	29.8	10.6	2530	8354	48.4	617.6	9037	68319	2
26	1590	1313	30.1	10.9	2296	9988	50.4	565.7	8411	67965	1
27	27293	1306	25.3	12.3	2018	6323	57.4	510.6	7399	99293	4
28	3341	1293	35.8	10.1	2289	7593	59.9	656.3	9106	81510	2
29	9155	1254	53.8	11.1	2280	6450	60.1	575.2	7766	107370	4
30	1300	1217	47.6	6.8	2794	4989	69.0	610.8	9215	76570	4
31	3072	1144	68.0	9.3	2181	7497	56.0	549.6	7736	61381	2
32	1967	1133	51.1	8.8	2520	8467	45.8	460.5	7038	69285	3
33	3650	1121	34.6	11.1	2358	6224	62.9	539.3	7792	77316	4
34	2460	1087	49.6	8.4	1874	7706	59.9	510.7	6658	62603	2
35	2527	1025	78.7	8.4	1760	7664	46.5	391.1	5582	62694	3
36	2966	970	26.9	10.3	2053	6604	56.3	450.4	6966	54854	1
37	3434	929	28.9	8.3	1844	3215	65.1	422.6	5909	72410	4
38	1392	883	37.2	9.8	1579	6087	46.5	396.8	5705	45642	3
39	2298	886	76.2	9.0	1644	7673	48.2	394.6	5185	52094	3
40	1219	864	31.7	20.6	1396	6158	55.4	352.8	5879	68109	3
41	1708	833	24.0	8.8	1062	5315	56.2	367.5	5489	52606	2
42	8565	822	29.7	7.3	1604	3485	67.6	349.3	4655	49111	4
43	3358	805	35.1	11.3	1649	5512	44.9	359.1	4941	42786	3
44	2624	794	30.4	12.2	1532	4730	55.2	356.5	5094	30771	1
45	2187	777	47.0	10.2	1098	4342	51.9	355.4	5142	46213	2
46	3214	774	47.7	9.4	1285	3459	40.3	401.7	4924	34941	3
47	3491	769	48.5	9.7	1496	5620	59.6	362.3	4798	44513	3
48	4080	773	59.6	9.9	1597	7496	47.3	380.9	4600	33936	3
49	596	723	100.0	6.0	1260	2819	66.0	319.9	5181	46984	4
50	3199	694	80.6	8.7	983	4749	50.8	292.4	4127	43010	3
51	903	661	37.3	9.6	948	4064	55.6	293.3	4102	34725	2
52	2419	647	27.8	9.9	1250	2870	57.8	286.8	3860	30829	1
53	938	644	48.1	7.4	614	3016	50.0	280.9	4177	35106	2
54	1951	629	28.4	14.5	696	4843	47.9	271.5	3667	14868	1
55	1490	624	33.1	11.9	827	3818	47.4	300.2	4144	19090	1
56	5677	610	55.8	10.5	760	3883	56.2	292.0	4035	32146	3
57	1525	597	55.7	8.3	751	3234	44.9	318.5	3777	37070	3
58	2528	593	19.2	10.2	798	3135	55.4	274.1	3489	44442	3
59	312	594	19.5	7.5	769	2463	55.0	298.7	4352	29100	1
60	1537	581	63.8	8.7	1234	5160	62.7	272.6	3725	32271	2
61	1420	576	32.6	9.5	833	2950	54.0	280.8	3553	26645	2
62	47	564	41.9	11.9	745	3352	36.3	258.9	3915	29157	1
63	1023	541	35.1	10.0	639	3144	52.1	234.1	3437	22111	2
64	2115	526	19.9	9.1	676	2296	38.8	253.3	2962	30684	3
65	1182	514	32.4	7.4	518	2515	52.4	216.8	3627	35201	2
66	1165	516	14.5	8.6	746	4277	54.4	237.1	3724	31358	3
67	476	492	8.9	10.9	787	2778	60.1	218.4	3603	24787	1
68	1553	487	50.0	8.0	2207	4931	52.0	257.2	2991	24269	3
69	2023	477	22.1	21.8	752	2317	55.7	194.2	3283	36418	3
70	2766	474	67.9	7.7	679	3873	56.3	224.0	2598	29967	3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
71	5966	472	39.5	9.6	737	1907	52.7	246.6	3007	38205	4
72	1863	468	50.4	7.7	674	2989	63.8	194.8	2747	25159	4
73	192	462	60.5	10.8	617	1789	44.1	212.6	3158	27161	1
74	9240	455	67.0	10.3	1123	2347	63.1	183.6	2598	41649	4
75	2277	455	39.5	7.5	512	1788	61.9	221.1	2853	20053	2
76	1630	449	41.9	10.7	724	4395	50.0	198.0	2445	17596	3
77	1617	435	71.0	6.9	518	2031	54.1	197.9	2617	31539	3
78	1057	435	90.7	6.1	479	2551	51.1	163.4	2012	25650	3
79	1624	429	13.4	11.0	832	2938	55.4	207.8	2885	16985	1
80	1676	423	36.6	9.2	505	3297	60.7	156.3	2689	24266	4
81	2818	425	48.5	9.3	540	2694	42.3	172.8	2162	22374	3
82	2866	408	24.9	10.7	427	2864	39.1	169.1	1987	10425	3
83	4883	402	72.4	7.3	873	2236	64.9	185.2	2353	28171	4
84	966	401	24.9	10.6	427	3192	52.2	174.7	2446	15981	2
85	2109	403	41.2	10.3	520	2539	45.2	183.1	2308	16240	3
86	2449	395	68.4	9.6	681	2864	63.2	207.4	2651	25149	2
87	2618	385	31.7	6.1	836	2159	48.0	145.6	1992	25046	3
88	1465	374	30.3	6.8	598	6456	50.6	164.7	2201	26428	3
89	1704	375	52.1	10.5	379	2491	55.6	173.2	2662	18599	2
90	1750	370	49.3	9.7	446	3472	58.2	176.5	2439	16529	2
91	1489	369	58.8	9.5	911	5720	56.5	175.1	2264	26032	3
92	8152	363	22.3	9.1	405	1254	51.7	165.6	2257	28351	4
93	2207	364	57.3	9.7	356	2167	45.5	165.9	2331	19138	3
94	7874	360	44.4	6.9	398	1365	65.2	174.2	2410	33687	4
95	655	364	75.2	6.6	425	3879	51.6	163.0	2088	15623	3
96	1803	362	35.3	10.4	483	2137	53.7	168.9	2666	16405	2
97	2363	356	53.1	10.6	565	2717	49.3	146.4	1996	19212	3
98	1435	352	13.4	11.7	342	1076	44.7	156.8	2165	11273	1
99	946	348	16.4	11.1	366	1455	43.9	163.8	2178	8116	1
100	1136	333	58.6	9.7	448	2630	68.1	171.4	2396	20465	2
101	2658	327	39.0	12.2	365	5430	49.9	136.9	1862	9325	1
102	228	317	31.1	10.2	667	3179	52.8	156.5	2264	19410	1
103	1758	310	56.8	11.5	565	2081	65.3	131.2	1939	17379	4
104	1198	313	55.1	8.0	1171	3877	71.2	172.3	2038	18676	2
105	1412	311	39.2	11.3	436	1837	49.4	154.2	2098	25714	4
106	2071	306	19.9	11.3	470	2531	58.9	133.1	1782	11161	1
107	862	302	26.3	13.4	423	1929	43.3	145.5	2010	7699	1
108	1526	303	71.7	7.7	413	1636	47.1	125.8	1692	20038	3
109	1758	297	33.2	11.6	296	2652	45.3	114.4	1641	12467	3
110	1651	296	64.6	8.9	774	5431	56.1	136.9	1724	14468	3
111	1493	294	64.8	8.9	863	3289	53.7	154.7	1787	15871	3
112	1610	294	59.8	9.5	471	4633	62.9	116.1	1851	18651	4
113	2710	288	63.7	6.2	357	1277	72.8	110.9	1639	18173	4
114	1975	291	46.5	12.6	405	2896	51.5	133.8	1853	12787	2
115	1920	291	49.8	7.8	283	1306	53.2	126.9	1553	12315	3
116	1404	289	38.5	10.0	299	1766	56.2	138.6	1776	11715	2
117	2737	287	45.0	10.5	602	1462	71.3	131.4	1980	18208	4
118	1700	287	18.8	8.0	739	3381	45.9	120.4	1616	14534	3
119	909	277	41.2	11.5	307	1309	54.2	131.9	1762	13722	2
120	1858	277	24.3	13.7	354	1562	46.3	116.9	1507	19133	3
121	3324	275	49.7	8.4	373	929	62.5	120.5	1918	14776	4
122	1697	274	23.8	7.2	338	1610	51.0	105.9	1354	19317	3
123	813	272	46.0	9.8	293	1693	58.4	119.9	1688	10402	1
124	7397	267	47.3	12.1	355	2042	56.2	113.7	1654	12273	2
125	1165	268	43.7	9.4	450	2070	57.5	129.4	1719	16226	2
126	802	268	52.6	9.8	392	1425	52.2	129.6	1816	13230	2
127	1770	268	14.8	12.2	285	2804	44.1	106.7	1537	4205	1
128	495	264	50.7	7.8	220	1177	52.6	119.5	1661	8398	2
129	1255	261	26.0	10.7	458	1646	51.6	113.0	1725	10208	3
130	1148	589	45.3	11.1	891	5790	54.0	277.0	3510	29237	1
131	1509	643	37.6	12.0	1087	4900	51.4	319.6	3982	29058	1
132	2013	254	61.7	9.7	273	1484	50.9	106.7	1412	14446	3
133	711	250	42.4	6.1	1411	3659	67.5	131.0	1790	16228	2
134	471	251	46.3	8.6	219	1128	47.8	105.3	1458	13474	2
135	4552	249	54.4	9.1	329	719	61.9	118.0	1386	15596	4
136	1400	242	50.8	8.0	290	1271	45.7	104.4	1351	10391	3
137	1511	236	38.7	10.7	348	1093	50.4	127.2	1452	16676	4
138	1543	232	39.6	8.1	159	481	30.3	80.6	769	8436	3
139	1011	233	37.8	10.5	264	964	70.7	93.2	1337	14018	3
140	813	232	13.4	10.9	371	4355	58.0	97.0	1589	8428	1
141	654	231	28.8	3.9	140	1296	55.1	66.9	1148	15884	3

مجموعات بيانات (ب ـ ٣) تجربة تأثيرات المخدرات

تقدم هذه المجموعة من البيانات نتائج مأخوذة من تجربة دُرست فيها آثار المخدر على سلوك الفئران. السلوك المدروس هو معدل ضغط فأر محروم من الماء لذراع رافعة كي يحصل على الماء. وقد نُفذت التجربة في جزئين. ويحدد المتغير ٢ جزئي الدراسة (1,2).

في الجزء *I* من الدراسة استُخدم ١٢ من الفئران البيضاء الذكور من السلالة نفسها ولها تقريبا الوزن نفسه. ويحدد المتغير ٣ كل فأر (1,...,12)، وقبل التجربة دُرّب كل فأر على ضغط ذراع رافعة للحصول على الماء حتى بلوغ معدل مستقر للضغط. ودُرس في هذه التجربة عاملان ـ المعدل الابتدائي لضغط الذراع (عامل *A*) واستخدام المخدر (عامل *B*). وقد صُنِّفت الفئران الـ ١٢ إلى إحدى ثلاث مجموعات وفقا للمعدل الابتدائي لضغط الذراع (1, 2, 3). المستوى الأول هو معدل بطيء المستوى، الثاني معدل معتدل، والمستوى الثالث معدل سريع، وقد عُرفت المستويات بحيث يصنّف ثلث الفئران إلى كل من المستويات الثلاثة.

ودُرست أربعة مستويات لجرعة المخدر، بما في ذلك المستوى *0* المؤلف من محلول ملحي. ويحدد المتغير ٥ جرعة المخدر (1,...,4). وكل مستويات الجرعة محددة بدلالة الملليغرام من المخدر لكل كيلو غرام من وزن الفأر.

وبعد ساعة من حقن المخدر بدأ دورة تجريبية يتلقى الفأر خلالها الماء في كل مرة بعد الضغط الثاني للذراع. وسنرمز لهذا البرنامج التنفيذي بالرمز *FR* - 2. وقد تلقى كل فأر المستويات الأربعة من الجرعات بترتيب عشوائي. وقد أعطيت كل جرعة مخدر مرتين لكل فأر مما أتاح وحدتي مشاهدة لكل معالجة. ويحدد المتغير ٦ وحدة المشاهدة (1,2).

وقد عُرف متغير الاستجابة بأنه عدد المرات، الكلي لضغط الذراع مقسوما على الزمن المنصرم بالثواني خلال دورة تجريبية لمعالجة معينة. والمتغير ٧ هو متغير الاستجابة.

وفي الجزء الثاني من الدراسة استُخدم ١٢ فأرا ذكرا أبيض آخر من السلالة نفسها والوزن نفسه تقريبا المستخدم في الجزء I. ويحدد المتغير 2 هذا الجزء من الدراسة والمتغير ٣ يحدد الفئران الـ ١٢ الإضافية (13,...,24). والتصميم التجريبي للجزء *II* من

الدراسة كان متطابقا بالضبط مع الجزء I، باستثناء أن كل فأر يتلقى الماء في كل مرة بعد الضغط الخامس للذراع. وسنرمز لهذا البرنامج التنفيذي بالرمز $FR - 5$. ويحدد المتغير ٢ البرنامج التنفيذي باعتبار أن الجزء I من الدراسة استخدم البرنامج $FR - 2$ بينما استخدم جزؤها الثاني البرنامج $FR - 5$. وهكذا يشكل البرنامج التنفيذي عاملا آخر (العامل C) تمت دراسته في التجربة المركبة بجزئيها.

ونلخص فيما يلي المتغيرات لهذا التصميم التجريبي:

رقم المتغير	اسم المتغير	وصف المتغير
١	رقم تسلسلي	1 - 192
٢	جزء الدراسة (العامل C : برنامج تنفيذي)	الجزء الأول $FR - 2$: 1 الجزء الثاني $FR - 2$: 2
٣	هوية الفأر	1 - 24
٤	المعدل الابتدائي لضغط الذراع (عامل A)	بطيء: 1 معتدل: 2 سريع: 3
٥	مستوى الجرعة (مغ/كغ) (عامل B)	محلول ملحي 0 : 1 2 :0.5 3 : 1.0 4 : 1.8
٦	وحدة مشاهدة	1,2
٧	متغير الاستجابة ـ معدل ضغط الذراع (عدد المرات الكلي لضغط الذراع مقسوما على الزمن المنصرم بالثواني)	

المصدر: T.G. Heffner, R.B. Drawbaugh, and M.J. Zigmond, "Amphetamine and Operant Behavior in Rats: Relationship between Drug Effect and Contrl Response Rate," *Journal of Comparative and Physiological Psychology* 86 (1974), pp. 1031-43.

تعريف مصادر SMSA

1 NEW YORK, NY
2 LOS ANGELES, CA
3 CHICAGO, IL
4 PHILADELPHIA, PA
5 DETROIT, MI
6 SAN FRANCISCO, CA
7 WASHINGTON, DC
8 NASSAU, NY
9 DALLAS, TX
10 HOUSTON, TX
11 ST. LOUIS, MO
12 PITTSBURG, PA
13 BALTIMORE, MD
14 MINNEAPOLIS, MN
15 NEWARK, NJ
16 CLEVELAND, OH
17 ATLANTA, GA
18 ANAHEIM, CA
19 SAN DIEGO, CA
20 DENVER, CO
21 MIAMI, FL
22 SEATTLE, WA
23 MILWAUKEE, WI
24 TAMPA, FL
25 CINCINNATI, OH
26 BUFFALO, NY
27 RIVERSIDE, CA
28 KANSAS CITY, MO
29 PHOENIX, AZ
30 SAN JOSE, CA
31 INDIANAPOLIS, IN
32 NEW ORLEANS, LA
33 PORTLAND, OR
34 COLUMBUS, OH
35 SAN ANTONIO, TX
36 ROCHESTER, NY
37 SACRAMENTO, CA
38 LOUISVILLE, KY
39 MEMPHIS, TN
40 FT. LAUDERDALE, FL
41 DAYTON, OH
42 SALT LAKE CITY, UT
43 BIRMINGHAM, AL
44 ALBANY, NY
45 TOLEDO, OH
46 GREENSBORO, NC
47 OKLAHOMA CITY, OK
48 NASHVILLE, TN
49 HONOLULU, HI
50 JACKSONVILLE, FL
51 AKRON, OH
52 SYRACUSE, NY
53 GARY, IN
54 NORTHEAST, PA
55 ALLENTOWN, PA
56 TULSA, OK
57 CHARLOTTE, NC
58 ORLANDO, FL
59 NEW BRUNSWICK, NJ
60 OMAHA, NE
61 GRAND RAPIDS, MI
62 JERSEY CITY, NJ
63 YOUNGSTOWN, OH
64 GREENVILLE, SC
65 FLINT, MI
66 WILMINGTON, DE
67 LONG BRANCH, NJ
68 RALEIGH, NC
69 W. PALM BEACH, FL
70 AUSTIN, TX
71 FRESNO, CA
72 OXNARD, CA
73 PATERSON, NJ
74 TUCSON, AZ
75 LANSING, MI
76 KNOXVILLE, TN
77 BATON ROUGE, LA
78 EL PASO, TX
79 HARRISBURG, PA
80 TACOMA, WA
81 MOBILE, AL
82 JOHNSON CITY, TN
83 ALBUQUERQUE, NM
84 CANTON, OH
85 CHATANOOGA, TN
86 WICHITA, KS
87 CHARLESTON, SC
88 COLUMBIA, SC
89 DAVENPORT, IA
90 FORT WAYNE, IN
91 LITTLE ROCK, AR
92 BAKERSFIELD, CA
93 BEAUMONT, TX
94 LAS VEGAS, NV
95 NEWPORT NEWS, VA
96 PEORIA, IL
97 SHREVEPORT, LA
98 YORK, PA
99 LANCASTER, PA
100 DES MOINES, IA
101 UTICA, NY
102 TRENTON, NJ
103 SPOKANE, WA
104 MADISON, WI
105 STOCKTON, CA
106 BINGHAMTON, NY
107 READING, PA
108 CORPUS CHRISTI, TX
109 HUNTINGTON, WV
110 JACKSON, MS
111 LEXINGTON, KY
112 VALLEJO, CA
113 COLORADO SPRINGS, CO
114 EVANSVILLE, IN
115 HUNTSVILLE, AL
116 APPLETON, WI
117 SANTA BARBARA, CA
118 AUGUSTA, GA
119 SOUTH BEND, IN
120 LAKELAND, FL
121 SALINAS, CA
122 PENSACOLA, FL
123 ERIE, PA
124 DULUTH, MN
125 KALAMAZOO, MI
126 ROCKFORD, IL
127 JOHNSTOWN, PA
128 LORAIN, OH
129 CHARLESTON, WV
130 SPRINGFIELD, MA
131 WORCESTER, MA
132 MONTGOMERY, AL
133 ANN ARBOR, MI
134 HAMILTON, OH
135 EUGENE, OR
136 MACON, GA
137 MODESTO, CA
138 MCALLEN, TX
139 MELBOURNE, FL
140 POUGHKEEPSIE, NY
141 FAYETTEVILLE, NC

1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	.81
2	1	1	1	2	1	.80
3	1	1	1	3	1	.82
4	1	1	1	4	1	.50
5	1	2	1	1	1	.77
6	1	2	1	2	1	.78
7	1	2	1	3	1	.79
8	1	2	1	4	1	.51
9	1	3	1	1	1	.80
10	1	3	1	2	1	.82
11	1	3	1	3	1	.83
12	1	3	1	4	1	.52
13	1	4	1	1	1	.95
14	1	4	1	2	1	.95
15	1	4	1	3	1	.91
16	1	4	1	4	1	.60
17	1	5	2	1	1	1.03
18	1	5	2	2	1	1.13
19	1	5	2	3	1	1.04
20	1	5	2	4	1	.82
21	1	6	2	1	1	.96
22	1	6	2	2	1	.93
23	1	6	2	3	1	1.02
24	1	6	2	4	1	.63
25	1	7	2	1	1	.98
26	1	7	2	2	1	1.00
27	1	7	2	3	1	.98
28	1	7	2	4	1	.74
29	1	8	2	1	1	1.17
30	1	8	2	2	1	1.20
31	1	8	2	3	1	1.18
32	1	8	2	4	1	.91
33	1	9	3	1	1	1.20
34	1	9	3	2	1	1.24
35	1	9	3	3	1	1.27
36	1	9	3	4	1	.96
37	1	10	3	1	1	1.25
38	1	10	3	2	1	1.23
39	1	10	3	3	1	1.30
40	1	10	3	4	1	1.01
41	1	11	3	1	1	1.23
42	1	11	3	2	1	1.20
43	1	11	3	3	1	1.18
44	1	11	3	4	1	.95
45	1	12	3	1	1	1.31
46	1	12	3	2	1	1.42
47	1	12	3	3	1	1.41
48	1	12	3	4	1	1.08
49	1	1	1	1	2	.84
50	1	1	1	2	2	.85
51	1	1	1	3	2	.88
52	1	1	1	4	2	.58
53	1	2	1	1	2	.72
54	1	2	1	2	2	.73
55	1	2	1	3	2	.74
56	1	2	1	4	2	.42
57	1	3	1	1	2	.73
58	1	3	1	2	2	.76
59	1	3	1	3	2	.75
60	1	3	1	4	2	.48
61	1	4	1	1	2	.89
62	1	4	1	2	2	.90
63	1	4	1	3	2	.97
64	1	4	1	4	2	.67
65	1	5	2	1	2	1.11
66	1	5	2	2	2	1.02
67	1	5	2	3	2	1.12
68	1	5	2	4	2	.75
69	1	6	2	1	2	1.01
70	1	6	2	2	2	1.05
71	1	6	2	3	2	.95
72	1	6	2	4	2	.72
73	1	7	2	1	2	1.05
74	1	7	2	2	2	1.07
75	1	7	2	3	2	1.05
76	1	7	2	4	2	.79
77	1	8	2	1	2	1.12
78	1	8	2	2	2	1.13
79	1	8	2	3	2	1.11
80	1	8	2	4	2	.83
81	1	9	3	1	2	1.28
82	1	9	3	2	2	1.17
83	1	9	3	3	2	1.21
84	1	9	3	4	2	.91
85	1	10	3	1	2	1.21
86	1	10	3	2	2	1.31
87	1	10	3	3	2	1.22
88	1	10	3	4	2	.93
89	1	11	3	1	2	1.16
90	1	11	3	2	2	1.15
91	1	11	3	3	2	1.23
92	1	11	3	4	2	1.02
93	1	12	3	1	2	1.40
94	1	12	3	2	2	1.33
95	1	12	3	3	2	1.35
96	1	12	3	4	2	1.20

1	2	3	4	5	6	7
97	2	13	1	1	1	2.18
98	2	13	1	2	1	2.44
99	2	13	1	3	1	1.92
100	2	13	1	4	1	.92
101	2	14	1	1	1	2.02
102	2	14	1	2	1	2.20
103	2	14	1	3	1	1.75
104	2	14	1	4	1	.82
105	2	15	1	1	1	2.06
106	2	15	1	2	1	2.28
107	2	15	1	3	1	1.86
108	2	15	1	4	1	.80
109	2	16	1	1	1	2.28
110	2	16	1	2	1	2.46
111	2	16	1	3	1	1.90
112	2	16	1	4	1	.90
113	2	17	2	1	1	2.62
114	2	17	2	2	1	2.58
115	2	17	2	3	1	2.21
116	2	17	2	4	1	1.03
117	2	18	2	1	1	2.60
118	2	18	2	2	1	2.60
119	2	18	2	3	1	2.34
120	2	18	2	4	1	1.14
121	2	19	2	1	1	2.39
122	2	19	2	2	1	2.41
123	2	19	2	3	1	2.09
124	2	19	2	4	1	.90
125	2	20	2	1	1	2.70
126	2	20	2	2	1	2.64
127	2	20	2	3	1	2.23
128	2	20	2	4	1	1.02
129	2	21	3	1	1	2.98
130	2	21	3	2	1	2.64
131	2	21	3	3	1	2.34
132	2	21	3	4	1	1.28
133	2	22	3	1	1	3.10
134	2	22	3	2	1	2.85
135	2	22	3	3	1	2.40
136	2	22	3	4	1	1.35
137	2	23	3	1	1	2.80
138	2	23	3	2	1	2.48
139	2	23	3	3	1	2.16
140	2	23	3	4	1	1.01
141	2	24	3	1	1	3.21
142	2	24	3	2	1	2.92
143	2	24	3	3	1	2.56
144	2	24	3	4	1	1.40
145	2	13	1	1	2	2.26
146	2	13	1	2	2	2.40
147	2	13	1	3	2	1.99
148	2	13	1	4	2	.99
149	2	14	1	1	2	1.96
150	2	14	1	2	2	2.18
151	2	14	1	3	2	1.81
152	2	14	1	4	2	.78
153	2	15	1	1	2	2.10
154	2	15	1	2	2	2.24
155	2	15	1	3	2	1.92
156	2	15	1	4	2	.88
157	2	16	1	1	2	2.35
158	2	16	1	2	2	2.49
159	2	16	1	3	2	1.95
160	2	16	1	4	2	.96
161	2	17	2	1	2	2.68
162	2	17	2	2	2	2.64
163	2	17	2	3	2	2.17
164	2	17	2	4	2	.96
165	2	18	2	1	2	2.66
166	2	18	2	2	2	2.62
167	2	18	2	3	2	2.28
168	2	18	2	4	2	1.23
169	2	19	2	1	2	2.43
170	2	19	2	2	2	2.48
171	2	19	2	3	2	2.16
172	2	19	2	4	2	.84
173	2	20	2	1	2	2.66
174	2	20	2	2	2	2.70
175	2	20	2	3	2	2.27
176	2	20	2	4	2	.98
177	2	21	3	1	2	2.94
178	2	21	3	2	2	2.70
179	2	21	3	3	2	2.44
180	2	21	3	4	2	1.33
181	2	22	3	1	2	3.20
182	2	22	3	2	2	2.91
183	2	22	3	3	2	2.45
184	2	22	3	4	2	1.39
185	2	23	3	1	2	2.84
186	2	23	3	2	2	2.53
187	2	23	3	3	2	2.23
188	2	23	3	4	2	1.07
189	2	24	3	1	2	3.31
190	2	24	3	2	2	2.98
191	2	24	3	3	2	2.47
192	2	24	3	4	2	1.51

الملحق جـ

مختارات من المراجع

المراجع المختارة مصنفة في خمسة أصناف:

١ ـ كتب انحدار عامة.

٢ ـ تشخيصات وبناء نماذج.

٣ ـ حسابات إحصائية.

٤ ـ كتب عامة في التصميم التجريبي وتحليل التباين.

٥ ـ مواضيع متفرقة.

١– كتب انحدار عامة.

Allen, D. M., and F. B. Cady. *Analyzing Experimental Data by Regression*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982.

Bowerman, B. L.; R. T. O'Connell; and D. A. Dickey. *Linear Statistical Models: An Applied Approach*. Boston: Duxbury Press, 1986.

Brook, R. J., and G. C. Arnold. *Applied Regression Analysis and Experimental Design*. New York: Marcel Dekker, 1985.

Chatterjee, S., and B. Price. *Regression Analysis by Example*. New York: John Wiley & Sons, 1977.

Cohen, J., and P. Cohen. *Applied Multiple Regression/Correlation Analysis for the Behavioral Sciences*. 2nd ed. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1983.

Daniel, C., and F. S. Wood. *Fitting Equations to Data*. 2nd ed. New York: Wiley-Interscience, 1980.

Draper, N.R., and H. Smith. *Applied Regression Analysis*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1981.

Dunn, O. J., and V. A. Clark. *Applied Statistics: Analysis of Variance and Regression*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1987.

Edwards, A. L. *An Introduction to Linear Regression and Correlation*. 2nd ed. New York: W. H. Freeman & Co., 1984.

Edwards, A. L. *Multiple Regression and the Analysis of Variance and Covariance*. 2nd ed. New York: W. H. Freeman & Co., 1985.

Gunst, R. F., and R. L. Mason. *Regression Analysis and Its Application*. New York: Marcel Dekker, 1980.

Kleinbaum, D. G.; L. L. Kupper; and K. E. Muller. *Applied Regression Analysis and Other Multivariate Methods*. 2nd ed. Boston: PWS-Kent Publishing Co., 1988.

Mendenhall, W., and T. Sincich. *A Second Course in Business Statistics: Regression Analysis*. 2nd ed. San Francisco: Dellen Publishing Co., 1986.

Montgomery, D. C., and E. A. Peck. *Introduction to Linear Regression Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1982.

Mosteller, F., and J. W. Tukey. *Data Analysis and Regression*. Reading, Pa.: Addison-Wesley Publishing, 1977.

Myers, R. H. *Classical and Modern Regression with Applications*. Boston: Duxbury Press, 1986.

Pedhazur, E. J. *Multiple Regression in Behavioral Research*. 2nd ed. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1982.

Seber, G. A. F. *Linear Regression Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1977.

Weisberg, S. *Applied Linear Regression*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1985.

Younger, M. S. *A First Course in Linear Regression*. 2nd ed. Boston: Duxbury Press, 1985.

٢- تشخيصات وبناء نماذج.

Allen, D. M. "Mean Square Error of Prediction as a Criterion for Selecting Variables." *Technometrics* 13 (1971), pp. 469–75.

Anscombe, F. J., and J. W. Tukey. "The Examination and Analysis of Residuals." *Technometrics* 5 (1963), pp. 141–60.

Atkinson, A. C. *Plots, Transformations and Regression*. Oxford: Clarendon Press, 1985.

Barnett, V., and T. Lewis. *Outliers in Statistical Data*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1984.

Belsley, D. A.; E. Kuh; and R. E. Welsch. *Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity*. New York: John Wiley & Sons, 1980.

Box, G. E. P., and D. R. Cox. "An Analysis of Transformations." *Journal of the Royal Statistical Society B* 26 (1964), pp. 211–43.

Box, G. E. P., and N. R. Draper. *Empirical Model-Building and Response Surfaces*. New York: John Wiley & Sons, 1987.

Box, G. E. P., and P. W. Tidwell. "Transformations of the Independent Variables." *Technometrics* 4 (1962), pp. 531–50.

Chatterjee, S., and A. S. Hadi. *Sensitivity Analysis in Linear Regression*. New York: John Wiley & Sons, 1988.

Cook, R. D., and S. Weisberg. *Residuals and Influence in Regression*. London: Chapman and Hall, 1982.

Durbin, J., and G. S. Watson. "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. II." *Biometrika* 38 (1951), pp. 159–78.

Flack, V. F., and P. C. Chang. "Frequency of Selecting Noise Variables in Subset-Regression Analysis: A Simulation Study." *The American Statistician* 41 (1987), pp. 84–86.

Freedman, D. A. "A Note on Screening Regression Equations." *The American Statistician* 37 (1983), pp. 152–55.

Glaser, R. E. "Bartlett's Test of Homogeneity of Variances." In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 1, ed. S. Kotz and N. L. Johnson. New York: John Wiley & Sons, 1982, pp. 189–91.

Hoaglin, D. C., and R. Welsch. "The Hat Matrix in Regression and ANOVA." *The American Statistician* 32 (1978), pp. 17–22.

Hocking, R. R. "The Analysis and Selection of Variables in Linear Regression." *Biometrics* 32 (1976), pp. 1–49.

Hoerl, A. E., and R. W. Kennard. "Ridge Regression: Applications to Nonorthogonal Problems." *Technometrics* 12 (1970), pp. 69–82.

Mallows, C. L. "Some Comments on C_p." *Technometrics* 15 (1973), pp. 661–75.

Mansfield, E. R., and M. D. Conerly. "Diagnostic Value of Residual and Partial Residual Plots." *The American Statistician* 41 (1987), pp. 107–16.

Mantel, N. "Why Stepdown Procedures in Variable Selection." *Technometrics* 12 (1970), pp. 621–25.

Pope, P. T., and J. T. Webster. "The Use of an *F*-Statistic in Stepwise Regression Procedures." *Technometrics* 14 (1972), pp. 327–40.

Rousseeuw, P. J., and A. M. Leroy. *Robust Regression and Outlier Detection*. New York: John Wiley & Sons, 1987.

Snee, R. D. "Validation of Regression Models: Methods and Examples." *Technometrics* 19 (1977), pp. 415–28.

Stone, M. "Cross-Validatory Choice and Assessment of Statistical Prediction." *Journal of the Royal Statistical Society B* 36 (1974), pp. 111–47.

Theil, H., and A. L. Nagar. "Testing the Independence of Regression Disturbances." *Journal of the American Statistical Association* 56 (1961), pp. 793–806.

٣- حسابات إحصائية.

Dixon, W. J., chief editor. *BMDP Statistical Software Manual*, vols. 1 and 2. Berkeley, Calif.: University of California Press, 1988.

IMSL, Inc. *STAT/LIBRARY User's Manual, Version 1.1*. Houston: IMSL, 1989.

Kennedy, W. J., Jr., and J. E. Gentle. *Statistical Computing*. New York: Marcel Dekker, 1980.

MINITAB Reference Manual, Release 7. State College, Pa.: Minitab, Inc., 1989.

NAG, *The Generalized Linear Interactive Modelling (GLIM) System, Release 3.77*. Downers Grove, Ill.: Numerical Algorithms Group, Inc., 1986.

SAS User's Guide: Statistics. Version 6 ed. Cary, N.C.: SAS Institute, 1987.

SPSS^X User's Guide. 2nd ed. Chicago: SPSS, 1986.

٤- كتب عامة في التصميم التجريبي وتحليل التباين.

Anderson, V. L., and R. A. McLean. *Design of Experiments*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1974.

Box, G. E. P.; W. G. Hunter; and J. S. Hunter. *Statistics for Experimenters*. New York: John Wiley & Sons, 1978.

Cochran, W. G., and G. M. Cox. *Experimental Designs*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1957.

Cox, D. R. *Planning of Experiments*. New York: John Wiley & Sons, 1958.

Fisher, R. A. *The Design of Experiments*. 8th ed. New York: Hafner Publishing Co., 1966.

Gill, J. L. *Design and Analysis of Experiments*, vols. I and II. Ames, Iowa: Iowa State University Press, 1978.

Graybill, F. A. *Theory and Application of the Linear Model*. Boston: Duxbury Press, 1976.

Hicks, C. R. *Fundamental Concepts in the Design of Experiments*. 3rd ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1982.

Hocking, R. R. *The Analysis of Linear Models*. Monterey, Calif.: Brooks/Cole Publishing Co., 1985.

John, P. W. M. *Statistical Design and Analysis of Experiments*. New York: Macmillan Co., 1971.

Johnson, N. L., and F. C. Leone. *Statistics and Experimental Design in Engineering and the Physical Sciences*, vols. I and II. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1966.

Kempthorne, O. *The Design and Analysis of Experiments*. New York: John Wiley & Sons, 1952.

Keppel, G. *Design and Analysis: A Researcher's Handbook*. 2nd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1982.

Kirk, R. E. *Experimental Design: Procedures for the Behavioral Sciences*. 2nd ed. Monterey, Calif.: Brooks/Cole Publishing Co., 1982.

Mendenhall, W. *Introduction to Linear Models and the Design and Analysis of Experiments*. Boston: Duxbury Press, 1968.

Montgomery, D. C. *Design and Analysis of Experiments*. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1983.

Myers, J. L. *Fundamentals of Experimental Design*. 3rd ed. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1979.

Peterson, R. G. *Design and Analysis of Experiments*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1985.

Scheffé, H. *The Analysis of Variance*. New York: John Wiley & Sons, 1959.

Searle, S. R. *Linear Models for Unbalanced Data*. New York: John Wiley & Sons, 1987.

Seber, G. A. F. *The Linear Hypothesis*. 2nd ed. London: Charles Griffin, 1980.

Steel, R. G. D., and J. H. Torrie. *Principles and Procedures of Statistics*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1980.

Winer, B. J. *Statistical Principles in Experimental Design*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1971.

٥- مواضيع متفرقة.

Berkson, J. "Are There Two Regressions?" *Journal of the American Statistical Association* 45 (1950), pp. 164–80.

Bishop, Y. M. M.; S. E. Fienberg; and P. W. Holland. *Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1975.

Box, G. E. P. "Use and Abuse of Regression." *Technometrics* 8 (1966), pp. 625–29.

Box, G. E. P., and G. M. Jenkins. *Times Series Analysis: Forecasting and Control*. Rev. ed. San Francisco: Holden-Day, 1976.

Cox, D. R. "Notes on Some Aspects of Regression Analysis." *Journal of the Royal Statistical Society A* 131 (1968), pp. 265–79.

Federer, W. T., and M. Zelen. "Analysis of Multifactor Classifications with Unequal Numbers of Observations." *Biometrics* 22 (1966), pp. 525–52.

Fuller, W. A. *Measurement Error Models*. New York: John Wiley & Sons, 1987.

Gibbons, J. D. *Nonparametric Methods for Quantitative Analysis*. 2nd ed. Columbus, Ohio: American Sciences Press, 1985.

Graybill, F. A. *Matrices with Applications in Statistics*. 2nd ed. Belmont, Calif.: Wadsworth, 1983.

Greenhouse, S. W., and S. Geisser. "On Methods in the Analysis of Profile Data." *Psychometrika* 24 (1959), pp. 95–112.

Hocking, R. R. "A Discussion of the Two-Way Mixed Model." *The American Statistician* 27 (1973), pp. 148–52.

Hogg, R. V. "Statistical Robustness: One View of Its Use in Applications Today." *The American Statistician* 33 (1979), pp. 108–15.

Huynh, H., and L. Feldt. "Estimation of the Box Correction for Degrees of Freedom from Sample Data in the Randomized Block and Split-plot Designs." *Journal of Educational Statistics* 1 (1976), pp. 69–82.

Johnson, D. E., and F. A. Graybill. "Estimation of σ^2 in a Two-Way Classification Model with Interaction." *Journal of the American Statistical Association* 67 (1972), pp. 388–94.

Johnson, R. A., and D. W. Wichern. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. 2nd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1988.

Koch, G. G.; J. D. Elashoff; and I. A. Amara. "Repeated Measurements—Design and Analysis." In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 8, ed. S. Kotz and N. L. Johnson. New York: John Wiley & Sons, 1988, pp. 46–73.

Miller, R. G., Jr. *Simultaneous Statistical Inference*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1981.

Owen, D. B. *Handbook of Statistical Tables*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing, 1962.

Pindyck, R. S., and D. L. Rubinfeld. *Econometric Models and Economic Forecasts*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1981.

Satterthwaite, F. E. "An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components." *Biometrics Bulletin* 2 (1946), pp. 110–14.

Searle, S. R. *Matrix Algebra Useful for Statistics*. New York: John Wiley & Sons, 1982.

Snedecor, G. W., and W. G. Cochran. *Statistical Methods*. 7th ed. Ames, Iowa: Iowa State University Press, 1980.

ثبت المصطلحات

- عربي – إنجليزي
- إنجليزي – عربي

أولا: عربي - إنجليزي

أ

اختبار الرتب لكروسكال – والاس	Kruskal - Wallis rank test
اف كاذب	Pseudo F -test
الوسيط	Median test
بدرجة حرية واحدة	Single degree of freedom test
توكي للتجميعية	Tukey test for additivity
كوكران	Cochran test
أخطاء تدوير الأرقام العشرية	Roundoff errors
القيمة بي	P- value
انحراف كلي	Total deviation
انحياز الاختيار	Selection bias
قياس	Measurement bias

ب

بيانات (معطيات)	Data
تجريبية	Experimental data

English	Arabic
Observational data	مشاهدة

ت

English	Arabic
Additive effects	تأثيرات تجميعية
Carry-over effects	محمولة
Main effect	تأثير رئيس
Variance	تباين
Analysis of variance	تحليل تباين
Analysis of covariance	تغاير
Residual analysis	راسب
Box transformation	تحويل بوكس
Sample size planning	تخطيط حجم العينة
Repeated measure design	تصميم القياسات المتكررة
Split plot design	الوحدة المنشطرة(المنقسمة)
Completely randomized design	تام العشوائية
Design of experiments	تجارب
Nested design	حاضن
Balanced nested design	متوازن
Randomized block design	تصميم قطاع عشوائي
Generalized randomized block design	معمم
Incomplete block design	غير تام
Partialy hierarchical design	متسلسل جزئيا
Crossed - nested design	متصالب حاضن
Cross- over design	ناقل
Double cross- over design	مضاعف

Partialy nested design	محضن جزئيا
Latin square design	مربع لاتيني
Data snooping	تطفل على البانات
Randomization	تعشية
Interaction	تفاعل
Transformable interactions	تفاعلات قابلة للتحويل
Important transformations	مهمة
First - order interaction	تفاعل المرتبة الأولى
Second- order interaction	الثانية
Orthogonal decomposition	تفكيك متعامد
Replication	تكرار
Compound symmetry	تناظر مركب
Proportional frequencies	تواترات متناسبة
Noncentral F- distribution	توزيع اف غير المركزي
Studentized range distribution	مدى معير تقديرا
Expected mean square	توقع متوسط مربعات

ج

ANOVA table	جدول تحاين

خ

Homoscedastisity	خاصية التجانس
Heteroscedastisity	عدم التجانس
Sphericity	الكروية

د

Factorial study	دراسة عاملية

متعددة العوامل	Multiple factor study
مضاعفة التعمية	Double -blind study
وحيدة التعمية	Single blind study
دمج مجاميع المربعات	Pooling sum of squares

ر

راسب	Residual
معياري	Standardized residual
رسم احتمال طبيعي	Normal probability plot
خط	Line plot
راسب تتابعي (تسلسلي)	Residual sequence plot
رسوم (رسومات)	Plots

ش

شبه اختبار اف	Quasi F-test

ط

طريقة المتوسطات غير المرجحة	Method of unwaighted means
المقارنات المتعددة	Multiple comparison procedure
شيفّه للتقدير المشترك	Scheffe joint estimation procedure
ياتس	Yates method

ع

عائلة	Family
عامل تجريبي	Experimental factor
تصالب	Crossed factor
تصنيف	Classification factor
محضّن	Nested factor

ف

فعالية التقسيم الى قطاعات	Efficiency of blocking

ق

قاصية	Outlier
قوة اختبار	Power test

م

متغير مصاحب(مرافق)	Concomitant variable
متوسط	Mean
مربعات معالجة	Treatment mean square
مستوى عامل	Factor level mean
متوسطات معالجة	Treatment means
مجموع جداءات	Sum of products
معالجة	Treatment sum of products
مربعات العمود	Column sum of squares
الباقي	Remainder sum of squares
السطر	Row som of squares
القطاع	Block sum of squares
تفاعل	Interaction sum of squares
كلي	Total sum of squares
معالجة	Treatment sum of squares
معدل للخطأ	Adjusted error sum of squares
جداءات كلي	Total sum of products
مربع اغريقي – لاتيني	Graeco-latin square
لاتيني قياسي	Standard latin square

Youden square	يودين
Variance components	مركبات تباين
Factor level	مستوى عامل
Variance - covariance matrix	مصفوفة تباين - تغاير
Normal equations	معادلات ناظمية
Treatment	معالجة
Control treatment	حيادية
Kendall,s coefficient of concordance	معامل الاتفاق لكانديل
Confidence coefficient	ثقة
Family confidence coefficient	عائلي
Subsampling	معاينة جزئية
Noncentrality parameter	معلمة اللامركزية
Pairwise comparisons	مقارنات مثنى مثنى
Comparison	مقارنة
Unbiased estimator	مقدر غير منحاز

ن

Analysis of variance model	نماذج تحليل تباين
Random factor effects model	نموذج تأثيرات عوامل عشوائية
Factor effect model	تأثير عامل
Random ANOVA model	تحاين عشوائي
Mixed ANOVA model	مختلط
Unrestricted model	غير مقيد
Cell means model	متوسطات الخلايا
Random cell means model	عشوائي
Reduced model	مخفض
Components of variance model	مركبات التباين

و

وحدات تجريبية جزئية	**Subplots**
وحدة تجريبية	**Experimental unit**

ثانيا: إنجليزي - عربي

A

Addetive effects	تأثيرات تجميعية
Adjusted error	خطأ معدل
Analysis of covariance	تحليل تغاير
Anlysis of variance	تحليل تباين
Analysis of variance models	نماذج تحليل تباين
ANOVA table	جدول تحاين
Asymptotic normality	طبيعيّة مقاربة (تقاربية)

B

Balanced nested design	تصميم حاضن متوازن
Block	قطاع
Block sum of squares	مجموع مربعات القطاعات
Box transformation	تحويل بوكس

C

Carry over effect	تأثيرات محمولة
Cell means model	نموذج متوسطات الخلايا
Classification factor	عامل تصنيف
Chocran test	اختبار كوكران
Column sum of squares	مجموع مربعات الأعمدة
Comparison	مقارنة
Complete factor study	دراسة عاملية تامة
Completly randomized design	تصميم تام العشوائية
Component of variance model	نموذج مركبات التباين

Concomitant variable	متغير مصاحب(مرافق)
Confidence coefficient	معامل ثقة
Contrast	متضادة
Control treatment	معالجة حيادية
Crossed factor	عامل تصالب
Crossed - nested design	اتصميم متصالب حاضن
Crossed over design	تصميم ناقل

D

Data snooping	تطفل على البيانات
Design of experiment	تصميم تجارب
Double - blind study	دراسة مضاعفة التعمية
Double cross - over design	تصميم ناقل مضاعف

E

Efficiency of blocking	فعالية التقسيم الى قطاعات
Expected mean square	توقع متوسط مربعات
Experimental factor	عامل تجريبي
Experimental unit	وحدة تجريبية
Extra sum of squares	مجموع مربعات إضافي

F

Factor	عامل
Factor effect model	نموذج تأثير عاملي
Factorial studies	دراسات عاملية
Factor level	مستوى عامل
Factor level mean	متوسط مستوى عامل
Family	عائلة
Family confidence coefficient	معامل ثقة عائلي

First - order interaction	تفاعل من المرتبة الأولى
G	
Generalized randomized block design	تصميم قطاع عشوائي معمم
Graeco - Latin square	مربع اغريقي لاتيني
H	
Heteroscedastisity	خاصية عدم التجانس (التفاوت)
Homoscedastisity	خاصية التجانس
I	
Important interactions	تفاعلات مهمة
Incomplete block design	تصميم قطاع غير تام
Interaction	تفاعل
Interaction sum of squares	مجموع مربعات تفاعل
K	
Kendall - coefficient of concordance	معامل الاتفاق لكلنديل
Kruskal - Wallis rank test	اختبار الرتب لكروسكال والاس
L	
Latin square design	تصميم المربع اللاتيني
Line plot	رسم خط
M	
Main effect	تأثير رئيس
Mean	متوسط
Measurement bias	انحياز قياس
Median test	اختبار الوسيط
Measurement error	خطأ قياس
Method of unweighted means	طريقة المتوسطات غير المرجحة
Mixed ANOVA model	نموذج تباين مختلط

Multifactor study	دراسة متعددة العوامل
Multiple comparison procedures	طريقة المقارنات المتعددة
Nested design	تصميم حاضن
Nested factor	عامل محضّن
Noncentral F- distribution	توزيع اف غير المركزي
Noncentrality parameter	معلمة اللامركزية
Normal equations	معادلات ناظمية
Normal probability plot	رسم احتمال طبيعي

O

Observation error sum of squares	مجموع مربعات خطأ المشاهدة
Observation unit	وحدة مشاهدة
Orthogonal decomposition	تفكيك متعامد
Outlier	قاصية

P

P-value	القيمة-بي
Piecewise comparisons	مقارنات مثنى مثنى
Partialy hierarchical design	تصميم متسلسل جزئيا
Partialy nested design	تصميم محضن جزئيا
Plots	رسوم (رسومات)
Power of a test	قوة اختبار
Proportional frequencies	تواترات متناسبة
Pseudo F- test	اختبار اف كاذب
Press criterion	معيار بريس

Q

Quasi F- test	شبه اختبار اف

Qualitative factor	عامل وصفي
Quantitative factor	عامل كمي

R

Random ANOVA model	نموذج تباين عشوائي
Random cell means model	نموذج متوسطات خلايا عشوائي
Random factor effects model	نموذج تأثيرات عوامل عشوائية
Randomization	تعشية
Randomized block design	تصميم قطاع عشوائي
Reduced model	نموذج مخفض
Remainder sum of squares	مجموع مربعات الباقي
Repeated measure design	تصميم القياسات المتكررة
Replication	تكرار
Residual	راسب
Residual analysis	تحليل راسب
Residual sequence plot	رسم راسب تتابعي(تسلسلي)
Roundoff errors	أخطاء تدوير الأرقام العشرية
Row sum of squares	متوسط مربعات السطر

S

Scheffe joint estimation procedure	طريقة شيفّه للتقدير المشترك
Second order interaction	تفاعل من المرتبة الثانية
Selection bias	انحياز الاختيار
Single blind study	دراسة وحيدة التعمية
Single degree of freedom test	اختبار بدرجة حرية واحدة
Single factor study	دراسة وحيدة العامل
Sphericity	خاصية الكروية
Split plot design	تصميم الوحدة المنشطرة(المنقسمة)
Standerdized residual	راسب معياري

Standard latin square	مربع لاتيني قياسي
Studentized range distribution	توزيع مدى معير تقديرا
Subplots	وحدات تجريبية جزئية
Subsampling	معاينة جزئية
Sum of products	مجموع جداءات
T	
Total deviation	انحراف كلي
Total sum of products	مجموع جداءات كلي
Total sum of squares	مجموع مربعات كلي
Transformable interactions	تفاعلات قابلة للتحويل
Treatment	معالجة
Treatment means	متوسطات معالجات
Treatment mean squares	متوسط مربعات معالجة
Treatment sum of products	مجموع جداءات معالجة
Treatment sum of squares	مجموع مربعات معالجة
Tukey test for additivity	اختبار توكي للتجميعية
U	
Unbalanced nested design	تصميم حاضن غير متوازن
Unbiased estimator	مقدر غير منحاز
Unrestricted model	نموذج غير مقيد
V	
Variance components	مركبات تباين
Variance - covariance matrix	مصفوفة تباين تغاير
Y	
Yates method	طريقة ياتس
Youden square	مربع يودين

كشاف الموضوعات

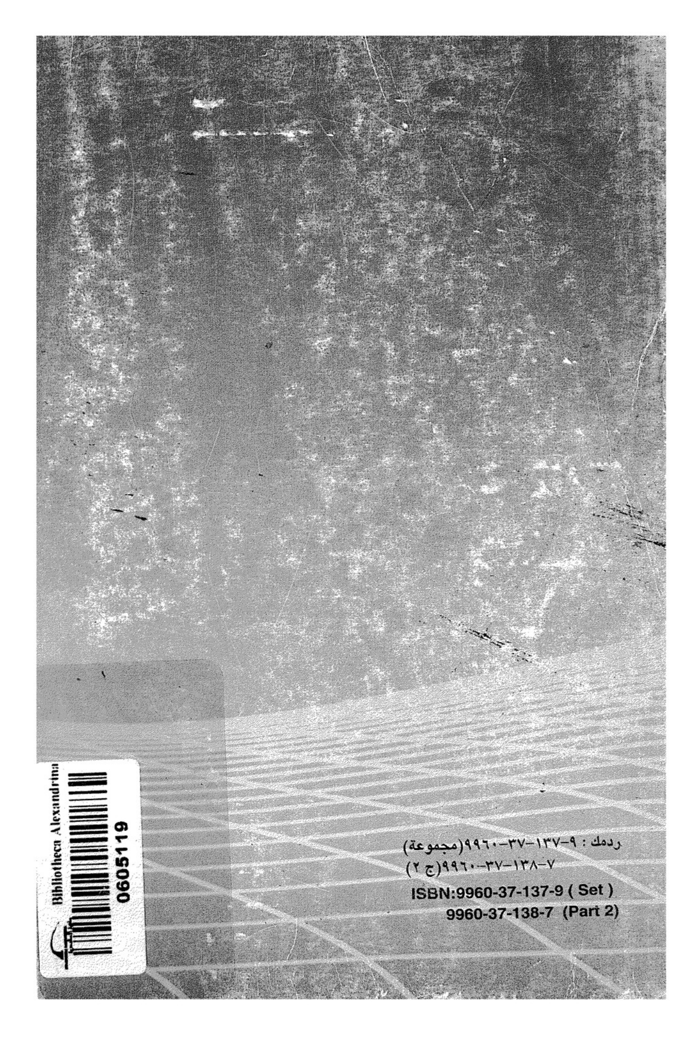
ف

ق

م

كلي٢٧

معدل للخطأ٤٩٩



ردمك : ٩-١٣٧-٣٧-٩٩٦٠(مجموعة)
٧-١٣٨-٣٧-٩٩٦٠(ج ٢)
ISBN:9960-37-137-9 (Set)
9960-37-138-7 (Part 2)

Bibliotheca Alexandrina
0605119